PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL IB OXFORD

EN COLABORACIÓN CON ib

VERSIÓN EN ESPAÑOL

MATEMÁTICAS NIVEL MEDIO

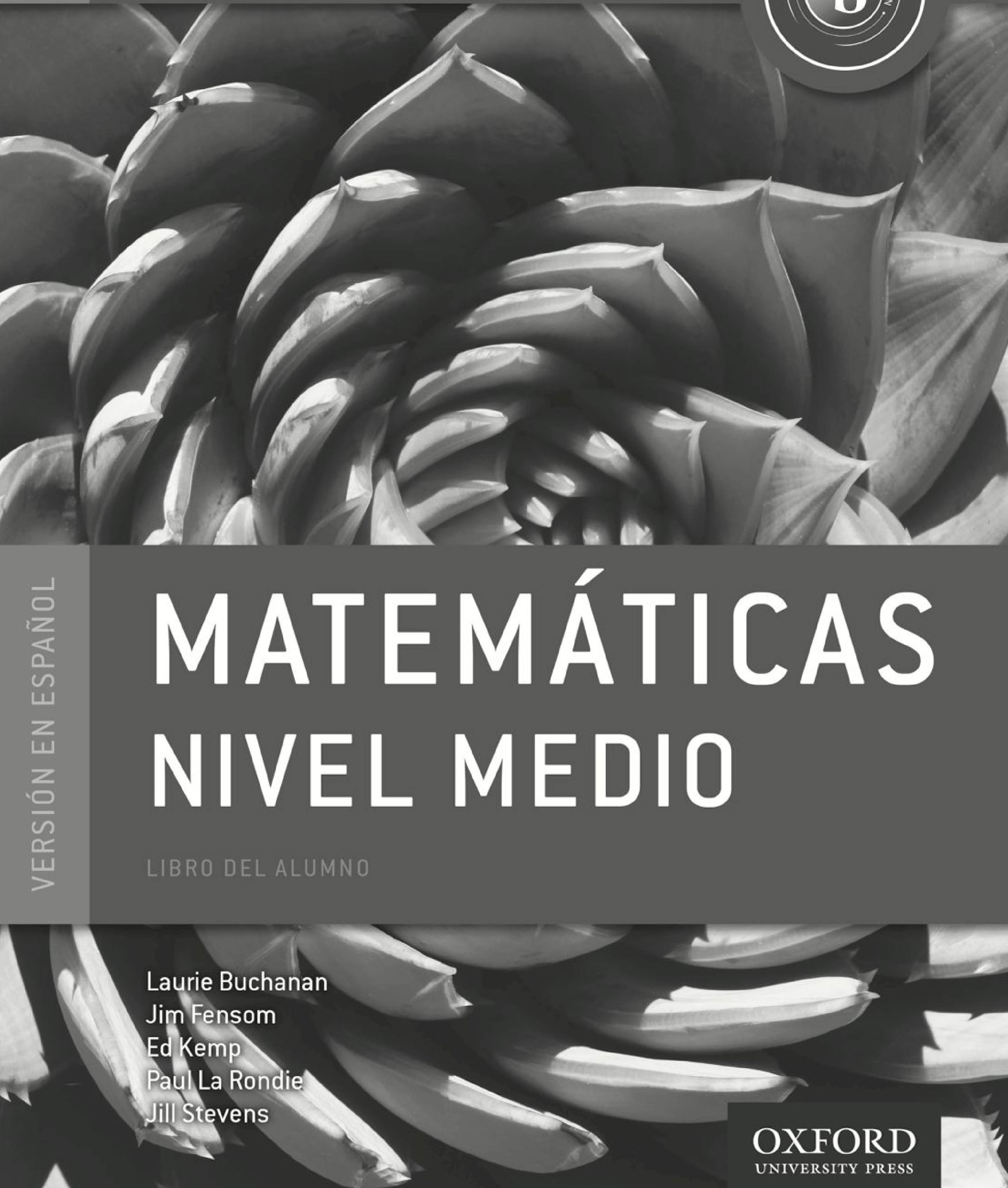
LIBRO DEL ALUMNO

Laurie Buchanan
Jim Fensom
Ed Kemp
Paul La Rondie
Jill Stevens

OXFORD

PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL IB OXFORD

EN COLABORACIÓN CON ib



VERSIÓN EN ESPAÑOL

MATEMÁTICAS NIVEL MEDIO

LIBRO DEL ALUMNO

Laurie Buchanan
Jim Fensom
Ed Kemp
Paul La Rondie
Jill Stevens

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Great Clarendon Street, Oxford, OX2 6DP, Reino Unido

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford que promueve el objetivo de excelencia académica, educativa e investigadora de esta Universidad mediante sus publicaciones en todo el mundo. Oxford es una marca registrada de Oxford University Press en el Reino Unido y en algunos otros países.

Traducido del inglés por Fabián Valiño, y revisado por Irene Owen y Amalia Galetto

Primera publicación en 2015

Esta publicación figura en el catálogo de la Biblioteca Británica con los datos siguientes:

978-0-19-833876-5

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

El papel usado para la fabricación de este libro es un producto natural y reciclable de madera de bosques sostenibles. El proceso de fabricación se ajusta a las normas ambientales del país de origen.

Impreso en China

Agradecimientos

Los editores desean agradecer a las siguientes personas e instituciones su autorización para usar sus fotografías:

P3: Nasa; P4: Konstantin Chagin/Shutterstock; P4: Janine Wiedel Photolibrary/Alamy; P13: Hulton Archive/Stringer/Getty Images; P17: Trip/Art Director; P17: Lunar And Planetary Instotute; P31: Nlshop/Shutterstock; P31: Itsmejust/Shutterstock; P33: Robert Crow/Dreamstime.com; P33: Lane Erickson/Dreamstime.com; P41: Sean Nel/Shutterstock; P54: Blasbike/Dreamstime.com; P56: Brad Remy/Dreamstime.com; P61: David Gee/Alamy; P61: Paulpaladin/Dreamstime.com; P61: Konstantin Androsov/Dreamstime.com; P61: Lembit Ansperi/Dreamstime.com; P61: Julián Rovagnati/Dreamstime.com; P60: Ilya Postnikov/Dreamstime.com; P61: Victor Habbick Visions/Science Photo Library; P63: Martin Fischer/Dreamstime.com; P64: Mrshining/Dreamstime.com; P64: Science Photo Library; P73: Francesco Abrignani/Shutterstock; P75: Ints Vikmanis/Shutterstock; P84: 3dimentii/Shutterstock; P85: Nicemonkey/Shutterstock; P92: Supri Suharjoto/Shutterstock; P98: Peter E Noyce/Alamy; P99: James Steidl/Dreamstime.com; P99: Motorolka/Dreamstime.com; P98: Stephen Gray/Shutterstock; P101: Viorel Dudau/Dreamstime.com; P111: Pcheruvi/Dreamstime.com; P112: Classic Image/Alamy; P132: Adisa/Shutterstock; P133: Robyn Mackenzie/Shutterstock; P134: Nigel Spiers/Dreamstime.com; P138: Irochka/Dreamstime.com; P139: Nasa Archive/Alamy; P141: Iofoto/Shutterstock; P142: Science Source/Science Photo Library; P145: Shutterstock/Patrik Dietrich; P149: Shutterstock/Plampy; P152: Shutterstock/John Orsbun; P152: Shutterstock/Wavebreakmedia Ltd; P153: Shutterstock/Filipe B. Varela; P155: Shutterstock/Luckyphoto; P155: Shutterstock/Upthebanner; P158: The Art Gallery Collection/Alamy; P158: Mireille Vautier/Alamy; P159: Yayayoyo/Shutterstock; P159: Travis Manley/Dreamstime.com; P159: Louloup hotos /Shutterstock; P161: James Harbal/Dreamstime.com; P162: Robyn Mackenzie/Dreamstime.com; P164: Science Photo Library; P176: Nito/Shutterstock; P183: Gsplanet/Shutterstock; P182: Gingergirl/Dreamstime.com; P: Christopher King/Dreamstime.com; P192: Art Directors & Trip/Alamy; P192: Alex Garaev/Shutterstock; P193: Adam Eastland Italy/Alamy; P192: Lebrecht Music And Arts Photo Library/Alamy; P195: Yellowj/Shutterstock; P201: Science Source/Science Photo Library; P205: Glasscuter/Dreamstime.com; P205: Jules2000 /Shutterstock; P214: Sheila Terry/Science Photo Library; P217: Sheila Terry/Science Photo Library; P221: Glowimages/Getty Images; P222: Ccat82/Shutterstock; P253: Adrian Zenz/Dreamstime.com; P255: Mitchell Gunn/Dreamstime.com; P256: Will & Deni Mcintyre/Corbis; P256: Gravicapa/Fotolia.Com; P256: Brett Critchley/Dreamstime.com; P257: Ivan Hafizov/Dreamstime.com; P264: Mlehmann78/Dreamstime.com; P270: Pamela Tekiel/Dreamstime.com; P271: William Perry/Dreamstime.com; P274: Sergio Azenha/Alamy; P275: Brenda Carson/Dreamstime.com; P280: Tina Norris/Rex Features; P283: Maniec/Dreamstime.com; P282: Asdf_1/Dreamstime.com; P289: Robodread/Dreamstime.com; P288: Niday Picture Library/Alamy; P291: Sean Gladwell/Fotolia; P313: Science Photo Library; P318: Andrew Brookes, National Physical Laboratory/Science Photo Library; P318: Ted Foxx/Alamy; P330: Mediacolor's/Alamy; P330: Fromoldbooks.Org/Alamy; P333: Alex James Bramwell/Shutterstock; P334: Paulmerrett/Dreamstime.com; P349: Science Photo Library; P361: Maxx-Studio/Shutterstock; P363: Lamb/Alamy; P363: Bcampbell65/Shutterstock; P372: Maridav/Shutterstock ; P373: Chris Harvey/Shutterstock; P384: Michel Stevelmans/Shutterstock ; P384: Brandon Bourdages/Shutterstock; P385: Darren Baker/Dreamstime.com; P: Viktor Pravdica/Dreamstime.com; P403: Tomadesign/Shutterstock; P403: Tomadesign/Shutterstock; P403: Tomadesign/Shutterstock; P403: Konstantin Mironov/Shutterstock; P405: Darryl Brooks/Shutterstock; P406: Rafa Irusta/Shutterstock; P436: Dmitry_K/Shutterstock; P444: Pagadesign/Istockphoto; P447: Mr.Xutakupu/Shutterstock; P455: National Portrait Gallery London; P483: Rorem/Shutterstock; P487: Cynthia Burkhardt/Shutterstock; P487: Lori Martin/Shutterstock; P488: Phb.Cz (Richard Semik)/Shutterstock; P493: Mary Evans Picture Library/Alamy; P492: Alan Haynes/Alamy; P497: Mythic Ink/Getty Images; P497: Noah Berger/Associated Press; P506: Mythic Ink/Getty Images; P517: Science Photo Library; P521: Reuters Pictures; P526: Doodledance/Shutterstock; P535: Stanth/Shutterstock; P536: Anke Van Wyk/Dreamstime.com; P528: Cla78/Shutterstock; P529: Vladimir Yessikov/Shutterstock; P547: Monkey Business Images/Dreamstime.com; P552: Monkey Business Images/Dreamstime.com; P555: Vladimir Voronin/Dreamstime.com; P557: Phase4photography/Dreamstime.com; P558: Sculpies/Dreamstime.com; P555: Mario Savoia/Shutterstock; P555: R. Gino Santa Maria/Shutterstock; P554: James Weston/Shutterstock; P567: Beboy/Shutterstock; P567: Buslik/Shutterstock; P567: Dadek/Shutterstock; P566: Scott Camazine/Science Photo Library; P566: Nasa/Science Photo Library; P567: Mikkel Juul Jensen/Science Photo Library.

Portada: Joshua McCullough / Photo Library

Los editores han procurado por todos los medios identificar y contactar a todos los titulares de los derechos de autor antes de la publicación de este libro, pero no ha sido posible en todos los casos. Si se les notifica, los editores rectificarán cualquier error u omisión a la mayor brevedad.

Definición del libro del alumno

Los libros del alumno del Programa del Diploma del IB son recursos diseñados como apoyo para el estudio en los dos años del Programa del Diploma. Estos recursos ayudan a los alumnos a entender lo que se espera del estudio de una asignatura del Programa del Diploma del IB y presentan su contenido de manera que ilustra el propósito y los objetivos del IB. Reflejan la filosofía y el enfoque del IB, y favorecen una comprensión profunda de la asignatura al establecer conexiones con temas más amplios y brindar oportunidades para el pensamiento crítico.

Conforme a la filosofía del IB, los libros abordan el currículo teniendo en cuenta el curso en su totalidad y el uso de una amplia gama de recursos, la mentalidad internacional, el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB y los componentes troncales del Programa del Diploma del IB: Teoría del Conocimiento, la Monografía y Creatividad, Actividad y Servicio (CAS).

Todos los libros pueden usarse en combinación con otros materiales y, de hecho, se espera que los alumnos del IB extraigan conclusiones basándose en una variedad de recursos. Todos los libros proponen lecturas adicionales y brindan sugerencias para ampliar la investigación.

Además, los libros del alumno proporcionan asesoramiento y orientación con respecto a los requisitos de evaluación de las asignaturas y la probidad académica.

Declaración de principios del IB

El Bachillerato Internacional tiene como meta formar jóvenes solidarios, informados y ávidos de conocimiento, capaces de contribuir a crear un mundo mejor y más pacífico, en el marco del entendimiento mutuo y el respeto intercultural.

En pos de este objetivo, la organización colabora con establecimientos escolares, gobiernos y organizaciones internacionales para crear y desarrollar programas de educación internacional exigentes y métodos de evaluación rigurosos.

Estos programas alientan a alumnos del mundo entero a adoptar una actitud activa de aprendizaje durante toda su vida, a ser compasivos y a entender que otras personas, con sus diferencias, también pueden estar en lo cierto.

El perfil de la comunidad de aprendizaje del IB

El objetivo fundamental de los programas del Bachillerato Internacional (IB) es formar personas con mentalidad internacional que, conscientes de la condición que las une como seres humanos y de la responsabilidad que comparten de velar por el planeta, contribuyan a crear un mundo mejor y más pacífico. Como miembros de la comunidad de aprendizaje del IB, nos esforzamos por ser:

Indagadores: Cultivamos nuestra curiosidad, a la vez que desarrollamos habilidades para la indagación y la investigación. Sabemos cómo aprender de manera autónoma y junto con otros. Aprendemos con entusiasmo y mantenemos estas ansias de aprender durante toda la vida.

Informados e instruidos: Desarrollamos y usamos nuestra comprensión conceptual mediante la exploración del conocimiento en una variedad de disciplinas. Nos comprometemos con ideas y cuestiones de importancia local y mundial.

Pensadores: Utilizamos habilidades de pensamiento crítico y creativo para analizar y proceder de manera responsable ante problemas complejos. Actuamos por propia iniciativa al tomar decisiones razonadas y éticas.

Buenos comunicadores: Nos expresamos con confianza y creatividad en diversas lenguas, lenguajes y maneras. Colaboramos eficazmente, escuchando atentamente las perspectivas de otras personas y grupos.

Íntegros: Actuamos con integridad y honradez, con un profundo sentido de la equidad, la justicia y el respeto por la dignidad y los derechos de las personas en todo el mundo. Asumimos la responsabilidad de nuestros propios actos y sus consecuencias.

De mentalidad abierta: Desarrollamos una apreciación crítica de nuestras propias culturas e historias personales, así como de los valores y tradiciones de los demás. Buscamos y consideramos distintos puntos de vista y estamos dispuestos a aprender de la experiencia.

Solidarios: Mostramos empatía, sensibilidad y respeto frente a las necesidades y los sentimientos de otros. Nos comprometemos a ayudar a los demás y actuamos con el propósito de influir positivamente en las vidas de las personas y el mundo que nos rodea.

Audaces: Abordamos la incertidumbre con previsión y determinación. Trabajamos de manera autónoma y colaborativa para explorar nuevas ideas y estrategias innovadoras. Defendemos nuestras posturas con valentía y claridad.

Equilibrados: Entendemos la importancia del equilibrio físico, mental y emocional para lograr el bienestar propio y el de los demás.

Reflexivos: Evaluamos detenidamente el mundo y nuestras propias ideas y experiencias. Nos esforzamos por comprender nuestras fortalezas y debilidades para, de este modo, contribuir a nuestro aprendizaje y desarrollo personal.

Probidad académica

Es fundamental citar debidamente a los autores de la información que se utiliza en un trabajo. Después de todo, los autores de las ideas (propiedad intelectual) tienen derechos de propiedad. Para que un trabajo se considere original, debe basarse en ideas propias y citar debidamente la autoría de las ideas y el trabajo de otras personas. Por lo tanto, toda actividad escrita u oral realizada para la evaluación debe estar expresada en palabras propias. Cuando se utilicen fuentes externas o se haga referencia a ellas, ya sea en forma de cita directa o paráfrasis, se debe indicar debidamente su procedencia.

Cómo citar el trabajo de otros

Para indicar que se han utilizado las ideas de otras personas se usan notas a pie de página y bibliografías.

Notas a pie de página (colocadas en la parte inferior de una página) o notas al final (colocadas al final de un documento): deben utilizarse cuando se cita o parafrasea de otro documento, o cuando se reproduce de manera resumida la información de otro documento. No es necesario usar una nota a pie de página para información que forma parte de un área de conocimiento. Es decir, no es necesario citar definiciones en notas a pie de página, ya que se considera que son de conocimiento general.

Bibliografías: deben incluir una lista formal de los recursos que se han utilizado en un trabajo. Por "formal" se entiende que debe presentarse siguiendo una de las varias convenciones aceptadas. Esto normalmente implica separar los recursos utilizados en diferentes categorías (por ejemplo, libros, revistas, artículos periodísticos, recursos de Internet, CD y obras de arte) y proporcionar datos completos de dónde puede encontrar la misma información un lector o un observador del trabajo. La bibliografía es una parte obligatoria de la Monografía.

¿Qué constituye una conducta improcedente?

La conducta improcedente es toda acción por la que un alumno salga o pueda salir beneficiado injustamente en uno o varios componentes de la evaluación. El plagio y la colusión se consideran conducta improcedente.

Plagio: se entiende como la presentación de las ideas o el trabajo de otra persona como propios. Estas son algunas formas de evitar el plagio:

- Debe citarse la autoría de las palabras e ideas de otras personas que se utilicen para respaldar los argumentos propios.
- Los pasajes citados textualmente deben entrecomillarse y debe citarse su autoría.
- Los CD-ROM, mensajes de correo electrónico, sitios web y otros medios electrónicos deben ser tratados de la misma manera que los libros y las revistas.
- Debe citarse la fuente de todas las fotografías, mapas, ilustraciones, programas informáticos, datos, gráficos, materiales audiovisuales y otros materiales similares que no sean de creación propia.
- Cuando se utilicen obras de arte, ya sean de música, cine, danza, teatro o artes visuales, o cuando se haga un uso creativo de una parte de una obra de arte, se debe citar al artista original.

Colusión: se entiende como el comportamiento de un alumno que contribuye a la conducta improcedente de otro. Incluye:

- Permitirle a otro alumno que copie un trabajo o lo presente como si fuese propio
- Presentar un mismo trabajo para distintos componentes de evaluación o requisitos del Programa del Diploma

Otras formas de conducta improcedente incluyen cualquier acción que le permita a un alumno salir beneficiado injustamente, o que tenga consecuencias sobre los resultados de otro alumno (por ejemplo, introducir material no autorizado a la sala de examen, conducta indebida durante un examen y falsificar documentación relacionada con CAS).

Contenidos

Acerca del libro

Este libro cubre completamente el actual programa de Matemáticas Nivel Medio. Cada capítulo está dividido en secciones en formato de lección con las siguientes características:

- Investigaciones
- Sugerencias para exploraciones
- Consejos del examinador
- Teoría del Conocimiento
- Curiosidades
- Exploración histórica

Las matemáticas resultan un instrumento de lo más poderoso y valioso, que posee belleza en sí misma como objeto de estudio y por su utilidad en otras disciplinas. Los sumerios desarrollaron las matemáticas como área reconocida de enseñanza y aprendizaje hace aproximadamente 5000 años y su desarrollo no ha cesado desde entonces.

El libro del alumno lo guiará a través de las actualizaciones curriculares con amplia cobertura de todos los contenidos y el nuevo requisito de evaluación interna. Se ha puesto especial énfasis en el desarrollo y la comprensión de los conceptos matemáticos en sus aplicaciones a la vida cotidiana, como así también en la resolución de problemas y el pensamiento crítico. El libro del alumno identifica las preguntas que podrían ser útiles para la práctica de exámenes y aquellas en las que puede emplearse una CPG. Se diseñaron las preguntas para avanzar en la dificultad, reforzar las habilidades de análisis y generar confianza a través de la comprensión. El internacionalismo, la ética y las aplicaciones están claramente integrados en cada sección y al final de cada capítulo se incluye una página de aplicación de Teoría del Conocimiento.

El profesor y el alumno pueden trabajar según la secuencia propuesta pero existe también la posibilidad de seguir un orden alternativo. Donde resulta pertinente, se muestra la solución de los ejemplos mediante el uso de la calculadora TI-Nspire. En el sitio web (www.oxfordsecondary.com/ib-matematicas), se incluye material de ampliación como, por ejemplo, hojas de ejercicios y ejercicios resueltos. La educación matemática es un campo creciente y cambiante. El enfoque contextualizado que integra los recursos tecnológicos permite que los alumnos se adapten a contextos de aprendizaje para toda la vida.

Nota: Se ha utilizado el estilo del IB para los términos matemáticos. También se ha empleado el estilo formal de redacción utilizado en los exámenes del IB, para ayudar a los alumnos a prepararse para dichas pruebas.

Acerca de los autores

Laurie Buchanan ha enseñado matemáticas en Denver, Colorado, por más de 20 años. Es jefa de un equipo de examinadores y examinadora principal en la prueba 1 y examinadora para la prueba 2 de Matemáticas NM. Es además responsable de talleres y trabajó como parte del equipo de revisión del currículo.

Jim Fensom ha enseñado cursos de matemáticas del IB durante aproximadamente 35 años. Se desempeñó como coordinador de Matemáticas en la escuela Nexus International School en Singapur.

Edward Kemp ha enseñado matemáticas en el Programa del Diploma durante 20 años. Es el director del área matemática en el Ruamrudee International School de Tailandia. Es examinador para Matemáticas NM del IB, se desempeñó en el comité de revisión del currículo y además es responsable de contenidos de talleres en línea para el IB.

Paul La Rondie ha enseñado matemáticas para el Programa del Diploma en el Sevenoaks School durante 10 años. Ha sido examinador y jefe de equipo de examinadores para ambas pruebas en Matemáticas NM y moderador de evaluación interna. Ha integrado el comité de revisión del currículo y es responsable de contenidos de talleres en línea para el IB.

Jill Stevens ha enseñado el programa de matemáticas para el Programa del Diploma en el Trinity High School, Euless, Texas, durante 9 años. Es examinadora para Matemáticas NM, responsable de talleres y ha formado parte del comité de revisión del currículo. Jill fue lectora y líder responsable en el examen de Cálculo AP del College Board.

1 Funciones

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

2.1 Funciones: dominio, recorrido; funciones compuesta, identidad e inversa

2.2 Gráficos de funciones hechos a mano y con calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG), sus máximos y mínimos, asíntotas, el grafico de $f^{-1}(x)$

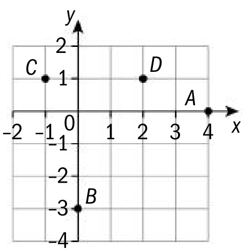
2.3 Transformaciones de gráficos, traslaciones, simetrías, estiramientos y transformaciones compuestas

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Situar puntos en un eje de coordenadas

Por ejemplo: Situar los puntos $A(4, 0)$, $B(0, -3)$, $C(-1, 1)$ y $D(2, 1)$ en un plano cartesiano.



2 Sustituir valores en una expresión

Por ejemplo: Sabiendo que $x = 2$, $y = 3$ y $z = -5$, hallar el valor de:

a $4x + 2y$ **b** $y^2 - 3z$

a $4x + 2y = 4(2) + 2(3) = 8 + 6 = 14$

b $y^2 - 3z = (3)^2 - 3(-5) = 9 + 15 = 24$

3 Resolver ecuaciones lineales

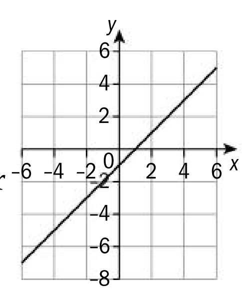
Por ejemplo: Resolver $6 - 4x = 0$

$6 - 4x = 0 \Rightarrow 6 = 4x$

$1{,}5 = x \Rightarrow x = 1{,}5$

4 Usar la CPG para obtener el gráfico de una función

Por ejemplo: Representar gráficamente $f(x) = 2x - 1$, $-6 \leq x \leq 6$



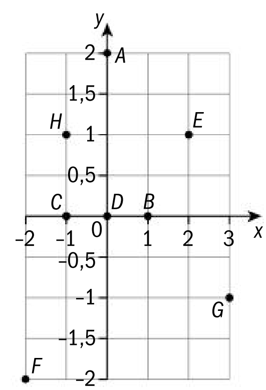
5 Desarrollar productos de binomios

Por ejemplo: Desarrollar $(x + 3)(x - 2)$ $= x^2 + x - 6$

Comprobemos nuestras habilidades

1 **a** Sitúe estos puntos en un plano cartesiano. $A(1, 3)$, $B(5, -3)$, $C(4, 4)$, $D(-3, 2)$, $E(2, -3)$, $F(0, 3)$.

b Escriba las coordenadas de los puntos A hasta H.



2 Sabiendo que $x = 4$, $y = 6$ y $z = -10$, halle:

a $4x + 3y$ **b** $z^2 - 3y$ **c** $y - z$ **d** $\dfrac{2x+5}{yz}$

3 Resuelva:

a $3x - 6 = 6$ **b** $5x + 7 = -3$ **c** $\dfrac{x}{2} + 6 = 11$

4 Obtenga el gráfico de estas funciones en la CPG en el dominio dado. Después, dibuje aproximadamente las funciones en papel.

a $y = 2x - 3$, $-4 \leq x \leq 7$

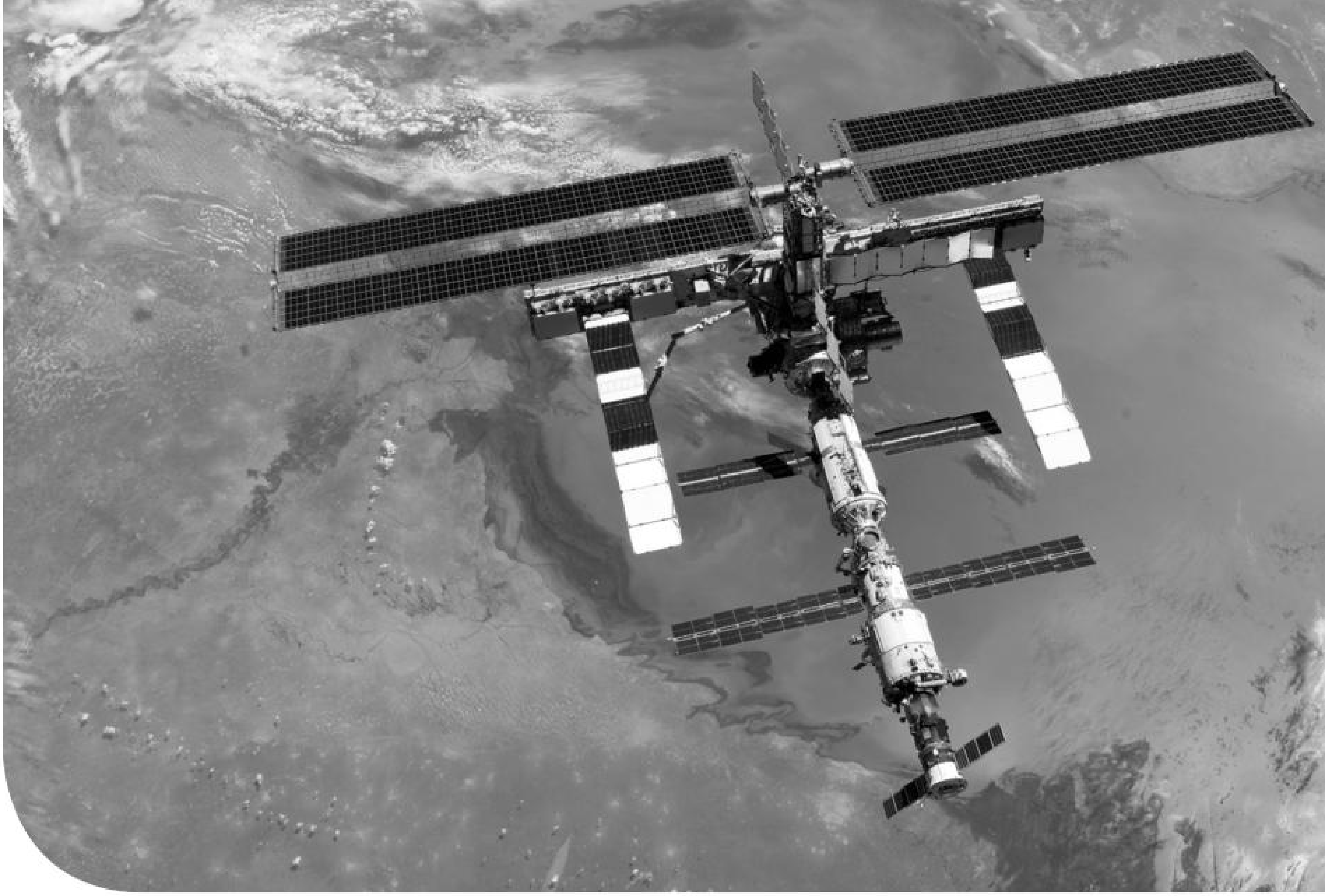
b $y = 10 - 2x$, $-2 \leq x \leq 5$

c $y = x^2 - 3$, $-3 \leq x \leq 3$

5 Desarrolle:

a $(x + 4)(x + 5)$ **b** $(x - 1)(x - 3)$

c $(x + 5)(x - 4)$



La Estación Espacial Internacional ha estado orbitando la Tierra más de 15 veces por día durante más de 10 años; sin embargo, ¿cuántos la hemos visto? Localizar a simple vista la estación espacial no es tan difícil como podría parecer, siempre y cuando se sepa en qué dirección mirar. Aunque la estación viaja a una velocidad de $7{,}7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, está en una de las órbitas más bajas posibles, a aproximadamente 390 km por encima de nuestras cabezas. Gracias a sus enormes alas solares, es una de las "estrellas" más brillantes y ello hace que sea bastante fácil distinguirla a medida que se desplaza por el cielo nocturno.

▲ Estación Espacial Internacional

La relación $t = \frac{d}{22\,744}$ da la velocidad de la estación espacial, donde t es el tiempo medido en horas y d es la distancia recorrida en kilómetros.

A esta relación matemática se le llama **función** y es solo un ejemplo de cómo una función matemática puede emplearse para describir una situación.

En este capítulo exploraremos las funciones y cómo se las puede aplicar a una amplia variedad de situaciones matemáticas.

Uno de los primeros matemáticos en estudiar el concepto de función fue el filósofo francés Nicolás Oresme (1323–1382). Trabajó con cantidades variables dependientes e independientes.

1.1 Introducción a las funciones

Investigación: saludos con las manos

En algunos países es costumbre que durante las reuniones de negocios las personas se saluden estrechando las manos.
Si hay 2 personas, habrá 1 saludo; si hay 3 personas, habrá 3 saludos, y así sucesivamente.

a ¿Cuántos saludos habrá entre 4 personas?

b Copie y complete esta tabla:

Número de personas	Número de saludos
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Quizás resulte útil intentar esto con un grupo de compañeros de la clase.

En este caso, no corresponde unir los puntos, porque estamos trabajando solo con números enteros (discretos).

c Sitúe los puntos en un plano cartesiano con el número de personas en el eje *x* y el número de saludos en el eje *y*.

d Escriba una fórmula para el número de saludos, *S*, en función del número de personas, *n*.

Relaciones y funciones

Distancia (m)	**Tiempo (s)**
100	15
200	34
300	60
400	88

La tabla muestra el tiempo empleado por un estudiante para correr ciertas distancias.

Otra forma de representar esta información es mediante **pares ordenados:** (100, 15), (200, 34), (300, 60) y (400, 88). Cada par ordenado tiene dos componentes dadas en un orden específico. Las componentes están separadas por una coma y encerradas entre paréntesis en la forma (x, y).

➔ Una **relación** es un conjunto de pares ordenados.

Los números que componen una relación no tienen nada de especial. En otras palabras, cualquier grupo de números es una relación en tanto estos números vengan expresados como pares.

➔ El **dominio** es el conjunto formado por las primeras componentes (valores de x) de los pares ordenados.

El dominio de los pares ordenados mencionados anteriormente es $\{100, 200, 300, 400\}$.

Las llaves { } simbolizan "el conjunto de".

➔ El **recorrido** es el conjunto formado por las segundas componentes (valores de y) de los pares ordenados.

El recorrido de los pares ordenados mencionados anteriormente es $\{15, 34, 60, 88\}$.

Ejemplo 1

Halle el dominio y el recorrido de las siguientes relaciones:

a $\{(1,4), (2,7), (3,10), (4,13)\}$

b $\{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

Respuestas

a El dominio es $\{1, 2, 3, 4\}$	*Primeras componentes de los pares ordenados*
El recorrido es $\{4, 7, 10, 13\}$	*Segundas componentes de los pares ordenados*
b El dominio es $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ El recorrido es $\{0, 1, 4\}$	*No repetir valores aunque haya dos 4 y dos 1 en los pares ordenados*

➔ Una **función** es una relación matemática que asocia a cada elemento del dominio de la función exactamente un elemento del recorrido de la función. Para que una relación sea una función no puede haber dos pares ordenados que tengan la misma primera componente.

Ejemplo 2

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones?

a $\{(1,4), (2,6), (3,8), (3,9), (4,10)\}$

b $\{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9), (5,11)\}$

c $\{(-2,1), (-1,1), (0,2), (1,4), (2,6)\}$

Respuestas

a No es una función pues la componente 3 aparece dos veces en el dominio.	
b Es una función. Todas las primeras componentes son distintas.	
c Es una función. Todas las primeras componentes son distintas.	*Observe que no importa que algunos de los valores de* y *sean iguales.*

Ejercitación 1A

1 ¿Cuáles de estos conjuntos de pares ordenados son funciones?

a $\{(5,5), (4,4), (3,3), (2,2), (1,1)\}$

b $\{(-3,4), (-1,6), (0,5), (2,-1), (3,-1)\}$

c $\{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5)\}$

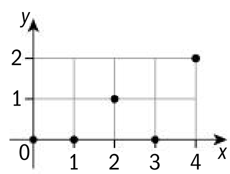
d $\{(-1,1), (0,3), (1,6), (1,7), (2,8)\}$

e $\{(-4,4), (-4,5), (-3,6), (-3,7), (-2,8)\}$

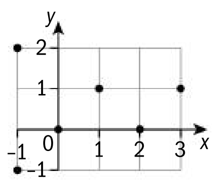
f $\{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2)\}$

2 Para cada diagrama, identifique el dominio y el recorrido y establezca si la relación es una función.

a



b



Escriba las coordenadas como pares ordenados.

3 Revea la tabla de la página 4 que muestra la cantidad de tiempo que emplea un estudiante en correr ciertas distancias. ¿Es la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado una función?

La prueba de la recta vertical

Se pueden representar relaciones y funciones en planos cartesianos. Es posible usar la prueba de la recta vertical para determinar si una relación particular es o no una función, mediante el trazado de rectas verticales que cruzan el gráfico.

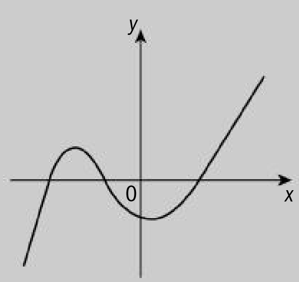
> ➔ Una relación es una función si cualquier recta vertical no corta al gráfico en más de un punto. Esta es la **prueba de la recta vertical**.

Las coordenadas y el plano cartesiano deben sus nombres al matemático francés René Descartes (1596–1650).

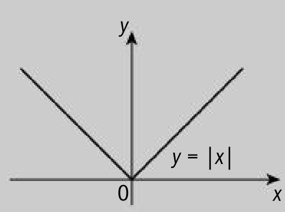
Ejemplo 3

¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones?

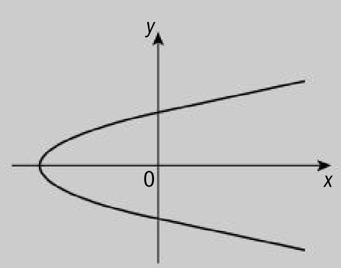
a



b



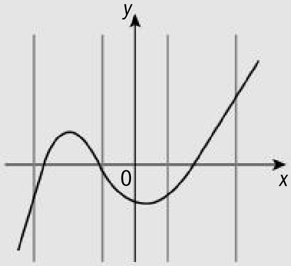
c



▶ Continúa en la página siguiente.

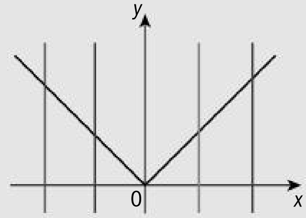
Respuestas

a



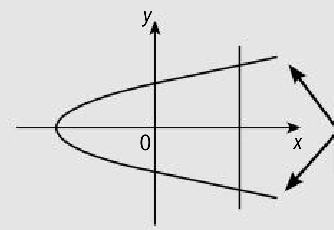
Es una función.

b



Es una función.

c



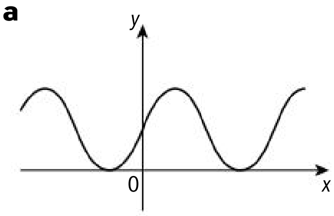
Corta dos veces.

No es una función.

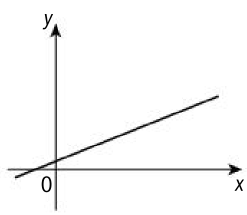
Ejercitación 1B

1 ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones?

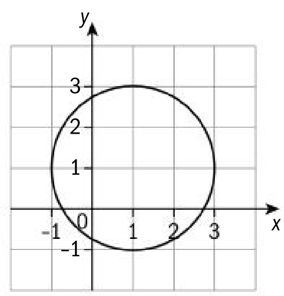
a



b

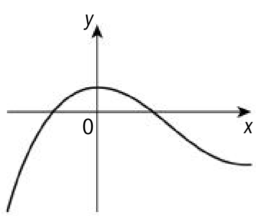


c

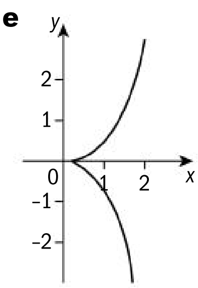


Trace o imagine rectas verticales en el gráfico.

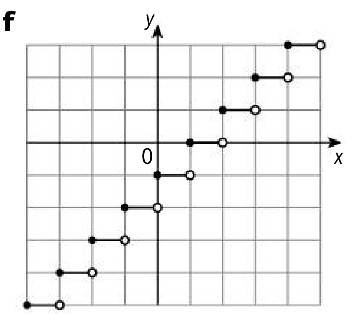
d



e

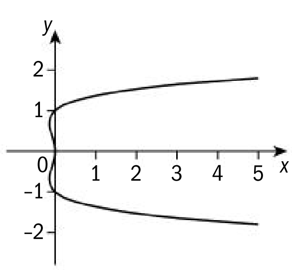


f

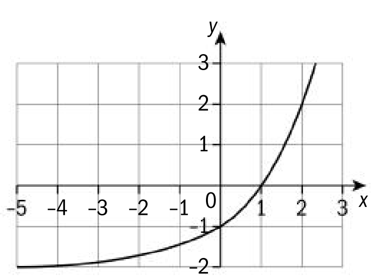


Si el gráfico tiene un "punto lleno" •, esto indica que el valor está incluido en la función. Si el gráfico tiene un "punto hueco" ∘, esto indica que el valor no está incluido en la función.

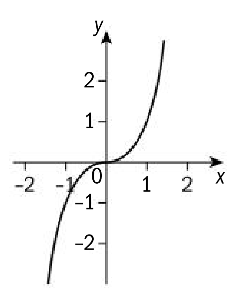
g



h



i



2 Use la CPG para dibujar aproximadamente los gráficos de las siguientes rectas.

a $y = x$ **b** $y = x + 2$ **c** $y = 2x - 3$ **d** $y = 4$

e ¿Representan todos ellos funciones? Explique su respuesta.

f ¿Serán todas las rectas funciones? ¿Por qué?

Indique en su gráfico dónde la recta corta al eje x y/o al eje y.

3 Dibuje aproximadamente la región $y < 3x - 2$. ¿Es esta una función? ¿Por qué?

4 Use un método algebraico para mostrar que $x^2 + y^2 = 4$ no es una función.

Cuando utilice la CPG procure que los extremos del gráfico estén cerca de las esquinas de la ventana de visualización.

Pruebe a sustituir valores positivos y negativos de x.

1.2 El dominio y el recorrido de una función en un plano cartesiano

El dominio y el recorrido de una función pueden escribirse mediante la notación de intervalos. Este es otro método de representación para escribir un conjunto de números. Por ejemplo, para el conjunto de todos los números que son menores que 3, podemos escribir la inecuación $x < 3$, donde x es un número en el conjunto.
En notación de intervalos, este conjunto de números se escribe $(-\infty, 3)$.
Para la notación de intervalos solo se requieren cinco símbolos:

Paréntesis	( )
Corchetes	[ ]
Infinito	∞
Menos infinito	$-\infty$
Unión	$\cup$

DOMINIO
RECORRIDO

▲ Una función es la aplicación del dominio (valores de x en el eje horizontal) en el recorrido (valores de y en el eje vertical).

Para usar la notación de intervalos:

➔ Usamos paréntesis (,) si el valor no está incluido en el gráfico, como en $(-\infty, 3)$, o cuando la función no está definida en ese punto (un punto no definido o **asíntota**, o un salto de discontinuidad).
Usamos corchetes [,] cuando el valor pertenece al gráfico de la función.

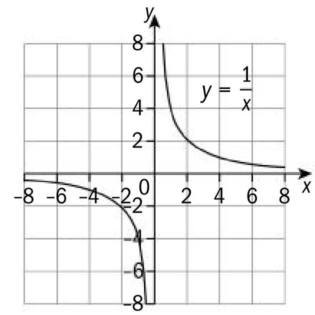
¿Cuántos números hay en la progresión 0, 1, 2, 3, 4, … si la continuamos indefinidamente? ¿Cuántos números hay en la progresión 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; … si la continuamos indefinidamente?

Cuando hay un corte en los valores, se escribe un intervalo para los valores hasta el punto de corte. Después se escribe otro intervalo para los valores a partir del punto de corte. Finalmente, se coloca el símbolo de unión entre los intervalos para "unirlos". Por ejemplo: $(-\infty, 3) \cup (4, \infty)$.

Si un gráfico continúa indefinidamente hacia la izquierda, el dominio (valores de x) comienza con $(-\infty$. Si continúa indefinidamente hacia la derecha, el dominio finaliza con $\infty)$. Si un gráfico continúa indefinidamente hacia abajo, el recorrido comienza con $(-\infty$. Si el gráfico continúa indefinidamente hacia arriba, el recorrido finaliza con $\infty)$.
Generalmente, usamos la notación de intervalos para describir un conjunto de valores a lo largo de los ejes x o y. Sin embargo, podemos usarla para describir cualquier conjunto de números. Por ejemplo, en notación de intervalos, $x \geq 6$ es $[6, \infty)$.

¿Por qué consideramos indefinido al infinito?

Asíntotas



Podemos visualizar las asíntotas para algunas funciones mediante la CPG. Una asíntota es una recta a la que el gráfico se acerca pero no corta. Por ejemplo, en el gráfico de $y = \frac{1}{x}$, la curva se aproxima al eje de las x ($y = 0$), pero nunca lo toca. A medida que tendemos a infinito, la curva nunca llegará a $y = 0$ pero siempre se aproximará más y más. El eje x o $y = 0$ se denomina asíntota horizontal.

El eje y o $x = 0$ es asíntota vertical por las mismas razones. Presentaremos un tratamiento más profundo sobre asíntotas en el capítulo referido a funciones racionales.

Al procedimiento de hallar las asíntotas mediante la observación del gráfico se le llama localización de asíntotas por simple inspección.

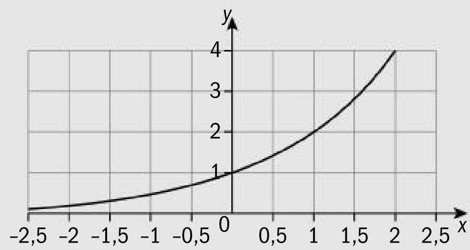
Ejemplo 4

Identifique, si existen, las asíntotas horizontales y verticales de estas funciones.

a $y = 2^x$ **b** $y = \dfrac{2x}{x+1}$ **c** $y = \dfrac{x+2}{(x+1)(x-2)}$

Respuestas

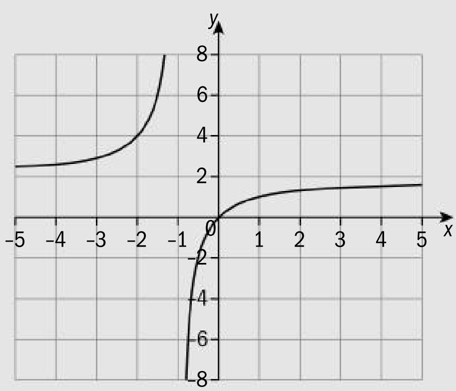
a



Asíntota horizontal $y = 0$

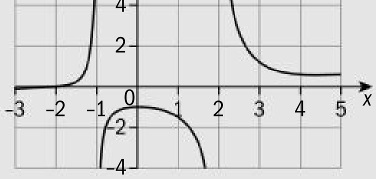
A medida que nos movemos hacia la izquierda sobre el eje x, la curva se acerca más y más pero nunca corta al eje x.

b



Asíntota horizontal $y = 2$
Asíntota vertical $x = -1$

c



Asíntota horizontal $y = 0$
Asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 2$

Ejercitación 1C

Identifique, si existen, las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

1 $y = 3^x$ **2** $y = \dfrac{3}{x}$ **3** $y = \dfrac{4}{x+1}$

4 $y = \dfrac{2x}{x+2}$ **5** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ **6** $y = \dfrac{6}{x^2-9}$

Definición por comprensión

Cuando definimos un conjunto por comprensión, usamos llaves { } y variables para expresar el dominio y el recorrido. Podemos caracterizar inecuaciones usando símbolos de desigualdades y otros símbolos.

Un tema interesante para explorar es el del "internacionalismo" de los símbolos en el lenguaje de la matemática.

El conjunto de	{ }
menor que	$<$
menor o igual que	$\leq$
mayor que	$>$
mayor o igual que	$\geq$
es un elemento del conjunto de los números reales	$\in \mathbb{R}$

➔ Definición por comprensión:

$\{x : x > 6\}$

El conjunto de | los valores de *x* | tales que | *x* es mayor que 6

A menudo se considera la notación de intervalos más eficiente que la definición por comprensión.

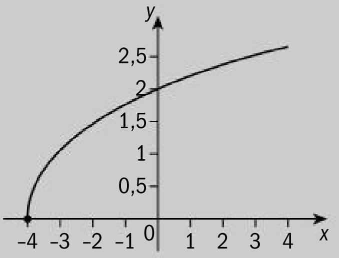
Notación de intervalos	Descripción	Definición por comprensión
$(-2, +\infty)$	*x* es mayor que -2	$\{x : x > -2\}$
$(-\infty, 4]$	*x* es menor o igual que 4	$\{x : x \leq 4\}$
$[-3, 3)$	*x* está comprendido entre -3 y 3 incluyendo a -3 pero no a 3	$\{x : -3 \leq x < 3\}$
$(-\infty, 5) \cup [6, +\infty)$	*x* es menor que 5 o mayor o igual que 6	$\{x : x < 5, x \geq 6\}$
$(-\infty, +\infty)$	*x* es cualquier número real	$x \in \mathbb{R}$

En distintas partes del mundo se utilizan diferentes palabras para nombrar el mismo símbolo. Por ejemplo, el corchete también se llama paréntesis angular. ¿En qué medida estas cuestiones afectan la comprensión? ¿Puede encontrar otros ejemplos?

Algunas personas emplean corchetes invertidos para indicar "mayor que" o "menor que". Por ejemplo:] 2, ∞ [es equivalente a $x > 2$, y $]-\infty, -4[$ es equivalente a $x < -4$.

Ejemplo 5

Halle el dominio y el recorrido de esta función.



Respuesta

El dominio de la función es $\{x: x \geq -4\}$ o $[-4, +\infty)$.

x toma valores mayores o iguales que −4.

El recorrido de la función es $\{y: y \geq 0\}$ o $[0, +\infty)$.

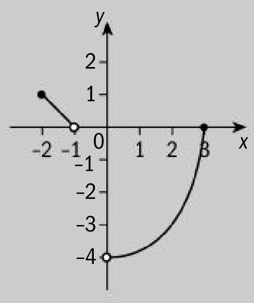
La función solo toma valores de y mayores o iguales que 0.

Un tema interesante para explorar es la influencia de la tecnología en la notación y viceversa.

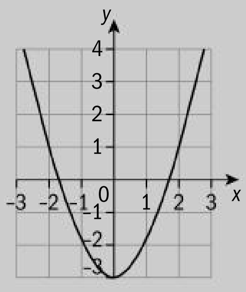
Ejemplo 6

Halle el dominio y el recorrido de cada función.

a



b



Respuestas

a El dominio es $\{x: -2 \leq x < -1$ o $0 < x \leq 3\}$ o $[-2, -1) \cup (0, 3]$.
El recorrido es $\{y: -4 < y \leq 1\}$ o $(-4, 1]$.

b El dominio de la función es $x \in \mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$.

x puede tomar cualquier valor real.

El recorrido de la función es $\{y: y \geq -3\}$ o $[-3, +\infty)$.

¿Qué valores incluye el dominio $0 \leq x \leq 1$? ¿Cuántos valores hay?

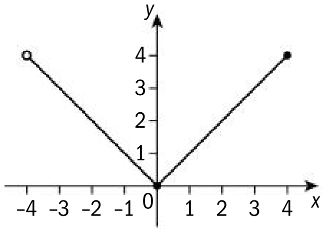
¿Usamos todos la misma notación en matemática? Nosotros simbolizaremos con un punto hueco el hecho de que $x = -1$ *no* pertenece al conjunto. Distintos países emplean notaciones diferentes para simbolizar esto mismo. Más aún, los profesores de un mismo país emplean diferentes notaciones.

Ejercitación 1D

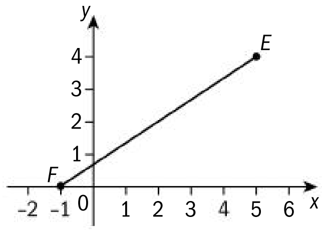
1 Revea la tabla y la fórmula de la página 4 para el número de saludos de mano para varios números de personas. ¿Es esta una función? Si fuera así, ¿cuál es el dominio y el recorrido?

2 Halle el dominio y el recorrido de cada una de estas relaciones:

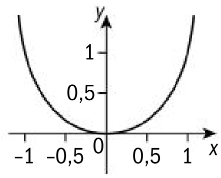
a



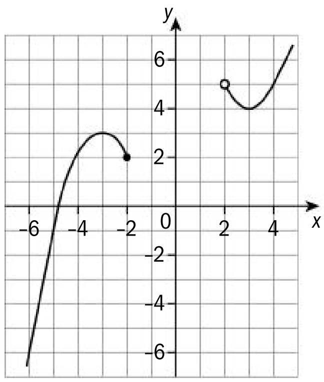
b



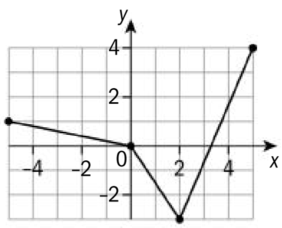
c



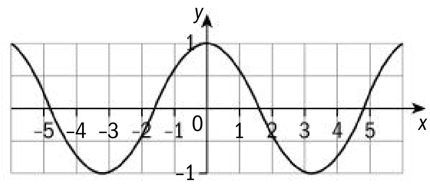
d



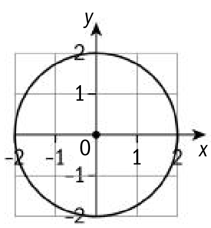
e



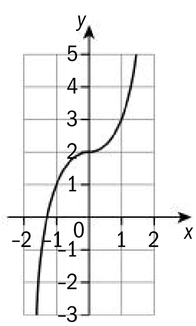
f



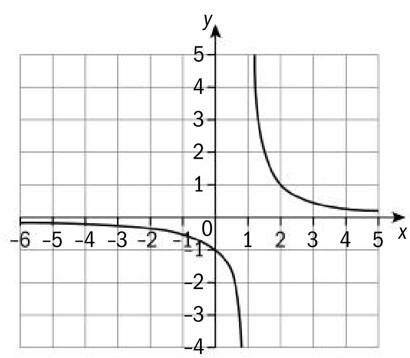
g



h



i



PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Use la CPG para dibujar aproximadamente estos gráficos. Escriba el dominio y el recorrido de cada función.

a $y = 2x - 3$ **b** $y = x^2$

c $y = x^2 + 5x + 6$ **d** $y = x^3 - 4$

e $y = \sqrt{x}$ **f** $y = \sqrt{4 - x}$

g $y = \dfrac{1}{x}$ **h** $y = e^x$

i $y = \dfrac{1}{x+2}$ **j** $y = \dfrac{x+4}{x-2}$

k $y = \dfrac{x^2 - 9}{x+3}$ **l** $y = \dfrac{2}{x^2+1}$

La calculadora hallará las intersecciones con los ejes *x* e *y*. Para hacer esto algebraicamente, tenemos en cuenta que una función corta al eje *x* cuando $y = 0$ y corta al eje *y* cuando $x = 0$. Por ejemplo, la función $y = 2x - 4$ corta al eje *x* donde $2x - 4 = 0$, $x = 2$. Corta al eje y donde $y = 2(0) - 4 = -4$.

3k tiene una respuesta inusual. Busque cuidadosamente un punto hueco cuando $x = -3$.

1.3 Notación funcional

Las funciones se definen usualmente por fórmulas. Por ejemplo, la fórmula $y = 2x + 1$ define a y como función de x. Al asignarle el símbolo f, la fórmula queda escrita en notación funcional de la forma $f(x) = 2x + 1$; por lo tanto, $y = f(x)$.

➔ $f(x)$ se lee 'f de x' y significa el valor de f en x.

$f(x)$ también se puede escribir así: $f : x \to 2x + 1$.
Un par ordenado (x, y) puede escribirise como $(x, f(x))$.
Hallar $f(x)$ para un valor particular de x significa evaluar la función f en ese valor.

$f : (x) \to 2x + 1$ significa que f es una función que asigna a x el valor $2x + 1$.

Ejemplo 7

a Evalúe la función $f(x) = 2x + 1$ en $x = 3$.
b Si $f(x) = x^2 + 4x - 3$, halle:
i $f(2)$ **ii** $f(0)$ **iii** $f(-3)$ **iv** $f(x + 1)$

Respuestas

a $f(3) = 2(3) + 1 = 7$ *Reemplazar x por 3*
b **i** $f(2) = (2)^2 + 4(2) - 3 = 4 + 8 - 3 = 9$
ii $f(0) = (0)^2 + 4(0) - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$
iii $f(-3) = (-3)^2 + 4(-3) - 3$
$= 9 - 12 - 3 = -6$
iv $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 4(x + 1) - 3$
$= x^2 + 2x + 1 + 4x + 4 - 3$
$= x^2 + 6x + 2$

El matemático y filósofo alemán Gottfried Leibniz usó por primera vez el término "función" en 1673.

Ejercitación 1E

1 Halle: **i** $f(7)$ **ii** $f(-3)$ **iii** $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **iv** $f(0)$ **v** $f(a)$
para estas funciones.
a $f(x) = x - 2$ **b** $f(x) = 3x$ **c** $f(x) = \frac{1}{4}x$
d $f(x) = 2x + 5$ **e** $f(x) = x^2 + 2$

2 Si $f(x) = x^2 - 4$, halle:
a $f(-a)$ **b** $f(a + 5)$ **c** $f(a - 1)$
d $f(a^2 - 2)$ **e** $f(5 - a)$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Si $g(x) = 4x - 5$ y $h(x) = 7 - 2x$
a Halle x cuando $g(x) = 3$.
b Halle x cuando $h(x) = -15$.
c Halle x cuando $g(x) = h(x)$.

4 **a** Si $h(x) = \frac{1}{x - 6}$, halle $h(-3)$.
b ¿Hay algún valor para el cual $h(x)$ no exista? Explique.

Observe que no siempre usamos la letra f para una función. Aquí hemos usado g y h. Cuando consideramos la velocidad en función del tiempo, muchas veces usamos $v(t)$.

5 El volumen de un cubo con aristas de medida x está dado por la función $f(x) = x^3$.

a Halle $f(5)$.

b Explique el significado de $f(5)$.

6 $g(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

a Evalúe:

i $g(6)$ **ii** $g(-2)$ **iii** $g(0)$ **iv** $g\left(-\frac{1}{3}\right)$

b Evalúe:

i $g(1)$ **ii** $g(1{,}5)$ **iii** $g(1{,}9)$ **iv** $g(1{,}99)$

v $g(1{,}999)$ **vi** $g(1{,}9999)$

c ¿Qué observa en sus respuestas al apartado **b**?

d ¿Hay algún valor de x para el cual $g(x)$ no exista?

e Obtenga un gráfico de la función en la CPG y observe qué ocurre cuando $x = 2$. Explique.

Podemos usar funciones matemáticas para representar hechos de nuestra propia vida. Por ejemplo, supongamos que el número de pizzas que come una familia depende del número de partidos de fútbol que miran. Si comen 3 pizzas durante cada partido de fútbol, la función sería “número de pizzas” (p) = 3 multiplicada por “número de partidos de fútbol” (g) o $p = 3g$. ¿Podemos pensar en alguna otra función que se emplee en la vida cotidiana? Podría ser quizás la suma total de dinero que gastamos o el número de minutos que hablamos por teléfono.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

7 La velocidad de una partícula está dada por $v(t) = t^2 - 9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a Halle la velocidad inicial.

b Halle la velocidad luego de 4 segundos.

c Halle la velocidad luego de 10 segundos.

d ¿En qué instante la partícula está en reposo?

La velocidad inicial significa la velocidad al comienzo, cuando $t = 0$.

La partícula está en reposo cuando $v = 0$.

8 Dada $f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ halle:

a $f(2 + h)$ **b** $f(3 + h)$

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 1: Polinomios*

1.4 Funciones compuestas

Una **función compuesta** es la combinación de dos funciones. Se aplica una función al resultado de otra.

➔ La composición de una función f con una función g se escribe como $f(g(x))$, que se lee “f de g de x”, o $(f \circ g)(x)$, que se lee “g compuesta con f de x”.

Cuando evaluamos una función sustituimos un valor u otra variable por x.

Por ejemplo, si $f(x) = 2x + 3$, entonces $f(5) = 2(5) + 3 = 13$

Podemos hallar $f(x^2 + 1)$ sustituyendo $x^2 + 1$ por x para obtener

$f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) + 3 = 2x^2 + 5$

➔ Una **función compuesta** aplica una función al resultado de otra y se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Ejemplo 8

Si $f(x) = 5 - 3x$ y $g(x) = x^2 + 4$, halle $(f \circ g)(x)$.	
Respuesta $(f \circ g)(x) = 5 - 3(x^2 + 4)$ $= 5 - 3x^2 - 12$ $= -3x^2 - 7$	*Sustituir $x^2 + 4$ en $f(x)$*

$g(x)$ va aquí

Podríamos tener que evaluar una función compuesta en un determinado valor de x.

Ejemplo 9

Si $f(x) = 5 - 3x$ y $g(x) = x^2 + 4$, halle $(f \circ g)(3)$.	
Respuesta *Método 1* $(f \circ g)(x) = 5 - 3(x^2 + 4)$ $= -3x^2 - 7$ $(f \circ g)(3) = -3(3)^2 - 7$ $= -27 - 7$ $= -34$ *Método 2* $g(3) = (3)^2 + 4 = 13$ $f(13) = 5 - 3(13) = -34$	 *Obtener la función compuesta* *Después, reemplazar x por 3* *Sustituir 3 en $g(x)$* *Sustituir ese valor en $f(x)$*

Ambos métodos arrojan el mismo resultado: puede usar el que prefiera.

Ejemplo 10

Dadas $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 2$, halle: **a** $(f \circ g)(x)$ **b** $(f \circ g)(4)$	
Respuestas **a** $(f \circ g)(x) = 2(x^2 - 2) + 1$ $= 2x^2 - 3$ **b** $(f \circ g)(4) = 2(4)^2 - 3 = 29$	 *Sustituir $x^2 - 2$ en $f(x)$* *Reemplazar x por 4*

O use el método 2:
$g(4) = (4)^2 - 2 = 14$
y luego
$f(14) = 2(14) + 1 = 29$

Ejercitación 1F

1 Dadas $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 1$ y $h(x) = x^2 + 2$, halle:

a $(f \circ g)(3)$	**b** $(f \circ g)(0)$	**c** $(f \circ g)(-6)$	**d** $(f \circ g)(x)$
e $(g \circ f)(4)$	**f** $(g \circ f)(5)$	**g** $(g \circ f)(-6)$	**h** $(g \circ f)(x)$
i $(f \circ h)(2)$	**j** $(h \circ f)(2)$	**k** $(f \circ h)(x)$	**l** $(h \circ f)(x)$
m $(g \circ h)(3)$	**n** $(h \circ g)(3)$	**o** $(g \circ h)(x)$	**p** $(h \circ g)(x)$

$(f \circ h)(2) \neq (h \circ f)(2)$

2 Dadas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x$, halle:

a $(g \circ f)(1)$ **b** $(g \circ f)(2)$ **c** $(g \circ f)(4)$ **d** $(f \circ g)(3)$

e $(g \circ f)(3)$ **f** $(f \circ g)(-4)$ **g** $(f \circ g)(x + 1)$ **h** $(f \circ g)(x + 2)$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, halle:

a $(f \circ g)(x)$ **b** $(f \circ g)(3)$

4 Dadas las funciones $f(x) = 5x$ y $g(x) = x^2 + 1$, halle:

a $(f \circ g)(x)$ **b** $(g \circ f)(x)$

5 $g(x) = x^2 + 3$ y $h(x) = x - 4$

a Halle $(g \circ h)(x)$.
b Halle $(h \circ g)(x)$.
c A partir de lo anterior, resuelva la ecuación $(g \circ h)(x) = (h \circ g)(x)$.

"A partir de lo anterior" significa que debemos utilizar los resultados obtenidos anteriormente para responder la pregunta.

6 Si $r(x) = x - 4$ y $s(x) = x^2$, halle $(r \circ s)(x)$ e indique el dominio y el recorrido de la función compuesta.

1.5 Funciones inversas

→ La **inversa** de una función $f(x)$ es $f^{-1}(x)$. Revierte la acción de esa función.

Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = \frac{x+4}{3}$, entonces

$f(10) = 3(10) - 4 = 26$ y $g(26) = \frac{26+4}{3} = 10$, con lo cual volvemos al punto de partida.

$(f \circ g)\,(10) = 10$

Por lo tanto, $g(x)$ es la inversa de $f(x)$.
No todas las funciones tienen una inversa.

Observe que f^{-1} significa la inversa de f; el "–1" no es un exponente (potencia).

Si g es la función inversa de f, entonces revertirá la acción de f para todos los valores en el dominio de f y f también será la inversa de g. Cuando f y g son funciones inversas, escribimos $g(x) = f^{-1}(x)$.

→ Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ resultan inversas una de otra si:

$(f \circ g)(x) = x$ para todos los valores de x en el dominio de g
$(g \circ f)(x) = x$ para todos los valores de x en el dominio de f

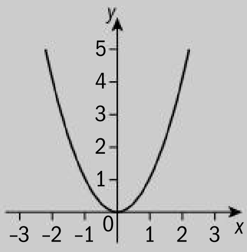
La prueba de la recta horizontal

→ Podemos usar la **prueba de la recta horizontal** para identificar funciones que tienen inversas.
Si una recta horizontal corta más de una vez al gráfico de una función, tal función no tiene inversa.

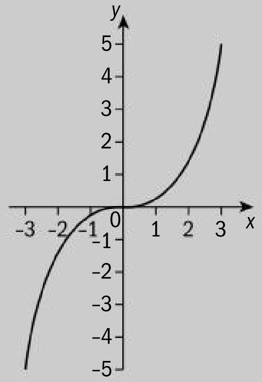
Ejemplo 11

¿Cuáles de estas funciones tienen inversa?

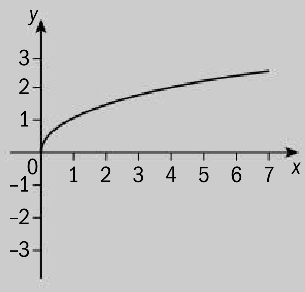
a



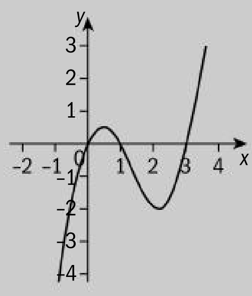
b



c

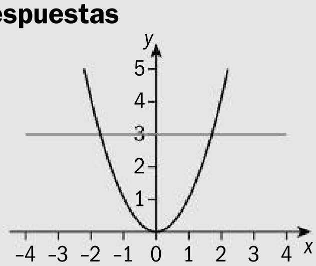


d



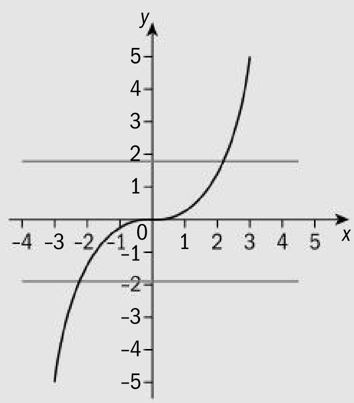
Respuestas

a



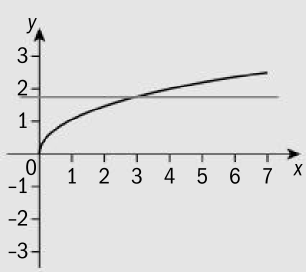
No tiene función inversa.

b



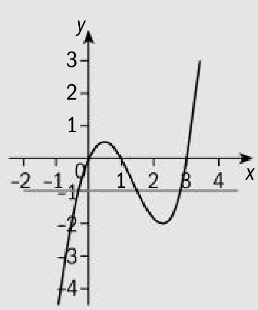
Tiene función inversa.

c

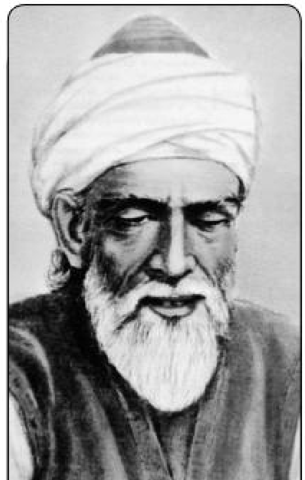


Tiene función inversa.

d



No tiene función inversa.

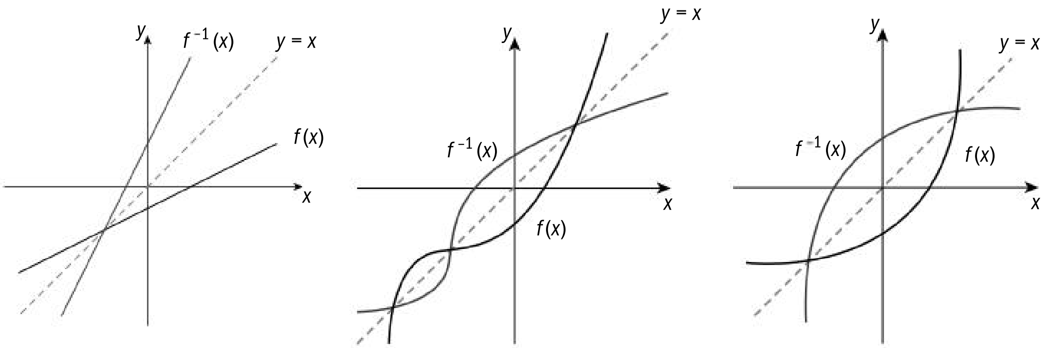


¿Sabía que Abu-al-Wafa Buzjani, un matemático persa del siglo X, usó funciones? Un cráter en la Luna lleva su nombre.

Gráficos de las funciones inversas

> ➔ El gráfico de la inversa de una función es una simetría de tal función respecto de la recta $y = x$.

Mostramos aquí algunos ejemplos de funciones y sus funciones inversas.

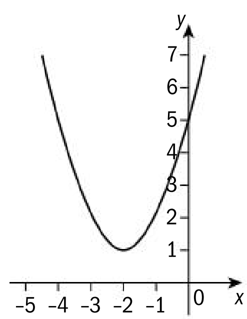


Si (x, y) pertenece a la curva $f(x)$, entonces (y, x) pertenece a $f^{-1}(x)$. La simetría respecto de la recta $y = x$ "intercambia" x e y; por lo tanto, la simetría respecto de la recta $y = x$ convierte al punto $(1, 3)$ en el punto $(3, 1)$.

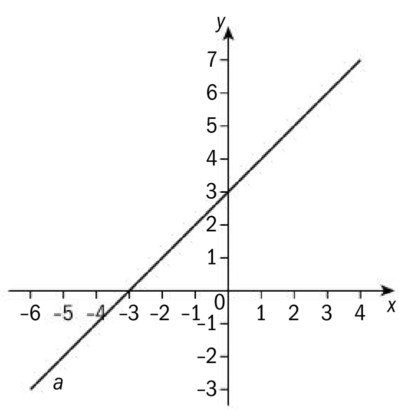
Ejercitación 1G

1 Use la prueba de la recta horizontal para determinar cuáles de las siguientes funciones tienen inversa.

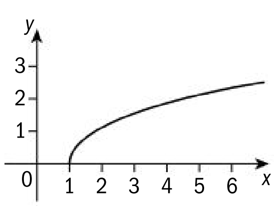
a



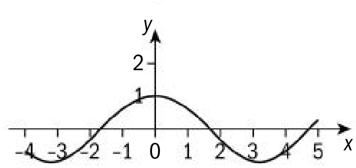
b



c



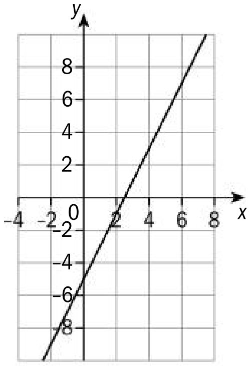
d



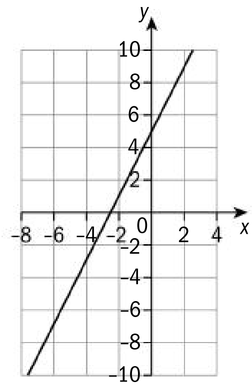
> En el siglo VI a. C., el científico hindú Panini fue un pionero al incluir funciones en sus trabajos.

2 Copie los gráficos de estas funciones. En cada uno de ellos, dibuje la recta $y = x$ y la función inversa.

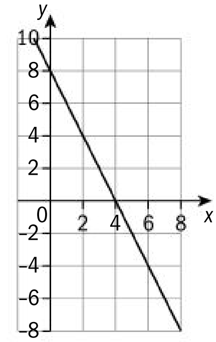
a



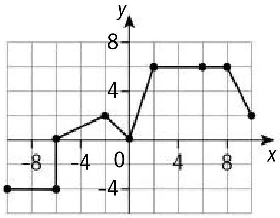
b



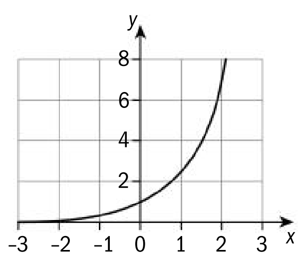
c



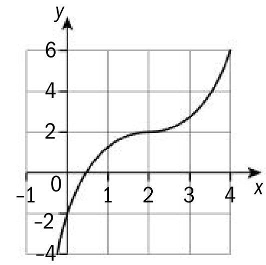
d



e



f



Determinación de la función inversa mediante procesos algebraicos

Observe cómo está formada la función $f(x) = 3x - 2$.
Comenzamos con x a la izquierda.

$$x \longrightarrow \boxed{\times 3} \longrightarrow \boxed{-2} \longrightarrow 3x - 2$$

Para formar la función inversa revertimos el proceso, usando operaciones inversas.

$$\frac{x+2}{3} \longleftarrow \boxed{\div 3} \longleftarrow \boxed{+2} \longleftarrow x$$

La operación inversa de $+2$ es -2.
La operación inversa de $\times 3$ es $\div 3$.

En consecuencia, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$

El próximo ejemplo muestra cómo hacerlo sin diagramas.

Ejemplo 12

Si $f(x) = 3x - 2$, halle la función inversa $f^{-1}(x)$.

Respuesta

$y = 3x - 2$	*Reemplazar f(x) por y*
$x = 3y - 2$	*Reemplazar cada x por y, y cada y por x*
$x + 2 = 3y$	
$y = \dfrac{x+2}{3}$	*Despejar y*
$f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$	*Reemplazar y por $f^{-1}(x)$*

Como se vio en los gráficos de funciones y sus inversas, el gráfico de la función inversa de una función f es la simetría de $y = f(x)$ respecto de la recta $y = x$, lo cual "intercambia" x e y. Por lo tanto, en el ejemplo 12, intercambiamos x e y, y despejamos y en la expresión obtenida.

➔ Para determinar algebraicamente la función inversa, reemplazamos $f(x)$ por y, y despejamos y.

Ejemplo 13

Si $f(x) = 4 - 3x$, halle $f^{-1}(x)$.

Respuesta

$y = 4 - 3x$	*Reemplazar f(x) por y*
$x = 4 - 3y$	*Reemplazar cada x por y, y cada y por x*
$x - 4 = -3y$	*Despejar y*
$\dfrac{x-4}{-3} = y$	
$y = \dfrac{4-x}{3}$	
$f^{-1}(x) = \dfrac{4-x}{3}$	*Reemplazar y por $f^{-1}(x)$*

Para comprobar si la función inversa en el ejemplo 13 es correcta, podemos componer las funciones.

$$(f \circ f^{-1})(x) = 4 - 3\left(\frac{4-x}{3}\right) = 4 - (4 - x) = x$$

En consecuencia, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y f y f^{-1} son la inversa una de otra.

➔ La función $I(x) = x$ se denomina función identidad.
La función deja a x invariable.
Por lo tanto, $f \circ f^{-1} = I$

Ejercitación 1H

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Si $f(x) = \dfrac{x+4}{2}$ y $g(x) = 2x - 4$, halle:

a **i** $g(1)$ y $(f \circ g)(1)$ **ii** $f(-3)$ y $(g \circ f)(-3)$
iii $(f \circ g)(x)$ **iv** $(g \circ f)(x)$

b ¿Qué le dice esto acerca de las funciones f y g?

2 Halle la inversa de cada una de estas funciones:

a $f(x) = 3x - 1$ **b** $g(x) = x^3 - 2$ **c** $h(x) = \frac{1}{4}x + 5$

d $f(x) = \sqrt[3]{x} - 3$ **e** $g(x) = \frac{1}{x} - 2$ **f** $h(x) = 2x^3 + 3$

g $f(x) = \dfrac{x}{3+x}, x \neq -3$ **h** $g(x) = \dfrac{2x}{5-x}, x \neq 5$

3 ¿Cuál es $f^{-1}(x)$ si:

a $f(x) = 1 - x$ **b** $f(x) = x$ **c** $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$

Existen funciones que tienen la propiedad de que su inversa coincide con la función original. Identifique estas funciones en la pregunta 3.

4 Evalúe $f^{-1}(5)$ en:

a $f(x) = 6 - x$ b $f(x) = \dfrac{10}{x+7}$ c $f(x) = \dfrac{2}{4x-3}$

5 Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ halle $f^{-1}(x)$.

Observe que la imagen del punto $(a, -b)$ luego de una simetría respecto de la recta $y = x$ es el punto $(b, -a)$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 a Construya una tabla de valores para la función $f(x) = 2^x$ y sitúe los puntos obtenidos, para luego dibujar el gráfico de f.

b Dibuje en el mismo gráfico la recta $y = x$.

c Dibuje el gráfico de f^{-1} mediante una simetría del gráfico de f respecto de la recta $y = x$.

d Indique el dominio y el recorrido de f y de f^{-1}.

7 La función $f(x) = x^2$ no tiene inversa. Sin embargo, la función $g(x) = \sqrt{x}$ sí tiene función inversa.
Halle esta función inversa.
Mediante la comparación del recorrido y el dominio, explique por qué la inversa de $g(x) = \sqrt{x}$ no coincide con $f(x) = x^2$.

8 Demuestre que los gráficos de una función lineal y su inversa nunca pueden resultar perpendiculares.

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 1: Polinomios*

1.6 Transformación de funciones

Investigación: funciones

Debe usar su CPG para dibujar todos los gráficos en esta investigación.

1 Dibuje $y = x$, $y = x + 1$, $y = x - 4$, $y = x + 4$ en el mismo sistema de ejes.
Compare y contraste sus funciones.
¿Qué efecto tienen los términos numéricos constantes en los gráficos de $y = x + b$?

También encontrará esta ecuación general de la recta escrita como $y = mx + b$ o $y = mx + c$.

2 Dibuje $y = x + 3$, $y = 2x + 3$, $y = 3x + 3$, $y = -2x + 3$, $y = 0{,}5x + 3$ en el mismo sistema de ejes.
Compare y contraste sus funciones.
¿Qué efecto produce cambiar los valores del coeficiente de x?

El coeficiente de x es el número que multiplica al valor de x.

3 Dibuje $y = |x|$, $y = |x + 2|$, $y = |x - 3|$ en el mismo sistema de ejes.
Compare y contraste sus funciones.
¿Qué efecto produce cambiar los valores de h en los gráficos de $y = |x + h|$?

$|x|$ significa módulo de x. Vea el capítulo 18 para una mayor explicación.

4 Dibuje $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = 2x^2$, $y = 0{,}5x^2$ en el mismo sistema de ejes.
Compare y contraste sus funciones.
¿Qué efecto produce el signo negativo en los gráficos?
¿Qué efecto produce cambiar el valor de a en los gráficos de $y = ax^2$?

En la investigación debería haber encontrado que los gráficos de los apartados 1, 2 y 3 tenían la misma forma, pero aparecían en diferentes posiciones. Los gráficos del apartado 4 deberían haber sido modificados por una simetría o por un estiramiento.

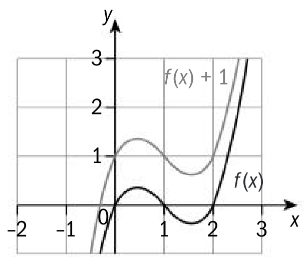
Estos son ejemplos de "transformaciones" de gráficos. Ahora estudiaremos estas transformaciones en detalle.

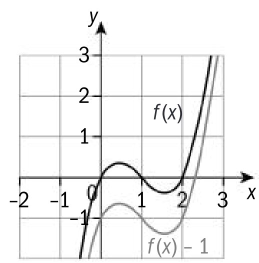
Traslaciones

Desplazamiento vertical u horizontal

➔ $f(x) + k$ desplaza a $f(x)$ verticalmente hacia arriba una distancia de k unidades.

➔ $f(x) - k$ desplaza a $f(x)$ verticalmente hacia abajo una distancia de k unidades.

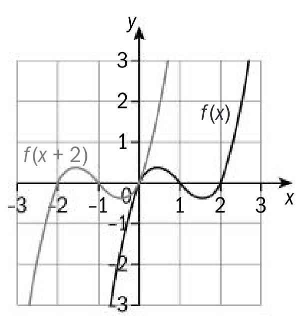


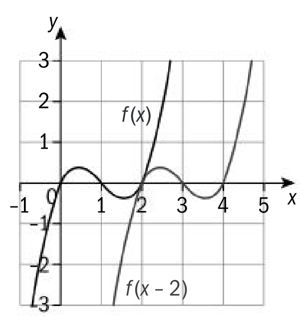


Desplazamiento hacia la derecha o la izquierda

➔ $f(x + k)$ desplaza a $f(x)$ horizontamente hacia la **izquierda** una distancia de k unidades, cuando $k > 0$.

➔ $f(x - k)$ desplaza a $f(x)$ horizontamente hacia la **derecha** una distancia de k unidades, cuando $k > 0$.





Las traslaciones se representan mediante vectores de la forma $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donde a es la componente horizontal y b la componente vertical.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un desplazamiento horizontal de 3 unidades hacia la derecha.

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ es un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia abajo.

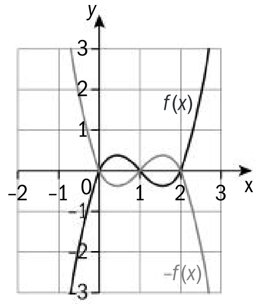
La traslación de vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ denota un desplazamiento horizontal de 3 unidades hacia la derecha, y un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia abajo.

Intente transformar algunas funciones para diferentes valores de k en su CPG.

Simetrías

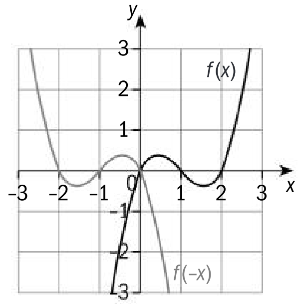
Simetría respecto del eje x

> ➔ $-f(x)$ es la simetría de $f(x)$ respecto del eje x.



Simetría respecto del eje y

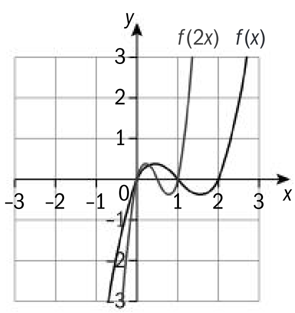
> ➔ $f(-x)$ es la simetría de $f(x)$ respecto del eje y.



Estiramientos

Estiramiento (o compresión) horizontal

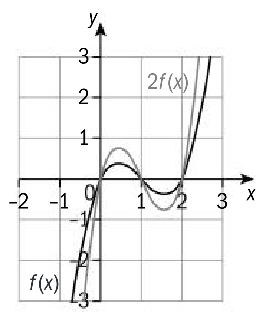
> ➔ $f(qx)$ estira o comprime horizontalmente a $f(x)$, con una razón de $\frac{1}{q}$.



La transformación es un **estiramiento horizontal de razón** $\frac{1}{q}$.
Cuando $q > 1$, el gráfico se comprime, acercándose al eje y.
Cuando $0 < q < 1$, el gráfico se estira, apartándose del eje y.

Estiramiento (o compresión) vertical

> ➔ $pf(x)$ estira verticalmente a $f(x)$, con una razón de p.



La transformación es un **estiramiento vertical de razón** p.
Cuando $p > 1$, el gráfico se estira, apartándose del eje x.
Cuando $0 < q < 1$, el gráfico se comprime, acercándose al eje x.

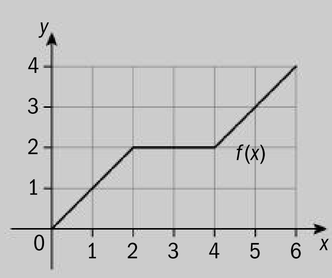
> Un estiramiento de razón p, donde $0 < p < 1$, hará que el gráfico se comprima.

> Los estudiantes suelen cometer errores con los estiramientos. Es importante recordar los diferentes efectos de, por ejemplo, $2f(x)$ y $f(2x)$.

Ejemplo 14

1 Dado el gráfico de la función $f(x)$ que aquí se muestra, dibuje aproximadamente los gráficos de:

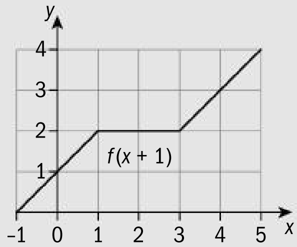
a $f(x+1)$ **b** $f(x) - 2$ **c** $f(-x)$ **d** $-f(x)$ **e** $2f(x)$



▶ Continúa en la página siguiente.

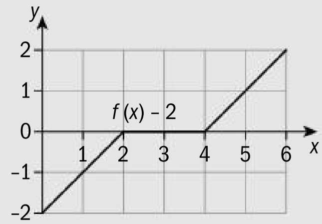
Respuestas

a



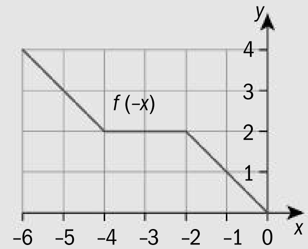
Traslación de una unidad hacia la izquierda

b



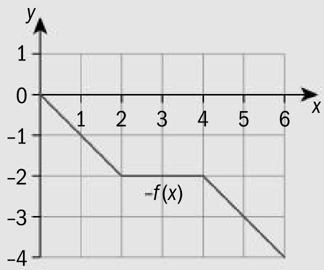
Traslación de dos unidades hacia abajo

c



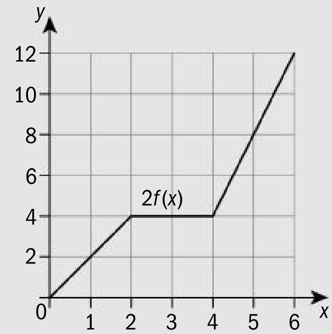
Simetría respecto del eje y

d



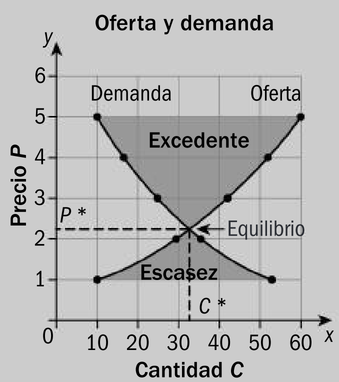
Simetría respecto del eje x

e

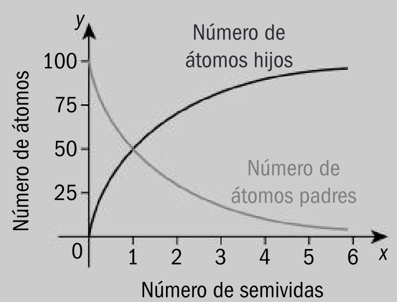


Estiramiento vertical de razón 2

Las curvas de oferta y demanda que se usan en economía y negocios son simétricas.

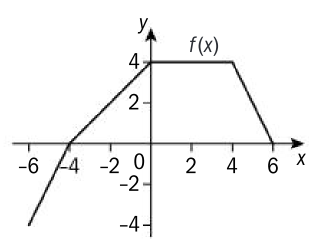


Las curvas de desintegración radiactiva son simétricas.



Ejercitación 1I

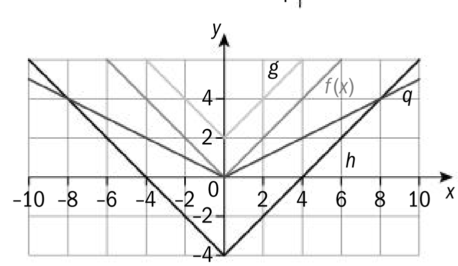
PREGUNTA TIPO EXAMEN



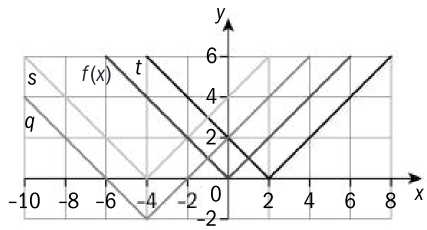
1 Copie el gráfico. Dibuje estas funciones en el mismo sistema de ejes cartesianos.

a $f(x) + 4$ **b** $f(x) - 2$ **c** $-f(x)$
d $f(x + 3)$ **e** $f(x - 4)$ **f** $2f(x)$
g $f(2x)$

2 Las funciones g, h y q son transformaciones de $f(x)$. Escriba cada transformación en función de $f(x)$.



3 Las funciones *q, s* y *t* son transformaciones de $f(x)$. Escriba cada transformación en función de $f(x)$.

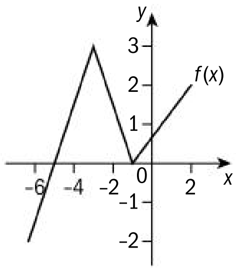


PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Copie el gráfico de $f(x)$. Dibuje el gráfico de cada una de estas funciones e indique el dominio y el recorrido de cada una de ellas.

a $2f(x-5)$

b $-f(2x)+3$

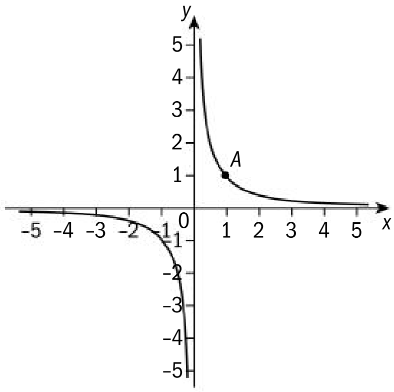


5 Se muestra el gráfico de $f(x)$. A es el punto $(1,1)$.
Realice copias del gráfico y dibuje la función después de aplicar cada transformación.
En cada gráfico, rotule la nueva posición de A como A_1.

a $f(x+1)$ **b** $f(x)+1$

c $f(-x)$ **d** $2f(x)$

e $f(x-2)+3$



6 En cada caso, describa la transformación que cambiaría el gráfico de $f(x)$ en el gráfico de $g(x)$.

a $f(x)=x^3,\quad g(x)=-(x^3)$

b $f(x)=x^2,\quad g(x)=(x-3)^2$

c $f(x)=x,\quad g(x)=-2x+5$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

7 Sea $f(x)=2x+1$.

a Dibuje el gráfico de $f(x)$ para $0 \le x \le 2$.

b Sea $g(x)=f(x+3)-2$. En el mismo gráfico, dibuje $g(x)$ para $-3 \le x \le -1$.

Si se indica un dominio en la pregunta, debe dibujar la función solamente para tal dominio.

Ejercicios de revisión

1 **a** Si $g(a)=4a-5$, halle $g(a-2)$.

b Si $h(x)=\frac{1+x}{1-x}$, halle $h(1-x)$.

2 **a** Evalúe $f(x-3)$ cuando $f(x)=2x^2-3x+1$.

b Para $f(x)=2x+7$ y $g(x)=1-x^2$, halle la función compuesta definida por $(f\circ g)(x)$.

3 Halle la inversa de estas funciones.

a $f(x) = \dfrac{3x+17}{2}$ **b** $g(x) = 2x^3 + 3$

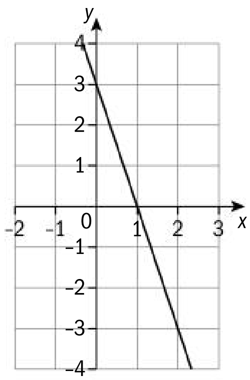
4 Halle la inversa de $f(x) = -\frac{1}{5}x - 1$. A continuación, dibuje la función y su inversa.

5 Halle las funciones inversas de:

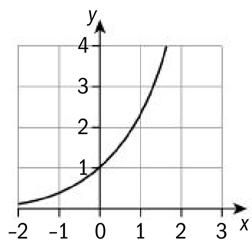
a $f(x) = 3x + 5$ **b** $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

6 Copie cada gráfico y dibuje la inversa de cada función.

a

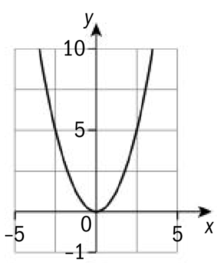


b

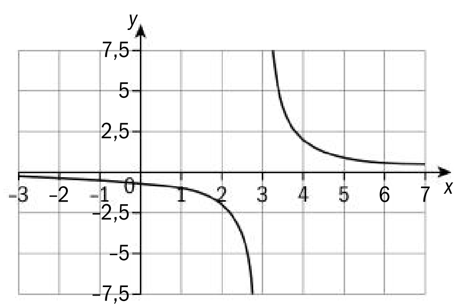


7 Halle el dominio y el recorrido para cada uno de estos gráficos.

a



b



PREGUNTA TIPO EXAMEN

8 Para cada función, escriba una única expresión que represente la combinación de transformaciones dadas.

a $f(x) = x$, simetría respecto del eje y, estiramiento vertical de razón 2, estiramiento horizontal de razón $\frac{1}{3}$ y traslación de 3 unidades hacia la izquierda y 2 hacia arriba.

b $f(x) = x^2$, simetría respecto del eje x, estiramiento vertical de razón $\frac{1}{4}$, estiramiento horizontal de razón 3 y traslación de 5 unidades hacia la derecha y 1 hacia abajo.

9 **a** Explique cómo dibujar la inversa de una función a partir de su gráfico.

b Dibuje la inversa de $f(x) = 2x + 3$.

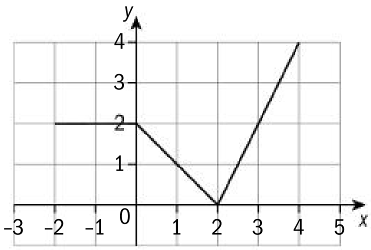
PREGUNTA TIPO EXAMEN

10 Sean $f(x) = 2x^3 + 3$ y $g(x) = 3x - 2$.

a Halle $g(0)$. **b** Halle $(f \circ g)(0)$. **c** Halle $f^{-1}(x)$.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

11 El gráfico muestra la función $f(x)$, para $-2 \leq x \leq 4$.



a Sea $h(x) = f(-x)$. Dibuje aproximadamente el gráfico de $h(x)$.

b Sea $g(x) = \frac{1}{2} f(x - 1)$. El punto $A(3, 2)$ en el gráfico de f se transforma en el punto P en el gráfico de g. Halle las coordenadas de P.

12 Las funciones f y g se definen como $f(x) = 3x$ y $g(x) = x + 2$.

a Halle una expresión para $(f \circ g)(x)$.

b Muestre que $f^{-1}(12) + g^{-1}(12) = 14$.

La instrucción "muestre que…" significa "obtenga el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba". En las preguntas de tipo "muestre que" generalmente no se emplea calculadora. Un buen método consiste en cubrir el lado derecho de la expresión y luego operar con el lado izquierdo hasta que el resultado concuerde con el lado derecho.

13 Sean $g(x) = 2x - 1$; $h(x) = \frac{3x}{x-2}$, $x \neq 2$

a Halle una expresión para $(h \circ g)(x)$. Simplifique su respuesta.

b Resuelva la ecuación $(h \circ g)(x) = 0$.

Ejercicios de revisión

1 Use la CPG para dibujar aproximadamente la función e indique el dominio y el recorrido de $f(x) = \sqrt{x+2}$.

2 Dibuje aproximadamente la función $y = (x + 1)(x - 3)$ e indique su dominio y recorrido.

3 Dibuje aproximadamente la función $y = \frac{1}{x+2}$ e indique su dominio y su recorrido.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 La función $f(x)$ se define como $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$.

a Dibuje aproximadamente la curva $f(x)$ para $-3 \leq x \leq 2$.

b Use la CPG como ayuda para escribir el valor de la intersección con el eje x y el eje y.

5 **a** Dibuje aproximadamente el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

b ¿Para qué valor de x no está definida $f(x)$?

c Indique el dominio y el recorrido de $f(x)$.

6 Dada la función $f(x) = \frac{2x-5}{x+2}$

a Escriba las ecuaciones de las asíntotas.

b Dibuje aproximadamente la función.

c Escriba las coordenadas de los puntos de intersección con ambos ejes.

7 Sea $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2$.

a Dibuje aproximadamente ambas funciones en un solo gráfico, para $-3 \leq x \leq 3$.

b Resuelva $f(x) = g(x)$.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

8 Sea $f(x) = x^3 - 3$.

a Halle la función inversa $f^{-1}(x)$.

b Dibuje aproximadamente $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo sistema de ejes.

c Resuelva $f(x) = f^{-1}(x)$.

9 $f(x) = e^{2x-1} + \dfrac{2}{x+1}$, $x \neq 1$.

Dibuje aproximadamente la curva de $f(x)$ para $-5 \leq x \leq 2$, incluidas todas las asíntotas.

10 Considere las funciones f y g donde $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x - 3$.

a Halle la función inversa, f^{-1}.

b Sabiendo que $g^{-1}(x) = x + 3$, halle $(g^{-1} \circ f)(x)$.

c Muestre que $(f^{-1} \circ g)(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

d Resuelva $(f^{-1} \circ g)(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$

Sea $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \neq 2$.

d **Dibuje aproximadamente** el gráfico de h para $-6 \leq x \leq 10$ e $-4 \leq y \leq 10$, incluidas todas las asíntotas.

e Escriba las **ecuaciones** de las asíntotas.

Cuando en los exámenes del IB aparecen palabras en negrita (como la palabra **ecuaciones** en el apartado e), significa que se debe hacer exactamente lo que se requiere. Por ejemplo, la respuesta debe darse como $x = 3$, y no como 3.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 1

Introducción a las funciones

- Una **relación** es un conjunto de pares ordenados.
- El **dominio** es el conjunto de todas las primeras componentes (valores de x) de los pares ordenados.
- El **recorrido** es el conjunto de las segundas componentes (valores de y) de cada par.
- Una **función** es una relación donde cada valor de x está relacionado con un único valor de y.
- Una relación es una función si toda recta vertical corta al gráfico solo una vez. A este procedimiento se lo conoce como **prueba de la recta vertical**.

El dominio y el recorrido de una relación en un plano cartesiano

Notación de intervalos:

Usamos paréntesis de apertura y cierre (,) si el valor no está incluido en el gráfico o cuando el gráfico no está definido en ese punto (un punto no definido o **asíntota**, o un salto de discontinuidad).

Usamos corchetes [,] si el valor pertenece al gráfico.

- Definición por comprensión:

$$\{ x : x < 6 \}$$

El conjunto de | los valores de x | tales que | x es menor que 6

Continúa en la página siguiente.

Notación funcional

- $f(x)$ se lee "f de x" y significa "el valor de la función f evaluada en x".

Funciones compuestas

- La función compuesta de la función f con la función g se escribe como $f(g(x))$, que se lee "f de g de x", o $(f \circ g)(x)$, que se lee "g compuesta con f de x"
- Una **función compuesta** aplica una función al resultado de otra y se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Funciones inversas

- La **inversa** de una función $f(x)$ es $f^{-1}(x)$ y revierte la acción de la función.
- Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ resultan inversas una de otra si:
  $(f \circ g)(x) = x$ para todos los valores de x en el dominio de g, y
  $(g \circ f)(x) = x$ para todos los valores de x en el dominio de f.
- Podemos usar la **prueba de la recta horizontal** para identificar funciones que tienen inversas. Si una recta horizontal corta a la función más de una vez, entonces la función no tiene inversa.

Los gráficos de las funciones inversas

- El gráfico de la inversa de una función es una simetría de dicha función respecto de la recta $y = x$.
- Para hallar la función inversa algebraicamente, reemplazamos $f(x)$ por y, y despejamos y.
- A la función $I(x) = x$ se la denomina función identidad. Deja invariables a los valores de x. Por lo tanto, $f \circ f^{-1} = I$.

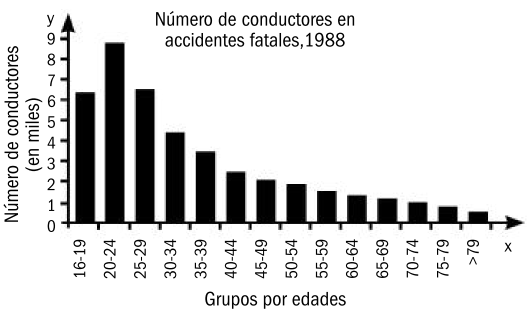
Transformaciones de funciones

- $f(x) + k$ desplaza a $f(x)$ verticalmente hacia arriba una distancia de k unidades.
- $f(x) - k$ desplaza a $f(x)$ verticalmente hacia abajo una distancia de k unidades.
- $f(x + k)$ desplaza a $f(x)$ horizontamente hacia la izquierda una distancia de k unidades, cuando $k > 0$.
- $f(x - k)$ desplaza a $f(x)$ horizontamente hacia la derecha una distancia de k unidades, cuando $k > 0$.
- $-f(x)$ es una simetría de $f(x)$ respecto del eje x.
- $f(-x)$ es una simetría de $f(x)$ respecto del eje y.
- $f(qx)$ es un estiramiento horizontal de $f(x)$ con una razón de $\frac{1}{q}$.
- $pf(x)$ es un estiramiento vertical de $f(x)$ con una razón de p.

La representación matemática

A la matemática se la representa visualmente en modelos, imágenes, números, líneas y gráficos de funciones y relaciones.

Cuando se muestra una representación visual, tales como los gráficos de esta página, antes de presentarla se ha decidido qué escala usar y qué información mostrar.



▲ Este gráfico sugiere que:

- Las personas de 16 años conducen de forma más segura que las de 20 años.
- Las personas de 80 años conducen de manera muy segura.

■ ¿Cree usted que estas afirmaciones son ciertas?

▲ Este gráfico relaciona el número de accidentes con la distancia recorrida por conductores de diferentes edades.

■ ¿Qué le dice el gráfico acerca de los conductores de 16 años y los de 75 años?

El informe *Monthly Labor Review* publicó esta información referida a los ingresos según el nivel educativo.

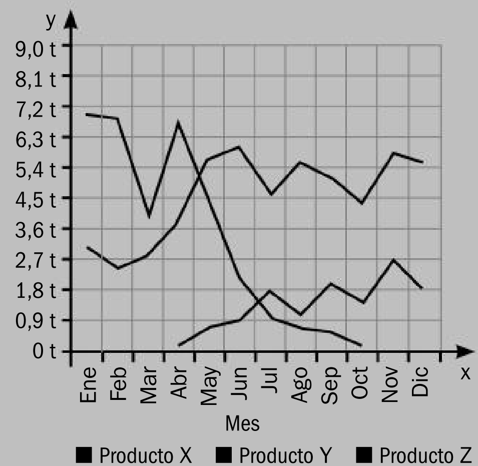
Ingresos según el nivel de educación 1996	
Nivel de educación alcanzado	**Mediana de los ingresos anuales (en dólares estadounidenses)**
Profesional	71 868
Doctorado	60 827
Maestría	46 269
Universitario	36 155
Secundario	23 317

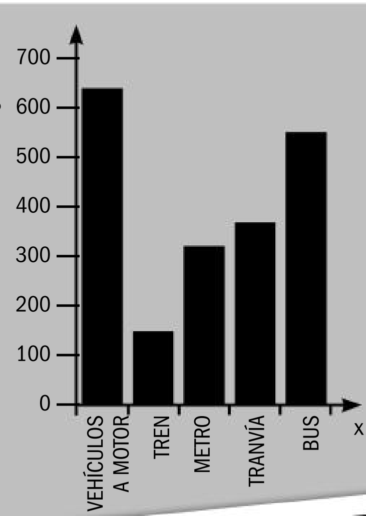
"Obtener un título universitario incrementará sus ingresos en casi USD13 000 por año".

■ ¿Es esta afirmación cierta?

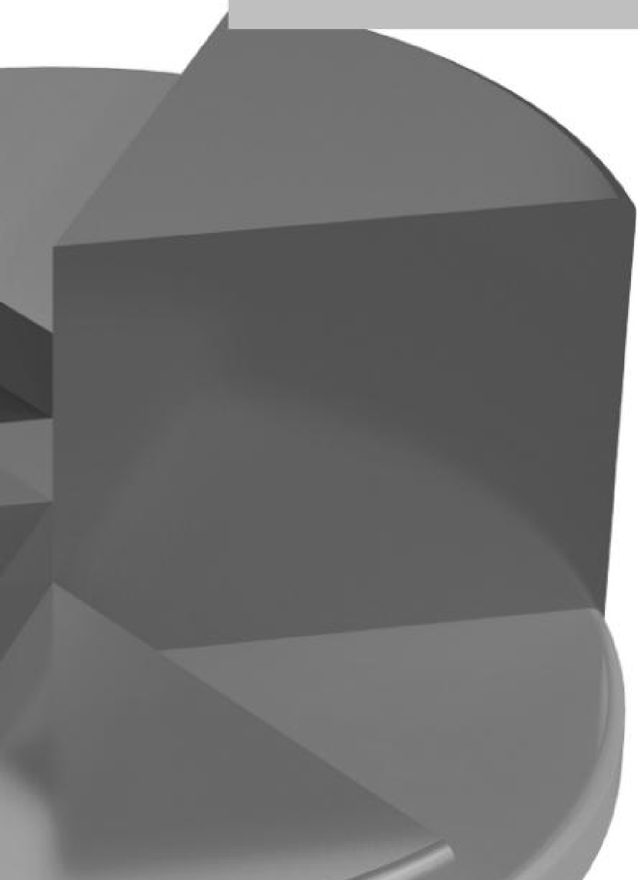
Precisión

- ¿Cuán útiles son los gráficos para transmitir información?
- ¿Cuán preciso puede ser un gráfico?
- ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de la interpolación y la extrapolación de los datos?





- ¿Cuán exactas resultan estas representaciones visuales?
  - Rayos X
  - Instantáneas
  - Pinturas



Redes

- ¿Qué es una red?
- ¿De qué modo se emplean en informática, planificación urbana, biología y asuntos militares?
- ¿En qué consisten las siguientes redes?
  - Redes de datos
  - Redes agrupadas
  - Redes de campus
  - Redes de mapeo

Una red de cómputos es "una infraestructura de hardware y software que brinda un acceso fiable, constante, generalizado y de bajo costo a capacidades informáticas de alta gama".

Foster y Kesselman, 1998

- ¿Existen computadores que no están conectados a una red?
- ¿Es un computador una red en sí mismo?

2 Funciones y ecuaciones cuadráticas

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

2.4 La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$: su gráfico, su vértice, intersecciones con el eje x y el eje y, ejes de simetría
La forma $x \mapsto a(x - p)(x - q)$, intersecciones con el eje x $(p, 0)$ y $(q, 0)$
La forma $x \mapsto a(x - h)^2 + k$, vértice (h, k)
2.7 Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$
2.7 La fórmula cuadrática
2.7 El discriminante y la naturaleza de las raíces
2.8 Aplicación de las habilidades de representación gráfica de funciones y de resolución de ecuaciones a situaciones de la vida real

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Resolver ecuaciones simples en una incógnita dada
Por ejemplo: Resolver en b:
$3b - 2 = 0$
$3b = 2,\ b = \frac{2}{3}$
Por ejemplo: Resolver la ecuación $n^2 + 3 = 5$:
$n^2 + 3 = 5$
$n^2 = 2,\ n = \pm\sqrt{2}$

2 Factorizar expresiones matemáticas
Por ejemplo: Factorizar $p^2 - 5p$:
$p(p - 5)$
Por ejemplo: Factorizar la expresión $ax - 3x + 2a - 6$:
$x(a - 3) + 2(a - 3)$
$(x + 2)(a - 3)$
Por ejemplo: Factorizar la expresión $x^2 - 3x - 10$: $(x + 2)(x - 5)$
Por ejemplo: Factorizar la expresión $4a^2 - 25$: $(2a + 5)(2a - 5)$

Comprobemos nuestras habilidades

1 Resuelva cada ecuación:
a $3a - 5 = a + 7$
b $4x^2 + 1 = 21$
c $3(n - 4) = 5(n + 2)$

2 Factorice cada expresión:
a $2k^2 - 10k$
b $14a^3 + 21a^2 - 49a$
c $2x^2 + 4xy + 3x + 6y$
d $5a^2 - 10a - ab + 2b$
e $n^2 + 4n + 3$
f $2x^2 - x - 3$
g $m^2 - 36$
h $25x^2 - 81y^2$

Este monumento conmemorativo de la segunda guerra mundial fue inaugurado en 2004 en Washington DC. Las fuentes del monumento dejan fluir aguas que forman hermosas trayectorias curvas.

La imagen de la derecha muestra un chorro de agua de un bebedero, que sigue una trayectoria similar. Las formas de las trayectorias curvas de estos chorros se denominan parábolas y pueden modelizarse mediante funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. A tales funciones se las denomina **funciones cuadráticas**.

Otras situaciones que pueden modelizarse mediante funciones cuadráticas incluyen el área de una figura y la altura de un objeto en caída libre en función del tiempo.

En este capítulo, estudiaremos cómo representar gráficamente funciones cuadráticas expresadas en forma polinómica, $f(x) = ax^2 + bx + c$; en forma canónica, $y = a(x - h)^2 + k$; y en forma factorizada, $f(x) = a(x - p)(x - q)$. Cada una de estas formas tiene su propia utilidad. Si quisiéramos saber la altura máxima alcanzada por el chorro de agua de un bebedero, deberíamos usar la forma canónica. Si quisiéramos encontrar las dimensiones de un rectángulo con una medida de área particular, la forma factorizada nos sería de mayor utilidad.

2.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas

Una ecuación que puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, se denomina **ecuación cuadrática**. Los siguientes son todos ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

$x^2 - 4x + 7 = 0$
$5x^2 = 3x - 2$
$2x(3x - 7) = 0$
$(x - 7)(2 - 5x) = 14x$

En esta sección, comenzaremos a resolver ecuaciones cuadráticas.

Algunas de estas ecuaciones no aparecen escritas en la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ pero pueden ser ordenadas de modo que tengan esa forma.

En un trinomio cuadrado $ax^2 + bx + c$, ax^2 es el término cuadrático, bx es el término lineal y c es el término constante.

Resolución por factorización

Antes de comenzar a resolver ecuaciones cuadráticas por factorización es importante comprender una propiedad fundamental:

➔ Si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.
Esta propiedad puede ser ampliada a:
Si $(x - a)(x - b) = 0$, entonces $x - a = 0$ o $x - b = 0$.

Usualmente se conoce esta propiedad como la **propiedad del producto nulo**.

Ejemplo 1

Resuelva estas ecuaciones por factorización.

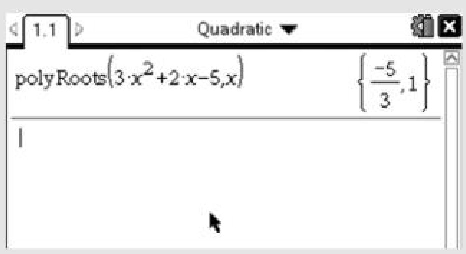
a $x^2 - 5x - 14 = 0$ **b** $3x^2 + 2x - 5 = 0$ **c** $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Respuestas

a $x^2 - 5x - 14 = 0$
$(x - 7)(x + 2) = 0$ *Factorizar la expresión en el miembro izquierdo de la ecuación*
$x - 7 = 0$ o $x + 2 = 0$ *Igualar cada factor a cero, usando la propiedad del producto nulo*
$x = 7$ $x = -2$
$x = -2$ o 7

b $3x^2 + 2x - 5 = 0$
$(3x + 5)(x - 1) = 0$ *Factorizar la expresión en el miembro izquierdo de la ecuación*
$3x + 5 = 0$ o $x - 1 = 0$ *Igualar cada factor a cero*
$x = -\frac{5}{3}$ $x = 1$
$x = -\frac{5}{3}, 1$

Puede también hallar las soluciones con su calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG). (Vea la sección 1.7 en el capítulo 17.)



c $4x^2 + 4x + 1 = 0$
$(2x + 1)(2x + 1) = 0$ *Cuando obtenemos el mismo factor dos veces, se trata de un cuadrado perfecto y solo habrá una solución. Usualmente decimos que esta ecuación tiene dos raíces* ***iguales****.*
$(2x + 1)^2 = 0$
$2x + 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$

Ejercitación 2A

En este ejercicio, resuelva todas las ecuaciones a mano y después verifique sus respuestas con una CPG.

1 Resuelva por factorización.

a $x^2 - 3x + 2 = 0$ **b** $a^2 + a - 56 = 0$ **c** $m^2 - 11m + 30 = 0$

d $x^2 - 25 = 0$ **e** $x^2 + 2x - 48 = 0$ **f** $b^2 + 6b + 9 = 0$

2 Resuelva por factorización.

a $6x^2 + 5x - 4 = 0$ **b** $5c^2 + 6c - 8 = 0$ **c** $2h^2 - 3h - 5 = 0$

d $4x^2 - 16x - 9 = 0$ **e** $3t^2 + 14t + 8 = 0$ **f** $6x^2 + x - 12 = 0$

Si una ecuación cuadrática no está escrita en la forma polinómica, $ax^2 + bx + c = 0$, deberemos reordenar los términos antes de factorizarla, tal como se muestra en el ejemplo 2.

Ejemplo 2

Resuelva estas ecuaciones por factorización.

a $8x^2 - 5 = 10x - 2$ **b** $x(x + 10) = 4(x - 2)$

Respuestas

a $8x^2 - 5 = 10x - 2$	*Agrupar todos los términos semejantes en un miembro de la ecuación*
$8x^2 - 10x - 3 = 0$	
$(4x + 1)(2x - 3) = 0$	
$4x + 1 = 0$ o $2x - 3 = 0$	*Factorizar y resolver en x*
$x = -\frac{1}{4}$ $\quad x = \frac{3}{2}$	
$x = -\frac{1}{4}$ o $\frac{3}{2}$	
b $x(x + 10) = 4(x - 2)$	*Desarrollar los paréntesis y agrupar los términos semejantes*
$x^2 + 10x = 4x - 8$	
$x^2 + 6x + 8 = 0$	*Factorizar y resolver en x*
$(x + 4)(x + 2) = 0$	
$x + 4 = 0$ o $x + 2 = 0$	
$x = -4$ $\quad x = -2$	
$x = -4, -2$	

Hace miles de años, los antiguos babilonios y egipcios estudiaron ecuaciones cuadráticas como estas para encontrar, por ejemplo, soluciones a problemas relacionados con el área de un rectángulo.

Ejercitación 2B

1 Resuelva por factorización.

a $x^2 + 2x - 7 = 13 + x$ **b** $2n^2 + 11n = 3n - n^2 - 4$

c $3z(z + 4) = -(z^2 + 9)$ **d** $2(a - 5)(a + 5) = 21a$

e $x + 5 = \frac{36}{x}$ **f** $2x - 1 = \frac{x + 1}{2x}$

2 Un número y su cuadrado difieren en 12. Halle el número.

Use "x" para representar el número y escriba una ecuación para resolver en x.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Los dos lados perpendiculares de un triángulo rectángulo miden $x + 2$ y $5x - 3$.
La hipotenusa mide $4x + 1$. Halle x.

Investigación: trinomios cuadrados perfectos

Resuelva estas ecuaciones por factorización.

1 $x^2 + 10x + 25 = 0$	**2** $x^2 + 6x + 9 = 0$
3 $x^2 + 14x + 49 = 0$	**4** $x^2 - 8x + 16 = 0$
5 $x^2 - 18x + 81 = 0$	**6** $x^2 - 20x + 100 = 0$

¿Qué nota de particular? Describa los patrones que reconozca en las ecuaciones cuadráticas originales.

Un trinomio es un polinomio con tres términos.
¿Por qué cree que a estos polinomios se les llama "trinomios cuadrados perfectos"?

Resolución por el procedimiento de completar cuadrados

Algunas ecuaciones cuadráticas no pueden resolverse por factorización, pero existen otros métodos que pueden usarse para resolverlas sin usar la CPG.

Tomemos la ecuación $x^2 + 14x + 49 = 0$ de la investigación anterior.
El miembro izquierdo de la ecuación es un cuadrado perfecto, porque tiene dos factores idénticos: $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)(x + 7) = (x + 7)^2$.

Para resolver la ecuación $x^2 + 14x + 49 = 0$, podríamos factorizar, lo cual nos daría la ecuación $(x + 7)^2 = 0$, que finalmente nos conduce a la solución $x = -7$.

¿Qué ocurriría si le pidiesen que resuelva la ecuación $x^2 + 14x + 49 = 5$?
Si se reagrupan los términos en el miembro izquierdo de la ecuación, se obtiene $x^2 + 14x + 44 = 0$, que no puede factorizarse fácilmente. Sin embargo, aún es posible obtener la solución exacta, tal como se muestra en el ejemplo 3.

Ejemplo 3

Resuelva estas ecuaciones sin emplear la CPG.

a $x^2 + 14x + 49 = 5$ **b** $x^2 - 6x + 9 = 6$

Respuestas

a $x^2 + 14x + 49 = 5$ $(x + 7)^2 = 5$	*Factorizar el trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo de la ecuación*
$x + 7 = \pm\sqrt{5}$	*Aplicar raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación*
$x = -7 \pm \sqrt{5}$	*x tiene dos soluciones:* $-7 + \sqrt{5}$ *y* $-7 - \sqrt{5}$.
b $x^2 - 6x + 9 = 6$ $(x - 3)^2 = 6$ $x - 3 = \pm\sqrt{6}$ $x = 3 \pm \sqrt{6}$	*Nuevamente, observamos que el miembro izquierdo de la ecuación es un trinomio cuadrado perfecto; por lo tanto, podemos usar el mismo método empleado en el apartado **a**.* *x tiene dos soluciones:* $3 + \sqrt{6}$ *y* $3 - \sqrt{6}$.

Las respuestas expresadas en forma de radicales son soluciones exactas.

En el ejemplo 3, las ecuaciones involucraban trinomios cuadrados perfectos. Se pueden usar trinomios cuadrados perfectos para resolver cualquier ecuación cuadrática por el método denominado de **completar cuadrados**.

➔ Para completar el cuadrado, calcule la mitad del coeficiente de x, elévela al cuadrado y sume el resultado a ambos miembros de la ecuación. Este paso permite crear un trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo de la ecuación.

Ejemplo 4

Resuelva cada ecuación completando el cuadrado.

a $x^2 + 10x = 6$ **b** $x^2 - 12x = 3$ **c** $x^2 - 3x - 1 = 0$

Respuestas

a $x^2 + 10x = 6$	*El coeficiente de x es 10; dividir por 2 (5) y elevar al cuadrado (25)*
$x^2 + 10x + 25 = 6 + 25$	
$(x + 5)^2 = 31$	*Completar el cuadrado sumando 25 a ambos miembros*
$x + 5 = \pm\sqrt{31}$	*Resolver en x*
$x = -5 \pm \sqrt{31}$	
b $x^2 - 12x = 3$	*El coeficiente de x es 12.*
$x^2 - 12x + 36 = 3 + 36$	*$12 \div 2 = 6$, $6^2 = 36$*
$(x - 6)^2 = 39$	*Completar el cuadrado*
$x - 6 = \pm\sqrt{39}$	*Resolver en x*
$x = 6 \pm \sqrt{39}$	
c $x^2 - 3x - 1 = 0$	*Sumar 1 a ambos miembros de la ecuación*
$x^2 - 3x = 1$	
$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$	*La mitad de 3 es $\frac{3}{2}$, y $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ es $\frac{9}{4}$.*
$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$	*Sumar $\frac{9}{4}$ a ambos miembros de la ecuación*
$x - \frac{3}{2} = \frac{\pm\sqrt{13}}{2}$	*Resolver en x*
$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$	

Hace más de mil años, los matemáticos hindúes y árabes desarrollaron métodos similares al de completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas. Estaban buscando soluciones a problemas matemáticos tales como "¿Cuál debe ser el cuadrado que, cuando se aumenta en 10 veces sus propias raíces, se obtiene 39?" Esto puede escribirse como $x^2 + 10x = 39$.

Ejercitación 2C

Resuelva por el procedimiento de completar el cuadrado.

1 $x^2 + 8x = 3$ **2** $x^2 - 5x = 3$ **3** $x^2 - 6x + 1 = 0$

4 $x^2 + 7x - 4 = 0$ **5** $x^2 - 2x - 6 = 0$ **6** $x^2 + x - 3 = 0$

➔ Para completar el cuadrado, el coeficiente del término en x^2 debe ser 1. Si el término en x^2 tiene un coeficiente distinto de 1, antes de completar el cuadrado, puede sacar ese coeficiente como factor común o dividir toda la expresión por ese coeficiente.

Ejemplo 5

Resuelva estas ecuaciones completando el cuadrado.

a $2x^2 + 8x = 6$ **b** $3x^2 - 15x = 2$

Respuestas

a
$$2x^2 + 8x = 6$$
$$x^2 + 4x = 3$$
Dividir ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de x^2, que es 2
$$x^2 + 4x + 4 = 3 + 4$$
$$(x + 2)^2 = 7$$
Completar cuadrados para resolver en x
$$x + 2 = \pm\sqrt{7}$$
$$x = -2 \pm\sqrt{7}$$

b
$$4x^2 - 20x = 5$$
$$4(x^2 - 5x) = 5$$
$$x^2 - 5x = \frac{5}{4}$$
Dividir toda la expresión por el coeficiente de x^2, que es 4
$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{5}{4} + \frac{25}{4}$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$
La mitad de 5 es $\frac{5}{2}$, y $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ es $\frac{25}{4}$.
$$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$$
$$x = \frac{5}{2} \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$$
La respuesta puede escribirse también como $x = \frac{5 \pm \sqrt{30}}{2}$.

Abu Kamil Shuja (*c*. 850–*c*. 930), también conocido como al-Hasib al-Misri, que significa “la calculadora de Egipto”, fue uno de los primeros en introducir en el álgebra los símbolos para potencias, tales como $x^m\, x^n = x^{m+n}$.

Ejercitación 2D

Resuelva por el procedimiento de completar el cuadrado.

1 $2x^2 + 12x = 6$ **2** $3x^2 - 6x = 3$

3 $5x^2 - 10x + 2 = 0$ **4** $4x^2 + 6x - 5 = 0$

5 $2x^2 - x - 6 = 0$ **6** $10x^2 + 4x - 5 = 0$

2.2 La fórmula cuadrática

Sabemos que una ecuación cuadrática puede escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Supongamos que queremos resolver esta ecuación cuadrática general usando el procedimiento de completar el cuadrado.

Tendríamos:
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = -c$$
Reste c de ambos miembros de la ecuación.
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$
Divida ambos miembros de la ecuación por *a*.
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
La mitad de $\frac{b}{a}$ es $\frac{b}{2a}$. Elevando al cuadrado obtenemos $\frac{b^2}{4a^2}$.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Este procedimiento nos da una fórmula muy útil que puede utilizarse para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Esta fórmula aparece en el cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NM del IB; por lo tanto, no tiene que memorizarla.

→ **La fórmula cuadrática**

Para cualquier ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 6

Resuelva cada ecuación usando la fórmula cuadrática.

a $x^2 + 4x - 6 = 0$ **b** $2x^2 - 3x = 7$ **c** $3x^2 = 7x + 6$

Respuestas

a $x^2 + 4x - 6 = 0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(-6)}}{2(1)}$$

Usar la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = 4$ y $c = -6$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{2}$$

Esta respuesta es correcta pero puede simplificarse más.

$$x=\frac{-4\pm2\sqrt{10}}{2}=-2\pm\sqrt{10}$$

b $2x^2 - 3x = 7$

$2x^2 - 3x - 7 = 0$

Primero escribir la ecuación en la forma polinómica, $ax^2 + bx + c = 0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(-7)}}{2(2)}$$

Usar la fórmula cuadrática con $a = 2$, $b = -3$ y $c = -7$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{65}}{4}$$

c $3x^2 = 7x + 6$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$

Primero escribir la ecuación en la forma polinómica, $ax^2 + bx + c = 0$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4(3)(-6)}}{2(3)}$$

Usar la fórmula cuadrática con $a = 3$, $b = -7$ y $c = -6$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{121}}{6}=\frac{7\pm11}{6}$$

$$x=-\frac{2}{3}, 3$$

Ejercitación 2E

Resuelva estas ecuaciones usando la fórmula cuadrática.

1 $4x^2 + 9x - 7 = 0$

2 $3x^2 + 2x - 8 = 0$

3 $5x^2 + 6x + 1 = 0$

4 $x^2 - 6x = -4$

5 $x^2 = x - 3$

6 $3x^2 + 10x = 5$

7 $2x^2 - 3x = 1$

8 $2x^2 = 9x + 4$

9 $\frac{6}{x} - 2x = 9$

10 $\frac{x+3}{5x-2} = \frac{x}{x+1}$

Ejemplo 7

La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 613.
Halle los dos números enteros.

Respuesta

$x^2 + (x + 1)^2 = 613$

Primero, es necesario escribir una ecuación.

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 613$

$2x^2 + 2x - 612 = 0$

Sea x el número entero menor y x + 1 el entero consecutivo. Desarrollamos los paréntesis y agrupamos términos semejantes.

$x^2 + x - 306 = 0$

Dividimos por 2.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-306)}}{2(1)}$$

La ecuación cuadrática podría también resolverse por factorización o completando el cuadrado.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-1 \pm 35}{2}$$

$x = -18$ o 17

Dado que hay dos valores para x, habrá dos valores para x + 1.

Los dos enteros son −18 y −17, o 17 y 18.

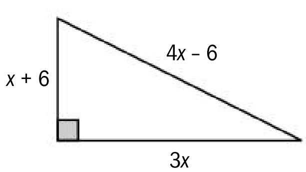
Hay dos posibles pares de números enteros consecutivos.

Ejercitación 2F

1 La suma de dos números es 50 y su producto es 576. Halle los números.

2 El perímetro de un rectángulo es de 70 m y su área es 264 m^2. Halle el largo y el ancho del rectángulo.

3 Halle el valor de x en el diagrama.



PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Un rectángulo tiene un largo de 23 cm y un ancho de 16 cm. Si se reduce el largo x cm y se aumenta el ancho x cm, el área del nuevo rectángulo es 378 cm^2. Halle las dimensiones del nuevo rectángulo.

5 La fórmula $h = 2 + 14t - 4{,}9t^2$ proporciona la altura, h metros, que alcanza una pelota t segundos después de haber sido lanzada. ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire?

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 2: Dos ecuaciones cuadráticas aún más difíciles*

2.3 Raíces de ecuaciones cuadráticas

Investigación: raíces de ecuaciones cuadráticas

1 Resuelva estas ecuaciones usando la fórmula cuadrática.
a $x^2 - 8x + 16 = 0$ **b** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **c** $25x^2 + 10x + 1 = 0$

2 Resuelva estas ecuaciones usando la fórmula cuadrática.
a $x^2 + 5x - 14 = 0$ **b** $3x^2 - 8x + 2 = 0$ **c** $5x^2 - 3x - 4 = 0$

3 Resuelva estas ecuaciones usando la fórmula cuadrática.
a $x^2 + 3x + 6 = 0$ **b** $2x^2 - 4x + 5 = 0$ **c** $4x^2 + 2x + 1 = 0$

4 ¿Qué patrones encontró en las soluciones de las ecuaciones de las preguntas **1**, **2** y **3**? ¿Por qué cree que sucede esto?

Ahora observemos nuevamente la fórmula cuadrática usada para resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos proporcionará las raíces de una ecuación cuadrática. Una parte de la fórmula cuadrática, el **discriminante**, nos informará acerca de la naturaleza de las raíces de la ecuación, incluso, sin darnos la solución. El discriminante es la parte de la fórmula cuadrática que figura bajo el signo del radical (raíz cuadrada), $b^2 - 4ac$. Usualmente usamos el símbolo "$\triangle$" para representar el discriminante.

➔ Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$,
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tendrá dos raíces reales distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tendrá dos raíces reales iguales.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tendrá raíces reales.

Podemos considerar que una ecuación con dos raíces reales iguales tiene una sola solución.

Ejemplo 8

Use el discriminante para determinar la naturaleza de las raíces de cada ecuación.

a $9x^2 + 6x + 1 = 0$

b $3x - 5 = \frac{4}{x}$

Respuestas

a $9x^2 + 6x + 1 = 0$

Esta es una ecuación cuadrática con $a = 9$, $b = 6$ y $c = 1$.

$\triangle = 6^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 = 0$

Calcular el discriminante

La ecuación tendrá dos raíces iguales.

Discriminante = 0 implica dos raíces iguales.

b $3x - 5 = \frac{4}{x}$

$3x^2 - 5x = 4$

$3x^2 - 5x - 4 = 0$

Primero, llevamos la ecuación a la forma polinómica. Multiplicamos por x ambos miembros, luego restamos 4 de ambos miembros.

$\triangle = (-5)^2 - 4(3)(-4)$

$= 25 + 48 = 73$

Recuerde: $\triangle = b^2 - 4ac$.

Esta ecuación tendrá dos raíces reales distintas.

$\triangle > 0$ significa dos raíces reales distintas.

Ejemplo 9

Halle el valor o los valores de k para los cuales la ecuación $2x^2 - kx + 3 = 0$ tiene dos raíces reales distintas.

Respuesta

$b^2 - 4ac > 0$

$(-k)^2 - 4(2)(3) > 0$

Para que la ecuación tenga dos raíces distintas, se necesita que $\triangle > 0$.

$k^2 - 24 > 0$

$k^2 > 24$

$|k| > \sqrt{24}$

$|k| > 2\sqrt{6}$

$k > 2\sqrt{6}$ o $k < -2\sqrt{6}$

Puede usar el valor absoluto cuando opere con la raíz cuadrada en una desigualdad.

Para más información acerca del valor absoluto, vea la sección 2.7 del capítulo 18.

Ejercitación 2G

1 Halle el valor del discriminante e indique la naturaleza de las raíces para cada ecuación.

a $x^2 + 5x - 3 = 0$ **b** $2x^2 + 4x + 1 = 0$

c $4x^2 - x + 5 = 0$ **d** $x^2 + 8x + 16 = 0$

e $x^2 - 3x + 8 = 0$ **f** $12x^2 - 20x + 25 = 0$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Halle los valores de p para los cuales las ecuaciones tienen dos raíces reales distintas.

a $x^2 + 4x + p = 0$ **b** $px^2 + 5x + 2 = 0$

c $x^2 + px + 8 = 0$ **d** $x^2 + 3px + 1 = 0$

3 Halle los valores de k para los cuales las ecuaciones tienen dos raíces reales iguales.

a $x^2 + 10x + k = 0$ **b** $2x^2 - 3x + k = 0$

c $3x^2 - 2kx + 5 = 0$ **d** $x^2 - 4kx - 3k = 0$

4 Halle los valores de m para los cuales las ecuaciones no tienen raíces reales.

a $x^2 - 6x + m = 0$ **b** $x^2 + 5mx + 25 = 0$

c $3mx^2 - 8x + 1 = 0$ **d** $x^2 + 6x + m - 3 = 0$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 Halle los valores de q para los cuales la ecuación cuadrática $qx^2 - 4qx + 5 - q = 0$ no tiene raíces reales.

Investigación: gráficos de funciones cuadráticas

Cada una de las siguientes funciones está dada en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Para cada función:

i Halle el valor de $b^2 - 4ac$.

ii Obtenga el gráfico de la función en su CPG.

a $y = x^2 - 3x - 5$ **b** $y = 3x^2 - 6x + 4$

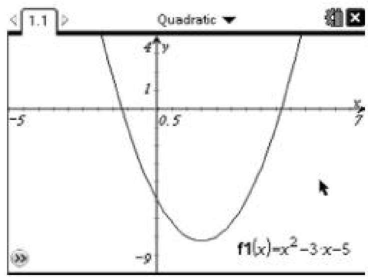
c $y = x^2 + 2x + 7$ **d** $y = 4x^2 + 3x + 5$

e $y = x^2 - 6x + 9$ **f** $y = 2x^2 - 4x + 2$

g $y = -x^2 + 5x + 2$ **h** $y = x^2 + 7x + 3$

¿Qué le sugieren estos ejemplos sobre la relación entre el valor del discriminante y el gráfico de la función cuadrática?

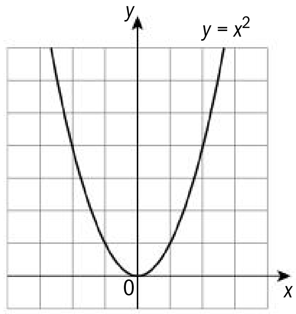
Si necesita ayuda para obtener el gráfico de funciones cuadráticas en una CPG, vea la sección 1.6 en el capítulo 17.



2.4 Gráficos de funciones cuadráticas

Una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, o $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, se denomina función cuadrática. En esta sección, veremos gráficos de funciones cuadráticas.

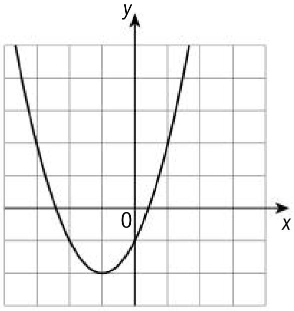
La forma más simple de una función cuadrática es $y = x^2$. Mostramos su gráfico.



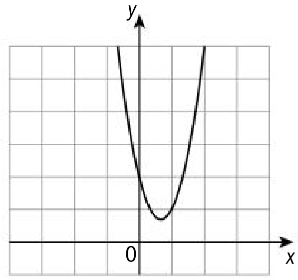
Este gráfico tiene un mínimo en el punto (0, 0), y es simétrico respecto del eje y.

Si observamos los gráficos de otras funciones cuadráticas, deberíamos notar algunas similitudes.

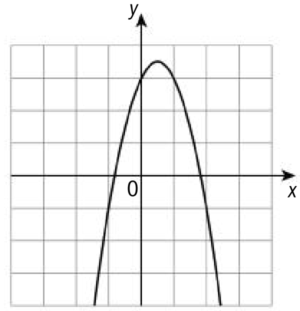
$y = x^2 + 2x - 1$



$y = 3x^2 - 4x + 2$



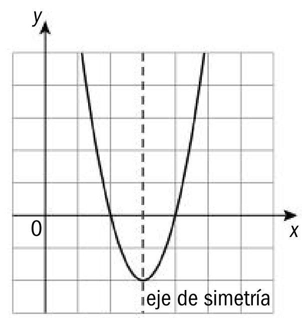
$y = -2x^2 + 2x + 3$



Cada uno de estos gráficos presenta una figura curva conocida como **parábola**. Cada gráfico tiene además un punto máximo o un punto mínimo llamado **vértice**.

Si el coeficiente de x^2 es positivo, la parábola se abrirá hacia arriba, con el vértice como el punto mínimo del gráfico.

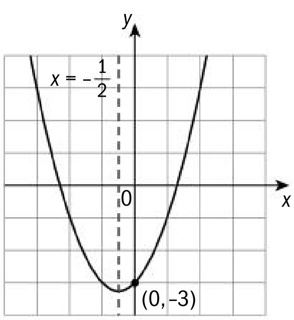
Si el coeficiente de x^2 es negativo, la parábola se abrirá hacia abajo y el vértice será un punto máximo.



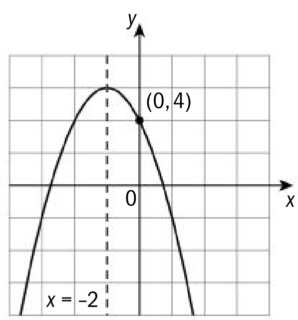
Si imaginamos una recta vertical que pase por el vértice, notaremos que el gráfico es simétrico a la derecha y a la izquierda respecto de esa recta. A esta recta vertical imaginaria se la denomina **eje de simetría**. El eje de simetría se muestra con una línea punteada en este gráfico.

Ahora veremos diferentes formas de funciones cuadráticas. Consideremos los gráficos de estas funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx + c$:

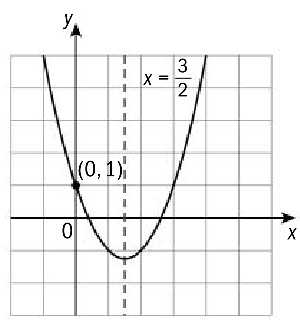
$y = x^2 + x - 3$



$y = -0{,}5x^2 - 2x + 4$



$y = x^2 - 3x + 1$



➔ Para las funciones cuadráticas en forma polinómica $y = ax^2 + bx + c$, el gráfico corta al eje y en $(0, c)$.

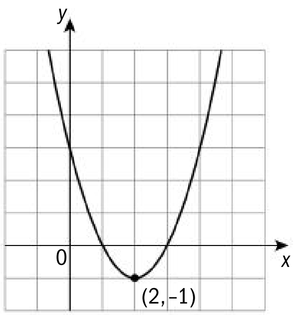
La ecuación del eje de simetría es $x = \dfrac{-b}{2a}$.

➔ Cuando la función cuadrática básica $y = x^2$ sufre transformaciones, las funciones resultantes pueden escribirse como $y = a(x - h)^2 + k$.

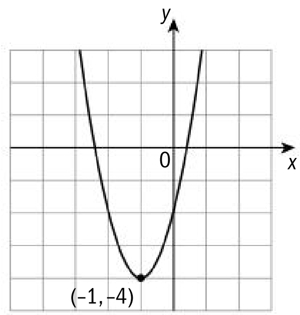
Posiblemente quiera revisar la sección sobre transformaciones de gráficos en el capítulo 1 de este libro.

Observemos los gráficos de estas funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - h)^2 + k$:

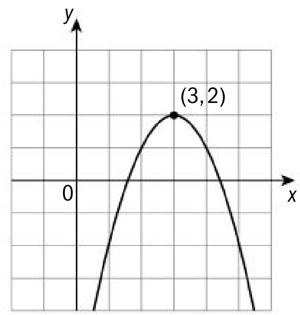
$y = (x - 2)^2 - 1$



$y = 2(x + 1)^2 - 4$



$y = -(x - 3)^2 + 2$



➔ Para funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - h)^2 + k$, el gráfico tiene su vértice en (h, k).

Esta forma de la función cuadrática se conoce a veces como "forma del vértice".

Ejemplo 10

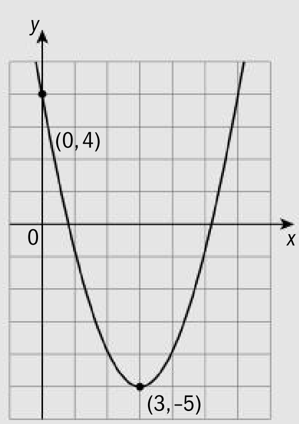
a Escriba la función $y = x^2 - 6x + 4$ en la forma $y = (x - h)^2 + k$.
b Dibuje aproximadamente el gráfico de la función, y rotule el vértice y la intersección con el eje y (ordenada al origen).

Respuestas

a $y = x^2 - 6x + 4$

$y = (x^2 - 6x + 9) + 4 - 9$
$y = (x - 3)^2 - 5$

b



Nota: la ecuación del eje de simetría es $x = 3$.

Al observar la ecuación en la forma polinómica, sabemos que la intersección con el eje y ocurrirá en (0, 4).
Usando el procedimiento de completar el cuadrado reescribimos la ecuación. Al sumar 9 y restar 9, el valor del miembro derecho de la ecuación no se ha alterado.

Ejemplo 11

a Escriba la función $f(x) = 2x^2 + 8x + 11$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b Dibuje aproximadamente el gráfico de la función, y rotule el vértice y la intersección con el eje y (ordenada al origen).

Respuestas

a $f(x) = 2x^2 + 8x + 11$

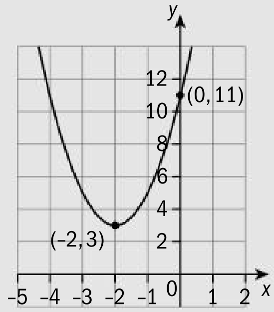
$f(x) = 2(x^2 + 4x + 4) + 11 - 8$

$f(x) = 2(x + 2)^2 + 3$

La intersección del gráfico con el eje y es (0, 11).

Se debe tener cuidado cuando se completa el cuadrado si el término en x^2 tiene un coeficiente distinto de 1. Utilice este coeficiente para factorizar los dos primeros términos.
Al sumar 2 × 4, y luego restar 8, el valor del miembro derecho de la ecuación no ha cambiado.

b



Nota: la ecuación del eje de simetría es $x = -2$.

El nombre de parábola fue introducido por Apolonio de Perga (Grecia, *c.* 262 a.C. – *c.* 190 a.C.) en su trabajo sobre las secciones cónicas.

Ejercitación 2H

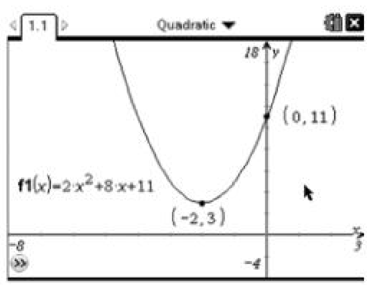
1 Para cada función, escriba la ecuación del eje de simetría y el punto de intersección con el eje y en cada gráfico.

a $f(x) = x^2 + 8x + 5$

b $f(x) = x^2 - 6x - 3$

c $f(x) = 5x^2 + 10x + 6$

d $f(x) = -3x^2 + 10x + 9$



Puede hallar el vértice y el punto de intersección con el eje *y* usando su CPG. Vea la sección 1.8 en el capítulo 17.

2 Para cada función, escriba las coordenadas del vértice y dé las coordenadas del punto de intersección del gráfico con el eje y.

a $y = (x - 7)^2 - 2$ **b** $y = (x + 5)^2 + 1$

c $y = 4(x - 1)^2 + 6$ **d** $y = 3(x + 2)^2 - 7$

Puede resultar útil sustituir $x = 0$, o escribir la función en la forma polinómica para hallar la intersección con el eje *y* (ordenada al origen).

3 Escriba cada función en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Luego dibuje aproximadamente el gráfico de la función y rotule el vértice y la intersección con el eje y (ordenada al origen).

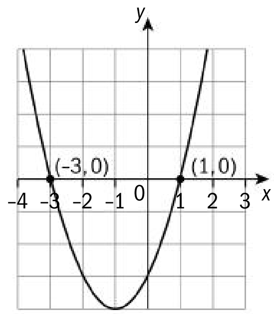
a $f(x) = x^2 + 10x - 6$ **b** $f(x) = x^2 - 5x + 2$

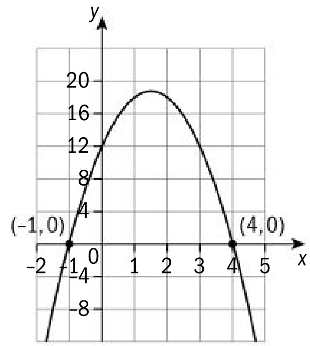
c $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ **d** $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$

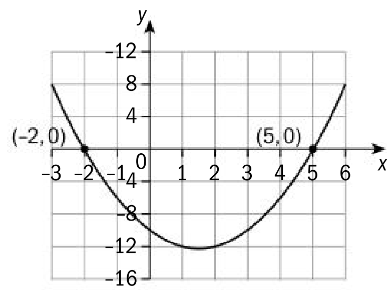
Consideraremos a continuación funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - p)(x - q)$. Por razones obvias, a menudo nos referimos a esta forma como la “forma factorizada”.

Veamos los gráficos de estas funciones cuadráticas en la forma $y = a(x - p)(x - q)$:

$y = (x + 3)(x - 1)$ $\qquad$ $y = -3(x + 1)(x - 4)$ $\qquad$ $y = (x + 2)(x - 5)$







➔ Para funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - p)(x - q)$, el gráfico corta al eje x en $(p, 0)$ y en $(q, 0)$.
Para las funciones cuadráticas de forma $y = a(x - p)(x - q)$, el eje de simetría tendrá ecuación $x = \frac{p+q}{2}$.

Nota: Las intersecciones con el eje x de una función cuadrática $y = f(x)$ nos dan las raíces de la ecuación cuadrática en la forma $f(x) = 0$.
Por ejemplo, en el primer gráfico anterior, la función $y = (x + 3)(x - 1)$ corta al eje x en $(-3, 0)$ y en $(1, 0)$. La ecuación $(x + 3)(x - 1) = 0$ tiene raíces $x = -3$ y $x = 1$.

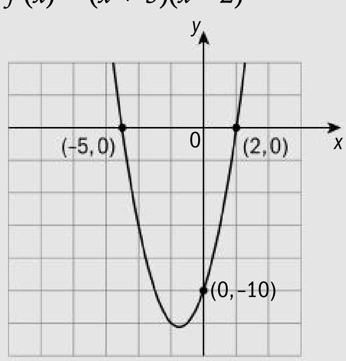
Ejemplo 12

Escriba la función $f(x) = x^2 + 3x - 10$ en la forma $f(x) = (x - p)(x - q)$.
Después, dibuje aproximadamente el gráfico de la función, y rotule las intersecciones con el eje x y el eje y.

Respuesta

$f(x) = x^2 + 3x - 10$ *El gráfico cortará al eje y en (0, –10).*

$f(x) = (x + 5)(x - 2)$ *Factorizar el miembro derecho de la ecuación*



Nota: La ecuación del eje de simetría es $x = \frac{(-5)+2}{2} = -\frac{3}{2}$.

Usar $x = \frac{p+q}{2}$

Ejemplo 13

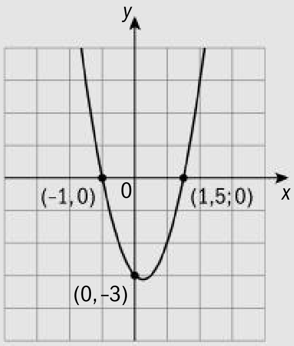
Escriba la función $y = 2x^2 - x - 3$ en la forma $y = a(x - p)(x - q)$. Después, dibuje aproximadamente el gráfico de la función, y rotule las intersecciones con el eje x y el eje y.

Respuesta

$y = 2x^2 - x - 3$ — *El gráfico cortará al eje y en (0, –3).*

$y = (2x - 3)(x + 1)$ — *Factorizar el miembro derecho de la ecuación*

$y = 2(x - 1{,}5)(x + 1)$ — *Sacar el coeficiente de x como factor común del primer factor*



Nota: La ecuación del eje de simetría es $x = \frac{1}{4}$.

Ejercitación 2I

> Puede ser útil sustituir $x = 0$, o escribir la función en la forma polinómica para hallar la intersección con el eje y (ordenada al origen).

1 Escriba las coordenadas de las intersecciones del gráfico de cada función con el eje x y el eje y.

a $f(x) = (x + 3)(x - 7)$ **b** $f(x) = 2(x - 4)(x - 5)$

c $f(x) = -3(x + 2)(x + 1)$ **d** $f(x) = 5(x + 6)(x - 2)$

2 Escriba cada función en la forma $y = a(x - p)(x - q)$. Después, dibuje aproximadamente el gráfico de la función, y rotule las intersecciones con el eje x y el eje y.

a $y = x^2 - 7x - 8$ **b** $y = x^2 - 8x + 15$

c $y = -2x^2 + 3x + 5$ **d** $y = 5x^2 + 6x - 8$

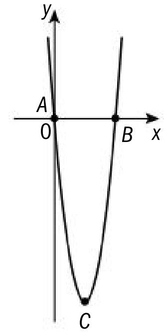
3 Escriba cada función en la forma $y = a(x - h)^2 + k$ y en la forma $y = a(x - p)(x - q)$. Después, realice un dibujo aproximado pero claro del gráfico de la función, y rotule el vértice y las intersecciones con el eje x y el eje y.

a $y = x^2 + 6x - 16$ **b** $y = -x^2 - 4x + 21$

c $y = -0{,}5x^2 + 3{,}5x - 3$ **d** $y = 4x^2 - 18x + 8$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Sea $f(x) = 2x^2 - 12x$. Se muestra parte del gráfico de f.



a El gráfico corta al eje x en A y B. Halle la coordenada x de:

i A **ii** B

b Escriba la ecuación del eje de simetría.

c El vértice del gráfico está en C. Halle las coordenadas de C.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 Sea $f(x) = x^2 + 3$, y sea $g(x) = x - 2$.

a Halle $(f \circ g)(x)$.

b Escriba las coordenadas del vértice del gráfico de $(f \circ g)$.

El gráfico de la función h se genera mediante una traslación del gráfico de $(f \circ g)$ de 5 unidades en la dirección positiva del eje x y 2 unidades en la dirección negativa del eje y.

c Escriba la expresión de la función $h(x)$ en la forma $h(x) = ax^2 + bx + c$.

d A partir de lo anterior, escriba la intersección del gráfico de h con el eje y.

Determinación de la fórmula de la función cuadrática a partir de un gráfico

Mucho puede decirse acerca del gráfico de una función observando la fórmula de la función en sus diferentes formas.

→
- Cuando la función está escrita en forma polinómica, $f(x) = ax^2 + bx + c$, se sabe que la intersección con el eje y es (0, c), y la ecuación del eje de simetría es $x = \frac{-b}{2a}$.
- Cuando la función está dada en forma canónica, $f(x) = a(x - h)^2 + k$, también conocida como forma del vértice, el vértice estará en (h, k).
- Cuando la función está escrita en forma factorizada, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, el gráfico cortará al eje x en $(p, 0)$ y en $(q, 0)$.

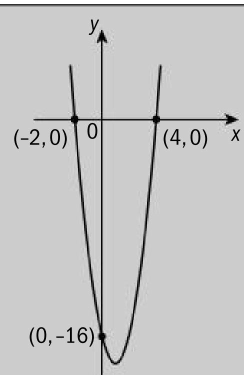
Ahora veremos cómo hallar la fórmula de una función cuadrática a partir de la información dada por su gráfico.

Si conoce las intersecciones con el eje x, puede comenzar escribiendo la forma factorizada.

Si le dan el vértice, puede comenzar escribiendo la forma canónica (forma del vértice).

Ejemplo 14

Usando la información provista por el gráfico, escriba la fórmula de la función cuadrática. Escriba la respuesta final en la forma polinómica, $y = ax^2 + bx + c$.



▶ Continúa en la página siguiente.

Respuesta

$y = a(x + 2)(x - 4)$

$-16 = a(0 + 2)(0 - 4)$

$-8a = -16$

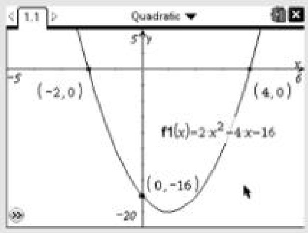
$a = 2$

$y = 2(x + 2)(x - 4)$

$y = 2x^2 - 4x - 16$

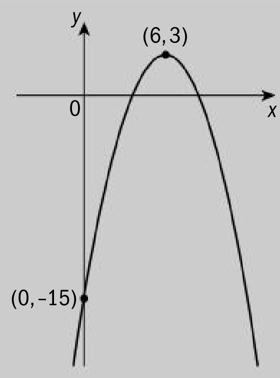
Como le dan las intersecciones con el eje x, comience con la función en forma factorizada. Sabe que y = –16 cuando x = 0. Reemplace estos valores en la ecuación para resolver en a.

Puede verificar su respuesta obteniendo el gráfico de la función en su CPG y comparando los puntos de intersección con los ejes x e y con los del gráfico dado.



Ejemplo 15

Escriba la fórmula de la función cuadrática que se muestra en el gráfico.
Escriba su respuesta final en la forma polinómica, $y = ax^2 + bx + c$.



Respuesta

$y = a(x - 6)^2 + 3$

$-15 = a(0 - 6)^2 + 3$

$36a + 3 = -15$

$36a = -18$

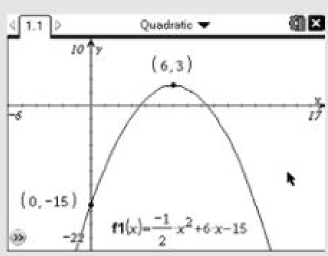
$a = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 + 3$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 15$

Dado que se conoce el vértice, comience por escribir la función en la forma canónica.

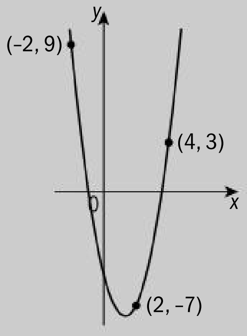
Sabe que y = –15 cuando x = 0. Reemplace estos valores en la ecuación para resolver en a.
Puede verificar su respuesta obteniendo el gráfico de la función en su CPG y verificando el vértice y la intersección con el eje y.



Finalmente, veamos qué sucede si no conocemos el vértice o las intersecciones con los ejes del gráfico. El próximo ejemplo también nos lleva a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para resolver con la CPG.

Ejemplo 16

Escriba la fórmula de la función cuadrática que se muestra en el gráfico.



Respuesta

Para el punto (–2, 9),

$9 = a(-2)^2 + b(-2) + c$

$9 = 4a - 2b + c$

Para el punto (2, –7),

$-7 = a(2)^2 + b(2) + c$

$-7 = 4a + 2b + c$

Para el punto (4, 3),

$3 = a(4)^2 + b(4) + c$

$3 = 16a + 4b + c$

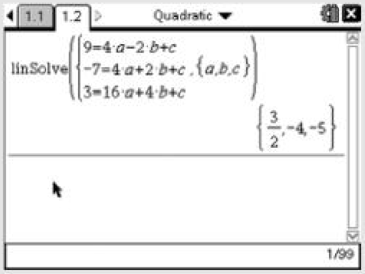
Usando la CPG, $a = 1{,}5$; $b = -4$; y $c = -5$.

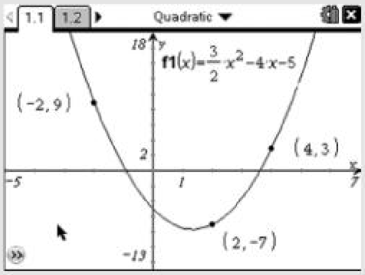
$y = 1{,}5x^2 - 4x - 5$

En este caso, se dan las coordenadas de tres puntos del gráfico de la función.

Reemplace las coordenadas de x e y de estos tres puntos en la función cuadrática dada en la forma polinómica, $y = ax^2 + bx + c$.

Ahora cuenta con tres ecuaciones con tres incógnitas. Puede usar su CPG para resolver en a, b y c.





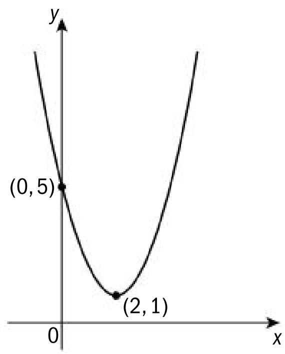
Para determinar estos puntos en el gráfico, vea la sección 1.5 en el capítulo 17.

Si obtiene el gráfico de la función en su CPG, verá que los tres puntos pertenecen a la curva, como se indicó.

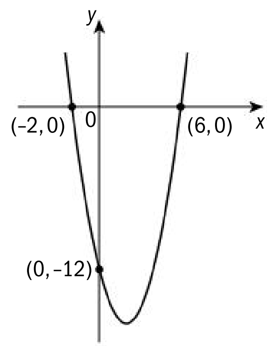
Ejercitación 2J

Use la información que brindan los gráficos para escribir la fórmula de cada función en la forma polinómica, $y = ax^2 + bx + c$.

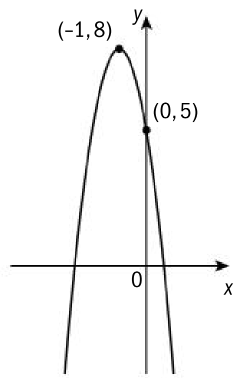
1



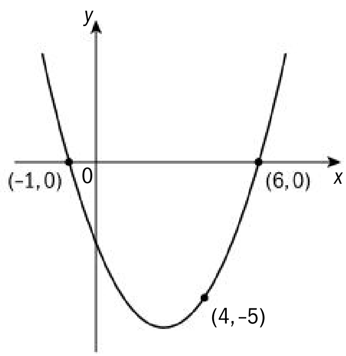
2



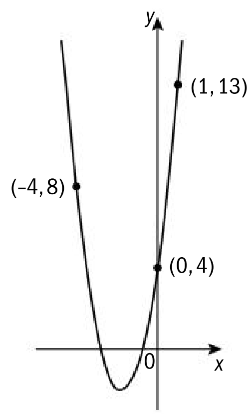
3



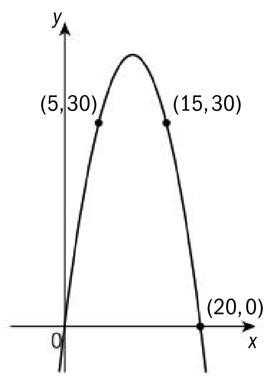
4



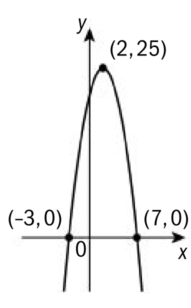
5



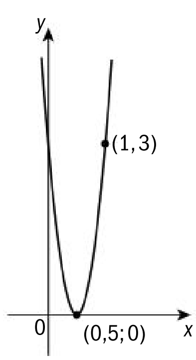
6



7



8



2.5 Aplicaciones de las funciones cuadráticas

En el comienzo de este capítulo, vimos que la trayectoria formada por el agua en un bebedero puede modelizarse mediante una función cuadrática. Las funciones cuadráticas y sus gráficos pueden usarse para modelizar múltiples situaciones.

Cuando usamos funciones cuadráticas para resolver problemas, podemos usar los métodos aprendidos a lo largo de este capítulo. Se espera que utilice la CPG como ayuda para responder muchas preguntas.

Ejemplo 17

Un granjero desea cercar un jardín rectangular con un vallado de 100 m.

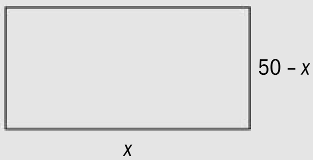
a Si el jardín tiene x metros de ancho, halle la longitud y el área del jardín en función de x.

b Halle el ancho del jardín que tiene un área de 525 m^2.

c Halle el área máxima que puede tener el jardín.

Respuestas

a



Si el granjero tiene 100 m de valla, el perímetro del rectángulo debe ser 100. La suma del largo y el ancho será, por consiguiente, 50 m.

largo = $50 - x$
área = $x(50 - x)$

Área = ancho × largo

b $x(50 - x) = 525$

Igualar el área a 525

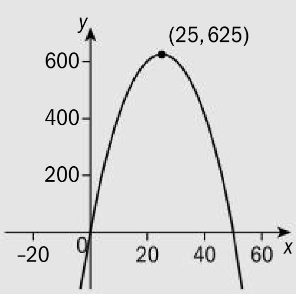
$50x - x^2 = 525$
$x^2 - 50x + 525 = 0$
$(x - 15)(x - 35) = 0$

Escribir la ecuación cuadrática en forma polinómica y resolver en x
Esta ecuación también podría resolverse completando el cuadrado, usando la fórmula cuadrática o usando su CPG.

$x = 15$ m o 35 m

Si el ancho es 15, el largo es 35.
Si el ancho es 35, el largo es 15.

c



El área máxima es 625 m^2.

La manera más sencilla de hallar el área máxima es representar gráficamente la función y = x(50 – x), donde y es el área y x es el ancho. Puede hacerlo en su CPG. Vea la sección 1.6 en el capítulo 17.
El vértice (25, 625) es el punto extremo del gráfico y muestra que el área máxima ocurre cuando el ancho del jardín es 25 m.

Ejemplo 18

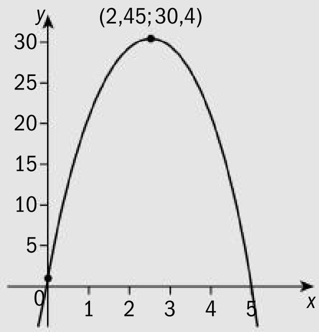
La altura que alcanza una pelota t segundos después de ser lanzada se modeliza mediante la función $h = 24t - 4{,}9t^2 + 1$, donde h es la altura de la pelota en metros.

a Halle la altura máxima alcanzada por la pelota.

b ¿Durante cuánto tiempo la altura de la pelota superará los 20 m?

Respuestas

a



La altura máxima es 30,4 m.

Dibuje el gráfico de la función $y = 24x - 4{,}9x^2 + 1$, donde y es la altura de la pelota y x es el tiempo en segundos.

El vértice está aproximadamente en el punto (2,45; 30,4). Esto muestra que la altura máxima ocurre cuando la pelota ha permanecido en el aire por 2,45 segundos.

Se puede hallar el vértice usando la CPG. Vea la sección 1.8 en el capítulo 17.

b $20 = 24t - 4{,}9t^2 + 1$

$4{,}9t^2 - 24t + 19 = 0$

$t \approx 0{,}9930$ segundos y 3,905 segundos

$3{,}905 - 0{,}9930 = 2{,}912$

La altura de la pelota superará los 20 m durante aproximadamente 2,91 segundos.

Sea $h = 20$.

Escriba una ecuación cuadrática en forma polinómica y resuelva en t.

También puede resolverla usando la CPG.

Vea el la sección 1.7 en el capítulo 17.

La pelota alcanza la altura de 20 m dos veces, una cuando asciende y otra cuando desciende.

¿Qué otras clases de situaciones de la vida cotidiana pueden modelizarse mediante funciones cuadráticas?

Ejemplo 19

Luisa requiere de 3 horas para ascender y descender una colina con su bicicleta. Su velocidad promedio cuesta abajo es de 35 km h^{-1} más que su velocidad promedio cuesta arriba. Si la distancia desde la base hasta la cima de la colina es de 40 km, halle la velocidad promedio de Luisa en su ascenso y en su descenso de la colina.

Respuesta

Sea x la velocidad de ascenso de Luisa.

$$\frac{40}{x} + \frac{40}{x+35} = 3$$

Recuerde que tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$, y que cuando suma los tiempos de ascenso y descenso, el total es de 3 horas.

▶ Continúa en la página siguiente.

$40+\frac{40x}{x+35}=3x$ $40x + 1400 + 40x = 3x^2 + 105x$ $3x^2 + 25x - 1400 = 0$ $x \approx 17{,}8\,\text{km h}^{-1}$ Luisa alcanza una velocidad promedio de $17{,}8\,\text{km h}^{-1}$ en el ascenso y $52{,}8\,\text{km h}^{-1}$ en el descenso.	*Puede multiplicar miembro a miembro por x y luego por (x + 35) para eliminar los denominadores. Exprese la ecuación en la forma polinómica y resuelva en x usando la CPG. Vea el la sección 1.7 en el capítulo 17.*

Ejercitación 2K

1 La altura que alcanza una pelota t segundos luego de ser lanzada se modeliza mediante la función $h = 15t - 4{,}9t^2 + 3$, donde h es la altura de la pelota en metros.

a Halle la altura máxima alcanzada por la pelota.

b ¿Durante cuánto tiempo la altura de la pelota superará los 12 metros?

2 El área, A cm^2, de un cuadro rectangular está dada por la fórmula $A = 32x - x^2$, donde x es el ancho del cuadro en cm. Halle las dimensiones del cuadro si el área es de 252 cm^2.

3 Un cable de 40 cm se corta en dos trozos. Con los trozos se forman dos cuadrados.

a Si el lado de uno de los cuadrados mide x cm, ¿cuánto mide el lado del otro?

b Muestre que el área combinada de los dos cuadrados está dada por $A = 2x^2 - 20x + 100$.

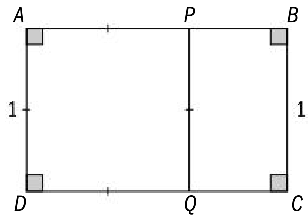
c ¿Cuál es la mínima área combinada de los dos cuadrados?

4 Un portarretratos rectangular mide 50 cm por 70 cm. El portarretratos está rodeado por un marco rectangular de ancho constante. Si el área del marco es igual a la del portarretratos, ¿cuál es la medida aproximada del ancho del marco?

5 El largo de un rectángulo es cinco metros menos que el triple de su ancho. Halle las dimensiones del rectángulo si su área es de 782 m^2.

6 La suma de los cuadrados de tres enteros positivos impares consecutivos es 251. Halle dichos números.

7 Un rectángulo áureo tiene la propiedad de que si es dividido en un cuadrado y un rectángulo menor, el rectángulo menor será proporcional al rectángulo original. En el siguiente rectángulo áureo *ABCD*, *PQ* determina un rectángulo *APQD* y un rectángulo *PCBQ*, tal como se muestra a continuación.



$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{PB}$

Sabiendo que $AD = 1$, halle *AB*.

> La razón entre el largo y el ancho de un rectángulo áureo se conoce como la **divina proporción**. Quizás resulte interesante investigar otras situaciones en las que aparece esta razón particular.

8 Un carpintero desea construir una terraza rectangular en el fondo de una casa. Un lado de la terraza compartirá una pared con la casa y los restantes tres lados tendrán una baranda de madera. Si el carpintero tiene suficiente madera para una baranda de 15 m, ¿qué área tendrá la terraza más grande que pueda construir?

9 Javier viaja para visitar a su hermana que vive a 500 km de distancia. Viaja 360 km en autobús y 140 km en tren. La velocidad promedio del tren es 10 km h^{-1} más que la del autobús. Si el viaje entero le toma 8 horas, halle las velocidades promedio del autobús y del tren.

10 Cuando Juan trabaja solo, la limpieza de su casa le toma 2 horas más que cuando lo hace Juana sola. Si trabajan juntos, Juan y Juana pueden limpiar la casa en 2 horas 24 minutos. ¿Cuánto tiempo le lleva a Juan limpiar la casa si trabaja solo?

Ejercicio de revisión

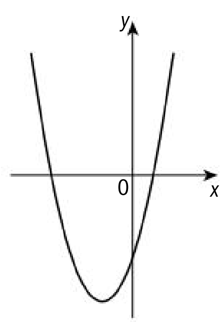
1 Resuelva cada ecuación:

- **a** $(x + 2)^2 = 16$
- **b** $x^2 - 16x + 64 = 0$
- **c** $3x^2 + 4x - 7 = 0$
- **d** $x^2 - 7x + 12 = 0$
- **e** $x^2 + 2x - 12 = 0$
- **f** $3x^2 - 7x + 3 = 0$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Sea $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Se muestra parte del gráfico.

- **a** Escriba la coordenada *y* del punto de intersección del gráfico de *f* con el eje *y*.
- **b** Halle las intersecciones del gráfico con el eje *x*.
- **c** Escriba la ecuación del eje de simetría.
- **d** Escriba la coordenada *x* del vértice del gráfico.

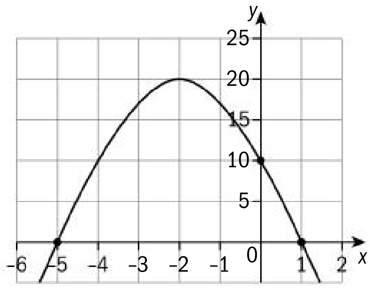


PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Sea $f(x) = a(x - p)(x - q)$. Se muestra parte del gráfico. Los puntos $(-5, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 10)$ pertenecen al gráfico.

a Escriba el valor de p y el de q.

b Halle el valor de a.



4 Sea $f(x) = a(x + 3)^2 - 6$.

a Escriba las coordenadas del vértice del gráfico de f.

b Sabiendo que $f(1) = 2$, halle el valor de a.

c A partir de lo anterior, halle el valor de $f(3)$.

5 La ecuación $x^2 + 2kx + 3 = 0$ tiene dos raíces reales iguales. Halle los posibles valores de k.

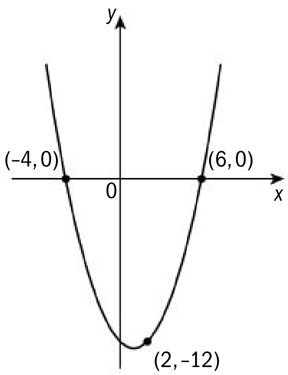
6 Sea $f(x) = 2x^2 + 12x + 5$.

a Escriba la función f, dando su respuesta en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b El gráfico de g se obtiene a partir de f mediante una traslación de 4 unidades en la dirección positiva del eje x y 8 unidades en la dirección positiva del eje y. Halle las coordenadas del vértice del gráfico de g.

Las funciones cuadráticas están íntimamente relacionadas con otras relaciones llamadas "secciones cónicas" (véase la página 60). ¿Cómo se usan estas relaciones en el mundo real?

7 Escriba la fórmula de la función cuadrática que se muestra en el gráfico. Dé su respuesta en la forma $y = ax^2 + bx + c$.



Ejercicio de revisión

1 Resuelva cada ecuación y dé sus respuestas con una aproximación de 3 cifras significativas.

a $3x^2 - 5x - 7 = 0$ **b** $2x^2 + 8x = 3$

c $\dfrac{x}{x+3} = 2x - 1$ **d** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2} = 5$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 La altura de una piedra arrojada desde un puente, h metros sobre el agua, se modeliza mediante la función $h(t) = 15t + 20 - 4{,}9t^2$, donde t es el tiempo en segundos tras el lanzamiento de la piedra.

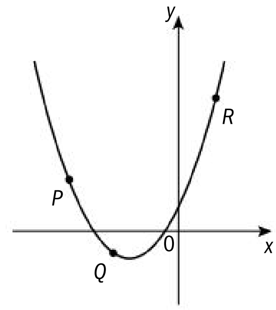
a ¿Cuál es la altura inicial desde donde se arrojó la piedra?

b ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la piedra?

c ¿Durante cuánto tiempo la altura de la piedra es mayor a 20 m?

d ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en chocar con el agua debajo del puente?

3 El largo de un rectángulo excede en 5 cm al triple del ancho. El área del rectángulo es 1428 cm^2. Halle el largo y el ancho del rectángulo.



PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 La función f está dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se muestra parte del gráfico de f.
Los puntos $P(-10, 12)$, $Q(-5, -3)$ y $R(5, 27)$ pertenecen al gráfico.
Halle los valores de a, b y c.

5 Tomás conduce su auto 120 km para ir a trabajar. Si pudiese incrementar su velocidad promedio en 20 km h^{-1}, llegaría al trabajo 30 minutos antes. ¿Cuál es la velocidad promedio a la que conduce?

RESUMEN DEL CAPÍTULO 2

Resolución de ecuaciones cuadráticas

- Si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.
  A esta propiedad se la denomina algunas veces la **propiedad del producto nulo**.
- Esta propiedad puede ser ampliada a:
  Si $(x - a)(x - b) = 0$, entonces $x - a = 0$ o $x - b = 0$.
- Para resolver una ecuación por el procedimiento de completar cuadrados, tome la mitad del coeficiente lineal, elévela al cuadrado y sume el resultado en ambos miembros de la igualdad. Este proceso crea un trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo de la ecuación.
- Para poder completar el cuadrado, el coeficiente de x^2 debe ser 1.
  Si el término de x^2 tiene coeficiente distinto de 1, puede sacar ese coeficiente como factor común o dividir toda la expresión por ese coeficiente.

La fórmula cuadrática

- Para cualquier ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula aparece en el cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NM del IB; por lo tanto, no tiene que memorizarla.

Raíces de ecuaciones cuadráticas

- Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$,
  - Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tendrá dos raíces reales distintas.
  - Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tendrá dos raíces reales iguales.
  - Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tendrá raíces reales.

Podemos considerar que una ecuación con dos raíces reales iguales tiene una sola solución.

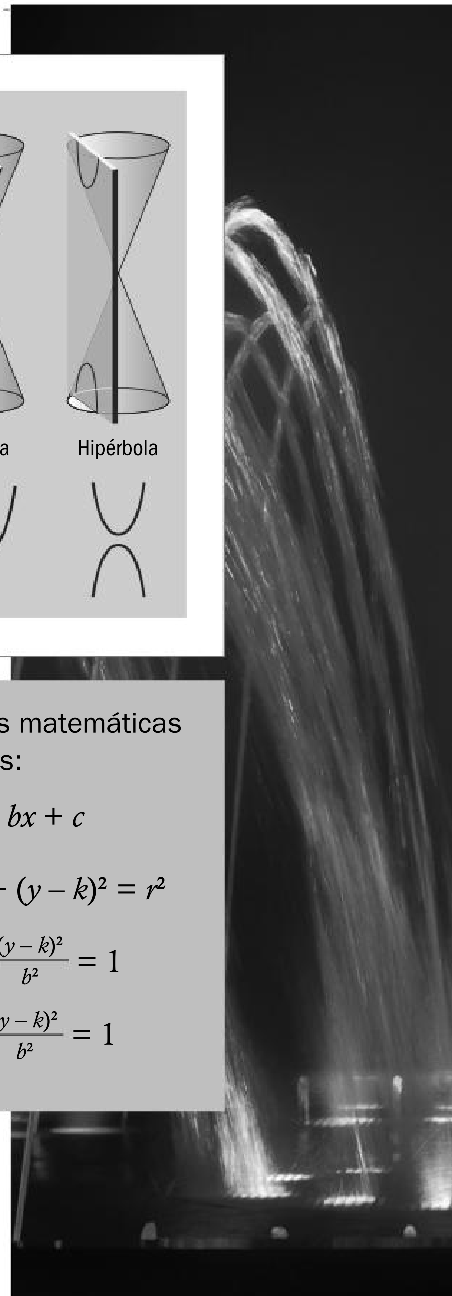
Continúa en la página siguiente.

Gráficos de funciones cuadráticas

- Para ecuaciones cuadráticas en la forma polinómica, $y = ax^2 + bx + c = 0$, el gráfico cortará al eje y en $(0, c)$.
- La ecuación del eje de simetría es $x = \frac{-b}{2a}$.
- Cuando la función cuadrática básica $y = x^2$ sufre transformaciones, las funciones resultantes pueden escribirse como $y = a(x - h)^2 + k$.
- Para funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - h)^2 + k$, el gráfico tendrá su vértice en (h, k).
- Para funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - p)(x - q)$, el gráfico corta al eje x en $(p, 0)$ y $(q, 0)$.
- Para funciones cuadráticas de la forma $y = a(x - p)(x - q)$, el eje de simetría tendrá ecuación $x = \frac{p+q}{2}$.
- Cuando la función está en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, también conocida como forma del vértice, el vértice estará en (h, k).
- Cuando la función está escrita en la forma factorizada, $f(x) = a(x - p)(x - q)$, el gráfico cortará al eje x en $(p, 0)$ y $(q, 0)$.

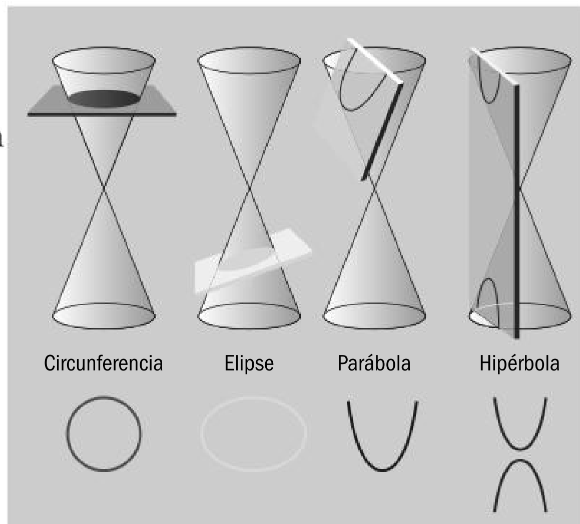
Las secciones cónicas: formas matemáticas en el mundo real

El gráfico de una función cuadrática tiene la forma de una parábola. Vemos parábolas en el mundo real: la trayectoria de una pelota volando por el aire o la forma de un chorro de agua que fluye de una fuente.



Las parábolas son solamente una de las cuatro formas conocidas como **secciones cónicas**. Estas secciones cónicas se determinan por la intersección de un cono (o dos conos) y un plano.

Las otras secciones cónicas son la circunferencia, la elipse y la hipérbola.



- Una parábola es la forma que resulta de la intersección de un cono con un plano paralelo a la generatriz.

Los antiguos griegos estudiaron las secciones cónicas y Apolonio de Perga (*c.* 262 a.C. – *c.* 190 a.C.) fue el primero en darles un nombre. Hipatia (nacida entre 350 d.C. y 370 d.C., murió en 415) fue una matemática y astrónoma, y directora de la Escuela Platónica de Alejandría (Egipto) en una época en que solo unas pocas mujeres tenían acceso a la educación.Desarrolló el trabajo de las secciones cónicas de Apolonio. Las secciones cónicas fueron posteriormente estudiadas por el matemático y poeta persa Omar Khayyám (*c.* 1048 – *c.* 1131).

Pueden usarse ecuaciones matemáticas para describir estas figuras:

Parábola: $y = ax^2 + bx + c$

Circunferencia: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Elipse: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Hipérbola: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Muchos consideran que la circunferencia es la más perfecta de estas secciones cónicas. Resulta seguramente la más conocida y la vemos cotidianamente en nuestro entorno.

- ¿Por qué una circunferencia es “perfecta”?

- ¿Sabía que las órbitas de los planetas son formas elípticas? Esto no se mostró hasta principios del siglo XVII. Mucho antes, Apolonio había planteado la hipótesis de que los planetas tenían tales órbitas cuando estudiaba y nombraba las secciones cónicas, pero nunca lo había probado.
- ¿Cómo cree que este conocimiento evolucionó en el tiempo? Hoy en día, vemos elipses, hipérbolas y parábolas en los puentes colgantes, las trayectorias de las naves espaciales y de otros cuerpos en el espacio, y la forma de las antenas parabólicas.

  ¿Quién hubiese imaginado que las secciones de un cono pudieran resultar en ecuaciones matemáticas tan útiles y nos brindaran formas que nos ayudan a entender el universo?

- Observe a su alrededor: ¿qué otras figuras y formas ve que puedan modelizarse mediante ecuaciones matemáticas?
- ¿Por qué cree que la gente trata de usar las matemáticas para describir formas y patrones en el mundo que nos rodea?
- ¿Por qué el uso de las matemáticas puede ayudarnos a comprender nuestro mundo y nuestro universo?

3 Probabilidad

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

5.5a Conceptos de experimento, resultado, resultados equiprobables, espacio muestral (U) y suceso. La probabilidad de un suceso A es $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$. Los sucesos complementarios A y A′ (no A). El uso de diagramas de Venn, diagramas de árbol y tablas de resultados.

5.6 Sucesos compuestos, la fórmula para $\mathrm{P}(A \cup B)$. Sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes: $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$. Probabilidad condicionada; la definición $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$. Sucesos independientes; la definición $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B')$. Probabilidades con y sin reposición.

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$$

$$1 - \frac{2}{9} = \frac{9}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{4 \times 5} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{4}{7} \div \frac{3}{7} = \frac{4}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

2 Sumar, restar y multiplicar decimales

$$\begin{array}{r} 0{,}2 \\ +\,0{,}7 \\ \hline 0{,}9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}35 \\ +\,0{,}4 \\ \hline 0{,}75 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{0}{\cancel{1}},\overset{9}{\cancel{0}}\overset{1}{\cancel{0}} \\ -0{,}62 \\ \hline 0{,}38 \\ \hline \end{array}$$

$0{,}2 \times 0{,}34$

Dado que $2 \times 34 = 68$

entonces $0{,}2 \times 0{,}34 = 0{,}068$

3 Calcular porcentajes

52% de $60 = 0{,}52 \times 60 = 31{,}2$

Comprobemos nuestras habilidades

1 Calcule sin usar la calculadora:

a $1 - \dfrac{3}{7}$ **b** $\dfrac{2}{5} + \dfrac{5}{7}$ **c** $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{2}{3}$

d $1 - \left(\dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{9}\right)$ **e** $\dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{7}{20}}$

2 Realice las siguientes operaciones:

a $1 - 0{,}375$ **b** $0{,}65 + 0{,}05$

c $0{,}7 \times 0{,}6$ **d** $0{,}25 \times 0{,}64$

e 50% de 30 **f** 22% de $0{,}22$

g 12% del 10% de $0{,}8$

3 Verifique sus respuestas a las preguntas **1** y **2** usando su calculadora.

- ¿Cuál es la probabilidad de que llueva mañana?
- ¿Qué tan probable es que pase mi examen?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar el partido de fútbol esta tarde?
- ¿Tengo certeza de llegar al colegio a tiempo si uso el autobús en lugar del tren?

Consideramos preguntas como estas todo el tiempo. Usamos las palabras “suerte”, “posibilidad”, “probabilidad” y “certeza” en nuestras conversaciones cotidianas, pero estas mismas palabras se usan para describir la probabilidad matemática. Esta importante rama de la matemática nos ayuda a comprender el riesgo y otros sucesos, desde los promedios deportivos hasta el estado del tiempo y la posibilidad de ser alcanzado por un rayo.

En este capítulo examinamos el lenguaje de la probabilidad, cómo cuantificar la probabilidad (asignarle un valor numérico) y las herramientas básicas que se necesitan para resolver problemas que involucren probabilidades.

▲ De acuerdo con el servicio meteorológico del gobierno de los Estados Unidos, la probabilidad de ser alcanzado por un rayo en un año dado es $\frac{1}{750\,000}$. La probabilidad de ser alcanzado por un rayo para alguien que vive 80 años es $\frac{1}{6250}$. Estas probabilidades han sido estimadas a partir de datos sobre el tamaño de una población y el número de personas alcanzadas por un rayo en los últimos 30 años.

Investigación: dados y probabilidades

A mediados del siglo XVII, los matemáticos Blaise Pascal, Pierre de Fermat y Antoine Gombaud se mostraron intrigados por este problema surgido a partir de un juego sencillo:

¿Qué es más probable: *obtener un 6 en cuatro lanzamientos de un dado u obtener un doble 6 en 24 lanzamientos de dos dados?*

¿Cuál opción cree que es más probable? ¿Por qué?

3.1 Definiciones

➔ Un **suceso** es el resultado de un experimento.
Un **experimento** es el proceso por el cual se obtiene un resultado.
Un **experimento aleatorio** es aquel en el cual existe incertidumbre acerca del suceso que pueda ocurrir.

Algunos ejemplos de experimentos aleatorios son:

- Arrojar un dado tres veces
- Lanzar una moneda
- Tomar dos naipes de un mazo de 52 naipes
- Registrar el número de automóviles que pasan por la entrada del colegio en un período de 5 minutos

Podemos expresar las posibilidades de que ocurra un suceso usando un número comprendido entre 0 y 1. En esta escala, el 0 representa un suceso imposible y 1 representa un suceso que ocurrirá, con certeza. Esta medida es la **probabilidad** de que ocurra el suceso.

Imposible	medianamente probable	seguro
0	$\frac{1}{2}$	1

Podemos escribir $\mathrm{P}(A)$ para representar la probabilidad de que ocurra un suceso A. De aquí que $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.

Existen tres formas de calcular la probabilidad de un suceso:

- Probabilidad teórica
- Probabilidad experimental
- Probabilidad subjetiva

Probabilidad teórica

Un dado equilibrado tiene seis caras numeradas, todas las cuales pueden ocurrir con la misma probabilidad. La lista de los sucesos equiprobables es 1, 2, 3, 4, 5, 6.

El primer libro escrito sobre probabilidades, *El libro de los juegos de azar*, fue escrito por Gerolamo Cardano (1501–1575). Cardano fue un astrónomo, filósofo, médico, matemático y apostador, de origen italiano. Su libro contenía técnicas para hacer trampas en un juego y saber cómo atrapar a quienes hacen trampas.

Una probabilidad no puede ser mayor a 1.

Podemos escribir la probabilidad como un número decimal, una fracción o un porcentaje.

En un dado equilibrado (no “cargado”) la probabilidad de cada resultado es la misma. En un dado no equilibrado algunos sucesos pueden ser más probables que otros.

Llamamos a la lista de todos los resultados posibles el **espacio muestral**, *U.* La notación *n(U)* = 6 muestra que hay seis elementos en el espacio muestral.

Sea el suceso A, definido como "el número obtenido es el 6". En este espacio muestral hay un 6. $n(A) = 1$ muestra que que hay un 6 en el espacio muestral. La probabilidad de obtener un 6 cuando se arroja un dado es una en seis, o $\frac{1}{6}$. En notación de probabilidad:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{6}:$$

➔ La probabilidad teórica de un suceso A es $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$, donde $n(A)$ es el número de casos favorables al suceso A y $n(U)$ es el número total de resultados posibles.

➔ Si la probabilidad de un suceso es P, en n experimentos se espera que el suceso ocurra $n \times P$ veces.

Se denomina "icosaedro" a un poliedro de 20 caras.

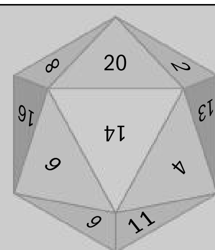
Ejemplo 1

Se arroja un dado equilibrado con 20 caras numeradas del 1 al 20. El suceso A se define como "el número obtenido es un múltiplo de 4".

a Determine $\mathrm{P}(A)$.

El dado se arroja 100 veces.

b ¿Cuántas veces espera obtener un múltiplo de 4?



Respuestas

a $n(A) = 5$ y $n(U) = 20$ $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	*Hallar n(A)* *Hay 20 resultados posibles.* *5 de ellos son múltiplos de 4* *(4, 8, 12, 16 y 20).*
b $\frac{1}{4} \times 100 = 25$	*Probabilidad × número de experimentos*

Probabilidad experimental (empírica)

Muchas veces los resultados no resultan equiprobables pero se puede usar un experimento para estimar las probabilidades.

Por ejemplo, para calcular la probabilidad de que una determinada pieza que se está produciendo en una fábrica sea defectuosa, deberíamos evaluar algunas de ellas. Si la primera pieza que evaluamos resulta defectuosa, podríamos concluir que todas las piezas son defectuosas. Sin embargo, este puede no ser el caso. Si la segunda pieza no es defectuosa, podríamos entonces concluir que la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es $\frac{1}{2}$, dado que la mitad de todas las piezas hasta el momento resultaron defectuosas.

Los procesos que resultan demasiado complicados para permitir un análisis exacto pueden resolverse mediante métodos probabilísticos que emplean la "ley de los grandes números". Estos métodos, desarrollados en las décadas de 1930 y 1940, se conocen como **métodos de Montecarlo**, por el famoso casino. Se emplean en una gran variedad de situaciones, desde la estimación de la fortaleza de una mano en el juego de naipes llamado "Bridge", hasta la modelización estadística de una reacción nuclear en cadena. Quizás resulte interesante explorar las aplicaciones de los métodos de Montecarlo con mayor profundidad.

Continuando este proceso una cantidad de veces y calculando la razón:

$$\frac{\text{Número de piezas defectuosas}}{\text{Número de piezas evaluadas}}$$

obtenemos la frecuencia relativa de que una pieza resulte defectuosa.

A medida que el número de piezas evaluadas crece, la frecuencia relativa se acerca más y más a la probabilidad de que una pieza resulte defectuosa.

El servicio meteorológico de los Estados Unidos empleó este método para estimar la probabilidad de ser alcanzado por un rayo, usando:

$$\frac{\text{Número de personas alcanzadas}}{\text{Número de personas en la población}}$$

➔ Podemos usar esta frecuencia relativa para estimar la probabilidad. Cuanto mayor es el número de experimentos, más se acerca la frecuencia relativa a la probabilidad.

Ejemplo 2

Los colores de los automóviles que pasan por la entrada del colegio durante una mañana se dan en la tabla siguiente:

Color	Frecuencia
Rojo	45
Negro	16
Amarillo	2
Verde	14
Azul	17
Gris	23
Otros	21
Total	**138**

a Estime la probabilidad de que el próximo automóvil que pase por la entrada del colegio sea rojo.

b A la mañana siguiente pasaron 350 automóviles por la entrada del colegio. Estime el número de automóviles rojos en esa mañana.

Respuestas

a La frecuencia relativa de automóviles rojos es $\frac{45}{138}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que un automóvil sea rojo es $\frac{45}{138}$.

b Cuando 350 automóviles pasan por la entrada del colegio, el número de automóviles rojos será aproximadamente $\frac{45}{138} \times 350 = 114$.

Estos números son estimaciones, porque estamos usando frecuencias relativas como estimación de una probabilidad.

Esta probabilidad está dada como una fracción. En los exámenes del IB se debe dar la respuesta en forma exacta o en decimales con tres cifras significativas, para las probabilidades.

Probabilidad subjetiva

No siempre es posible repetir un experimento un gran número de veces. En estos casos, podemos estimar la probabilidad de un suceso basándonos en un juicio subjetivo, la experiencia, información o una creencia.

Por ejemplo, los equipos de fútbol Liverpool y Arsenal se enfrentarán en un partido del torneo inglés de primera división. ¿Cuál es la probabilidad de que Liverpool gane? Se podrían considerar partidos anteriores entre los dos equipos, como así también los últimos partidos de cada equipo y cuál fue el desempeño de ambos en las condiciones meteorológicas en las que van a jugar, pero finalmente tendremos que “adivinar”.

Ejercitación 3A

> En las preguntas sobre probabilidades, todos los dados y las monedas son equilibrados a menos que se indique lo contrario.

1 Se arroja un dado octaédrico (ocho caras). Las caras están numeradas del 1 al 8. ¿Cuál es la probabilidad de que, al arrojarlo, el número obtenido sea el siguiente?

a Un número par
b Un múltiplo de 3
c Un múltiplo de 4
d Un número que no es múltiplo de 4
e Menor que 4

> "Al azar" significa que cualquier automóvil tiene igual posibilidad de ser seleccionado. Es tan probable elegir uno de los 30 automóviles defectuosos como uno de los que no lo son.

2 Un vendedor de automóviles usados tiene 150 automóviles en su lote. El vendedor sabe que 30 automóviles son defectuosos. Uno de los 150 automóviles se selecciona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

3 La tabla siguiente muestra las frecuencias relativas de las edades de los estudiantes en un colegio secundario.

Edad (en años)	Frecuencia relativa
13	0,15
14	0,31
15	0,21
16	0,19
17	0,14
Total	**1**

a Se elige al azar un estudiante de este colegio.
Halle la probabilidad de que:
i El estudiante tenga 15 años de edad.
ii El estudiante tenga 16 o más años de edad.

Hay 1200 estudiantes en este colegio.

b Halle el número de estudiantes de 15 años de edad.

4 Las seis caras de una perinola están numeradas del 1 al 6.
La tabla muestra los resultados de 100 juegos.

Número en la perinola	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	27	18	17	15	16	7

a ¿Cuál es la frecuencia relativa para la salida del 1?
b ¿Cree que la perinola es equilibrada? Dé una razón para su respuesta.
c Se gira la perinola 3000 veces. Estime el número de veces que se obtendrá un 4.

5 Cada letra de la palabra CONSECUTIVO se escribe en cartones separados. Los 11 cartones se colocan con las letras hacia abajo. Se extrae un cartón al azar. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un cartón con las siguientes letras?

a La letra C **b** La letra P **c** Una vocal

6 La perinola que se muestra está "cargada". La tabla muestra las probabilidades de obtener rojo y azul. La probabilidad de obtener verde es el doble de la de obtener amarillo.

Color	rojo	amarillo	azul	verde
Frecuencia	0,4		0,3	

Halle la probabilidad de obtener verde.

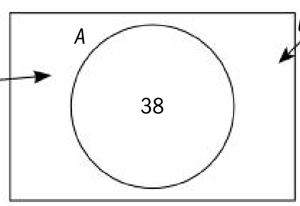
7 Una bolsa contiene 40 discos numerados del 1 al 40. Se elige un disco al azar. Halle la probabilidad de que el número del disco:

a Sea un número par **b** Tenga algún dígito 1

3.2. Diagramas de Venn

Hay 100 estudiantes en un grupo.
38 de ellos practican tiro con arco.
Se puede mostrar la información mediante un **diagrama de Venn**.

El conjunto *A* es el de los estudiantes que practican tiro con arco. $n(A) = 38$



El rectángulo representa los 100 estudiantes. En consecuencia, $n(U) = 100$.

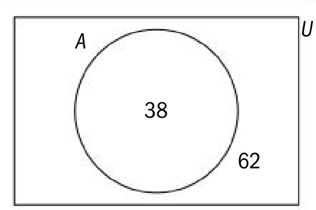
John Venn nació en Hull, Inglaterra, en 1834. Su padre y su abuelo fueron sacerdotes y a John también lo animaron a seguir sus pasos. En 1853 empezó a estudiar en el Gonville and Caius College, de la Universidad de Cambridge, del que se graduó en 1857 para convertirse en profesor adjunto de la universidad. Durante los cinco años siguientes continuó con el sacerdocio y regresó a Cambridge en 1862 para enseñar filosofía y teoría de probabilidades. John Venn desarrolló una forma gráfica para representar conjuntos. A estos gráficos se los conoce como diagramas de Venn.

Se elige un estudiante al azar. La probabilidad de que el estudiante practique tiro con arco puede escribirse como P(*A*).

$$P(A) = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$$

Recuerde que $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$.

Suceso complementario *A´*



El área fuera de *A* (pero siempre dentro del espacio muestral U) representa a los estudiantes que no practican tiro con arco.
Esto es *A´*, el **complemento** de *A*.

$n(A') = n(U) - n(A)$

Del diagrama de Venn vemos que $n(A') = 100 - 38 = 62$

La probabilidad de que un estudiante no practique tiro con arco,

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(U)} = \frac{62}{100} = \frac{31}{50}$$

Observamos que:

$$P(A') + P(A) = \frac{31}{50} + \frac{19}{50} = 1$$

Todos los estudiantes o bien practican tiro con arco o bien no practican tiro con arco.

➔ Como suceso, A, puede ocurrir o no ocurrir.
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A')=1$
$\mathrm{P}(A')=1-\mathrm{P}(A)$

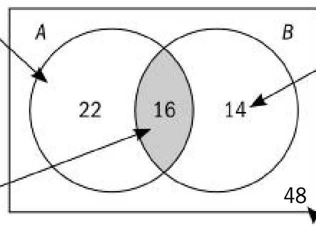
Intersección de sucesos

De los 100 estudiantes, 30 juegan bádminton.
De ellos, 16 practican ambos: tiro con arco y bádminton.

Podemos mostrar esta información del siguiente modo:

38 estudiantes practican tiro con arco. 16 estudiantes practican bádminton y tiro con arco, por lo tanto, 38 – 16 = 22 solo practican tiro con arco.

30 estudiantes practican bádminton. 16 estudiantes practican bádminton y tiro con arco, por lo tanto, 30 – 16 = 14 solo practican bádminton.



La región sombreada es la **intersección** de *A* y *B*. Esta región representa aquellos estudiantes que practican ambos: tiro con arco y bádminton. La región se escribe como $A \cap B$.

Hay 100 – 22 – 16 – 14 = 48 estudiantes que no practican tiro con arco ni bádminton.

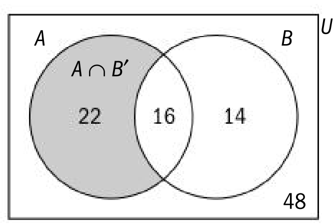
La probabilidad de que un estudiante elegido al azar practique tiro con arco y bádminton se escribe $\mathrm{P}(A \cap B)$.

$n(A \cap B) = 16$

$n(A \cap B)$ es el número de elementos en la intersección entre los conjuntos *A* y *B*.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(U)}=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$$

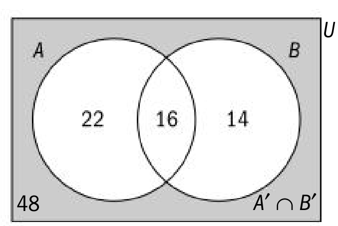
La probabilidad de que un estudiante elegido al azar no practique bádminton pero sí tiro con arco se escribe $\mathrm{P}(A \cap B')$.



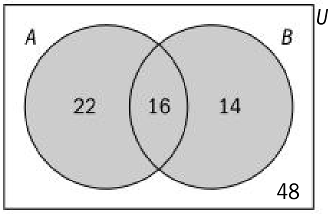
22 estudiantes de un total de 100 practican tiro con arco pero no bádminton.

$$\mathrm{P}(A\cap B')=\frac{22}{100}=\frac{11}{50}$$

$A' \cap B'$ representa los estudiantes que no practican ni tiro con arco ni bádminton.



Unión de sucesos



La región sombreada es la **unión** de A y B, la región representa aquellos estudiantes que practican ya sea tiro con arco o bádminton o ambos. La región se escribe $A \cup B$.

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar practique bádminton o tiro con arco se escribe $\mathrm{P}(A \cup B)$.

Note que "o" en matemática incluye la posibilidad de ambos: lo llamamos "o inclusivo".

Del diagrama, $n(A \cup B) = 22 + 16 + 14 = 52$
y de aquí

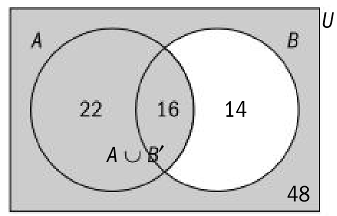
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$$

Esto es a partir de la definición de probabilidad.

$A \cup B'$ representa todos aquellos estudiantes que **o** practican tiro con arco **o** no practican bádminton.

$n(A \cup B') = 22 + 16 + 48 = 86$ y de aquí

$$\mathrm{P}(A \cup B') = \frac{n(A \cup B')}{n(U)} = \frac{86}{100} = \frac{43}{50}$$



Ejemplo 3

En un grupo de 30 estudiantes, 17 juegan con entretenimientos de computador, 10 juegan con entretenimientos de mesa y 9 no juegan.
Dibuje un diagrama de Venn para mostrar esta información.
Use el diagrama de Venn para hallar la probabilidad de que un estudiante elegido al azar:

a Juegue con entretenimientos de mesa
b Juegue con entretenimientos de computador y de mesa
c Juegue con entretenimientos de mesa, pero no con entretenimientos de computador

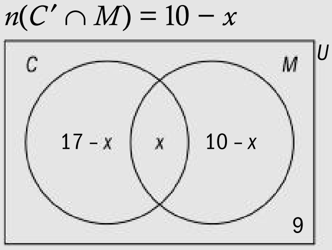
Respuestas

Sea C = {estudiantes que juegan con entretenimientos de computador},
M = {estudiantes que juegan con entretenimientos de mesa}

Primero definir la notación

Sea $x = n(C \cap M)$
$n(C \cap M') = 17 - x$
$n(C' \cap M) = 10 - x$

*No sabemos cuántos juegan entretenimientos de computador **y** de mesa; usar x para representar este valor.*



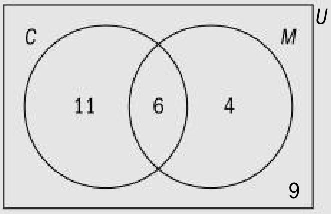
▶ Continúa en la página siguiente.

$(17 - x) + x + (10 - x) + 9 = 30$

$36 - x = 30$

$x = 6$

Las cuatro regiones del diagrama de Venn conforman el conjunto universal U y por lo tanto deben sumar 30.



Reemplazar x = 6 para obtener el número en cada región del diagrama

Usar el diagrama de Venn y

$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$

a $P(M) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

b $P(C \cap M) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

c $P(C' \cap M) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

Ejercitación 3B

1 En un grupo de 35 niños, 10 son rubios, 14 tienen ojos marrones y 4 son rubios con ojos marrones.
Dibuje un diagrama de Venn para representar la situación.
Un niño se elige al azar. Halle la probabilidad de que el niño sea rubio o tenga ojos marrones.

2 En una clase de 25 estudiantes, 15 de ellos estudian francés, 13 de ellos estudian malayo y 5 de ellos no estudian ningún idioma. Se elige al azar uno de estos estudiantes de la clase. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie francés y malayo?

3 En un grupo de Educación Física hay 25 niñas. 13 ya han tomado clases de aeróbic y 17 de gimnasia. Una de las niñas no ha hecho ninguna de las dos actividades. ¿Cuántas han hecho ambas actividades?
Se elige una niña al azar. Calcule la probabilidad de que:

a Haya hecho ambas actividades.

b Haya hecho gimnasia pero no aeróbic.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 De los 32 estudiantes de una clase, 18 juegan al golf, 16 tocan el piano y 7 realizan ambas actividades. ¿Cuántos no practican ninguna de las actividades?
Se elige un estudiante al azar. Halle la probabilidad de que:

a Juegue al golf pero no toque el piano.

b Toque el piano pero no juegue al golf.

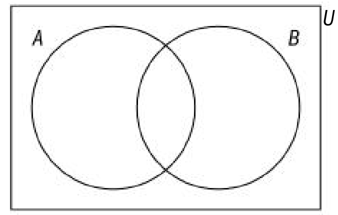
PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 El conjunto universal U se define como el conjunto de los números positivos enteros menores o iguales que 15. Los subconjuntos A y B se definen como:

A = {enteros que son múltiplos de 3}
B = {enteros que son divisores de 30}

a Enumere los elementos de:
i A
ii B

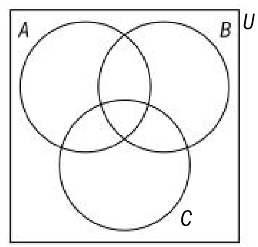
b Ubique los elementos de A y B en la región correspondiente del diagrama de Venn.



c Se elige al azar un número de U.
Halle la probabilidad de que el número sea:
i Múltiplo de 3 y divisor de 30
ii Ni múltiplo de 3 ni divisor de 30

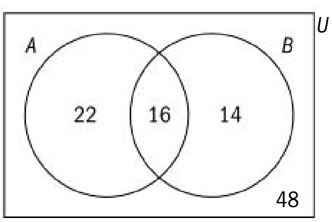
6 En una ciudad, el 40% de la población lee el diario "A", el 30% lee el diario "B", el 10% lee el diario "C".
Se encontró que el 5% lee "A" y "B"; el 4% lee "A" y "C"; el 3% lee "B" y "C".
Además, el 2% de las personas leen los tres diarios.
Halle la probabilidad de que una persona elegida al azar en la ciudad:
a Lea solo "A"
b Lea solo "B"
c No lea ninguno de los tres diarios

Para esta pregunta necesitará usar tres círculos en el diagrama de Venn, uno para representar cada diario.



La regla de la adición

Aquí está el diagrama de Venn para los estudiantes que practican tiro con arco y bádminton de la página 69.



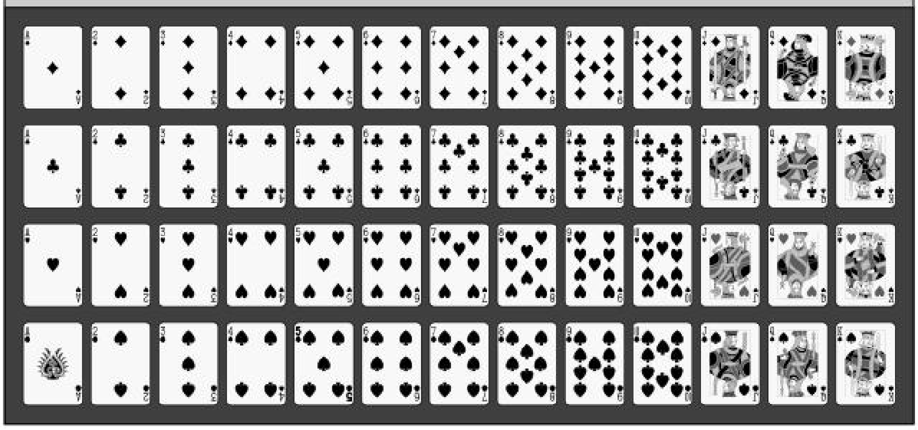
$n(A \cup B) = 38 + 30 - 16$,
o $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
por lo tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Tanto la probabilidad de que un estudiante practique tiro con arco, como la probabilidad de que un estudiante practique bádminton, **incluyen la probabilidad de que un estudiante practique ambos deportes**. Solo queremos considerar una vez esta probabilidad, por lo tanto, restamos una de estas probabilidades.

➔ Para dos sucesos A y B cualesquiera
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Juegos de naipes

Para el próximo ejemplo necesita familiarizarse con un mazo común de 52 naipes de juego. En un mazo hay cuatro palos: picas, tréboles, corazones y diamantes. Las picas y los tréboles son negros, los corazones y los diamantes son rojos. Hay 13 naipes en cada palo: as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, jota, reina y rey. A la jota, la reina y el rey se les llama “figuras”. ¿Existen en su país naipes similares o iguales a estos?

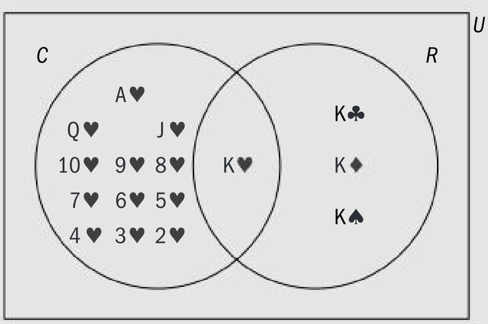


Ejemplo 4

Se elige al azar un naipe de un mazo común de 52 naipes.
Halle la probabilidad de que sea un corazón o un rey.

Respuesta

Necesitamos P(C ∪ R).
Dibujemos un diagrama de Venn.



$\text{P}(C) = \frac{13}{52}$ — *Hay 13 corazones en el mazo.*

$\text{P}(R) = \frac{4}{52}$ — *Hay 4 reyes en el mazo.*

$\text{P}(C \cap R) = \frac{1}{52}$ — *Hay un naipe que es rey* ***y*** *corazón.*

Por lo tanto

$\text{P}(C \cup R) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$ — *Usando* $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R)$

Ejemplo 5

Si A y B son dos sucesos tales que $\mathrm{P}(A) = \frac{9}{20}$ y $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{10}$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = 2\mathrm{P}(A \cap B)$ halle:

a $\mathrm{P}(A \cup B)$ **b** $\mathrm{P}(A \cup B)'$ **c** $\mathrm{P}(A \cap B')$

Respuestas

a Sea $\mathrm{P}(A \cap B) = x$

Usar $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$2x = \frac{9}{20} + \frac{3}{10} - x$$

$$3x = \frac{15}{20}$$

$$x = \frac{3}{4} \div 3$$

$$x = \frac{1}{4} = \mathrm{P}(A \cap B)$$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Dado que $P(A \cup B) = 2P(A \cap B)$

b Si $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$ entonces

$$\mathrm{P}(A \cup B)' = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dado que $P(A') = 1 - P(A)$

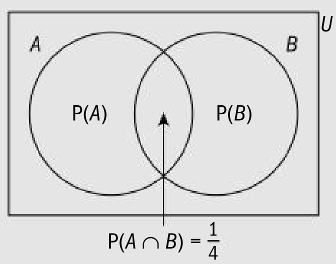
c Si $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$

*Usar el resultado del apartado **a***

$$\mathrm{P}(A \cap B') = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

$$= \frac{9}{20} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

Esta es la región del diagrama que representa a A sin la intersección con B.



Ejercitación 3C

1 Dos dados se arrojan 500 veces. Para cada tiro, se escribe la suma de los números que se muestran en las caras.

Se obtuvieron las siguientes frecuencias:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencias	6	8	21	34	65	80	63	77	68	36	42

Usando las frecuencias, calcule la probabilidad de que:

a La suma sea exactamente divisible por 5.

b La suma sea un número par.

c La suma sea exactamente divisible por 5 o sea un número par.

2 Se arroja un dado de 10 caras, numeradas del 1 al 10. Calcule la probabilidad de que:
- **a** El número obtenido sea primo.
- **b** El número obtenido sea primo o múltiplo de 4.
- **c** El número obtenido sea un múltiplo de 4 o un múltiplo de 3.

3 En un grupo de 80 turistas, 40 tienen cámaras fotográficas, 50 son mujeres y 22 son mujeres con cámaras fotográficas. Halle la probabilidad de que un turista elegido al azar del grupo tenga cámara fotográfica o sea mujer.

4 Se elige una letra al azar de las 26 letras del idioma inglés. Halle la probabilidad de que esté:
- **a** En la palabra **MATHEMATICS**
- **b** En la palabra **TRIGONOMETRY**
- **c** En la palabra **MATHEMATICS** *y* en la palabra **TRIGONOMETRY**
- **d** En la palabra **MATHEMATICS** *o* en la palabra **TRIGONOMETRY**

5 Una estudiante va a la biblioteca. La probabilidad de que pida prestada una obra de ficción es 0,40; de que pida una obra de no ficción, 0,30; y de que pida una obra de cada clase, 0,20.
- **a** ¿Cuál es la probabilidad de que la estudiante pida prestada una obra de ficción, de no ficción o ambas?
- **b** ¿Cuál es la probabilidad de que la estudiante no pida prestada ninguna obra?

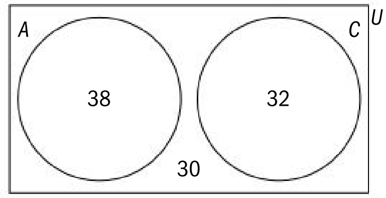
PREGUNTAS TIPO EXAMEN

6 En un camino, $\frac{1}{3}$ de las casas no reciben periódicos. Si $\frac{1}{4}$ reciben el periódico nacional y $\frac{3}{5}$ el periódico local, ¿cuál es la probabilidad de que una casa elegida al azar reciba ambos?

7 Si X e Y son dos sucesos tales que $P(X) = \frac{1}{4}$ y $P(Y) = \frac{1}{8}$ y $P(X \cap Y) = \frac{1}{8}$, halle:
- **a** $P(X \cup Y)$
- **b** $P(X \cup Y)'$

8 Si $P(A) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$, halle:
- **a** $P(A \cup B)$
- **b** $P(A \cup B)'$
- **c** $P(A' \cup B)$

Sucesos mutuamente excluyentes



En una encuesta estudiantil se encuentra que 32 estudiantes juegan al ajedrez. Los clubes de ajedrez y tiro al arco funcionan los mismos días a la misma hora, por lo tanto, un estudiante no puede hacer ajedrez y tiro con arco.

Los sucesos A y C se denominan sucesos **mutuamente excluyentes**. Son sucesos cuyos resultados no pueden ocurrir al mismo tiempo. Aquí podemos observar que los círculos no se solapan, por lo tanto $n(A \cap C) = 0$ y en consecuencia $P(A \cap C) = 0$.

Ahora $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - 0$.

En general, si dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes, $P(A \cap B) = 0$.

De aquí que podemos adaptar la regla de la adición para estos casos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

➔ En general, si A y B son mutuamente excluyentes, $P(A \cap B) = 0$ y $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo 6

Una caja contiene marcadores para tableros de varios colores. Un profesor extrae un marcador al azar. La probabilidad de extraer un marcador rojo es $\frac{1}{5}$, y la probabilidad de extraer uno verde es $\frac{3}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de no extraer ni un marcador rojo ni un marcador verde?

Respuesta

Sea R el suceso "se extrae un marcador rojo". Sea V el suceso "se extrae un marcador verde".	*Primero definir la notación*
$P(R \cup V) = P(R) + P(V)$	*R y V son sucesos mutuamente excluyentes. El profesor extrae cualquiera, rojo o verde, pero no ambos colores.*
$= \frac{1}{5} + \frac{3}{7} = \frac{22}{35}$	
$P(R \cup V)' = 1 - \frac{22}{35} = \frac{13}{35}$	*Dado que P(A′) = 1 – P(A)*

Ejercitación 3D

1 He aquí algunos sucesos relacionados con la tirada de dos dados:

A: ambos dados muestran un 4
B: el total es 7 o más
C: hay al menos un 6
D: los dos dados muestran el mismo número
E: ambos dados muestran números impares

¿Cuáles de los siguientes pares de sucesos son mutuamente excluyentes?

a A y B **b** A y C **c** A y D **d** A y E
e B y E **f** C y D **g** B y C

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Dos sucesos N y M son tales que $P(N) = \frac{1}{5}$ y $P(M) = \frac{1}{10}$ y $P(N \cup M) = \frac{3}{10}$. ¿Son N y M mutuamente excluyentes?

3 En un grupo de 89 estudiantes, 30 son estudiantes de primer año y 27 son estudiantes de segundo año. Halle la probabilidad de que un estudiante elegido al azar de este grupo sea de primer año o de segundo año.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 En un certamen interescolar, la probabilidad de que la escuela A gane la competencia es $\frac{1}{3}$, la probabilidad de que gane la escuela B es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que gane la escuela C es $\frac{1}{5}$.

Halle la probabilidad de que:

a A o B gane la competencia.

b Gane A, B o C.

c Ninguna de estas escuelas gane la competencia.

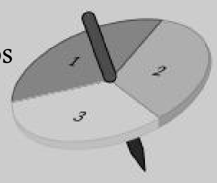
3.3 Diagramas del espacio muestral y la regla del producto

Es posible enumerar todos los resultados posibles de un experimento si no hay demasiados.

Una pregunta puede pedir que se enumeren todos los resultados posibles.

Ejemplo 7

Se hace girar tres veces una perinola equilibrada con los números 1, 2 y 3 estampados en ella. Enumere todos los resultados posibles de este experimento.
A partir de lo anterior, halle la probabilidad de que el resultado de la última jugada sea mayor que los dos primeros resultados.



Respuesta

Los 27 resultados son:

1 1 1	1 2 1	1 3 1
1 1 2	1 2 2	1 3 2
1 1 3	**1 2 3**	1 3 3
2 1 1	2 2 1	2 3 1
2 1 2	2 2 2	2 3 2
2 1 3	**2 2 3**	2 3 3
3 1 1	3 2 1	3 3 1
3 1 2	3 2 2	3 3 2
3 1 3	3 2 3	3 3 3

En los cinco valores resaltados, el último número de la jugada es mayor que los de los dos tiros anteriores.

De aquí que la probabilidad es $\frac{5}{27}$.

Cuando enumere todos los resultados, necesita ser sistemático para no omitir ninguno.

Diagramas del espacio muestral

Otra forma de mostrar todos los resultados posibles de un suceso es mediante un diagrama del espacio muestral.

Los diagramas del espacio muestral también se denominan "diagramas del espacio de probabilidades".

Ejemplo 8

Dibuje un diagrama del espacio muestral para representar los totales obtenidos cuando se arrojan dos dados. Halle la probabilidad de:

a Obtener un total de 6 **b** Tirar un doble **c** Obtener un total menor que 6

Respuestas

	DADO 1					
DADO 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

(1, 1) da un total de 2, (4, 6) da un total de 10.

Hay 36 resultados posibles representados en este diagrama.

a $P(6) = \frac{5}{36}$

Las cinco formas posibles de obtener un total de 6 aparecen resaltadas.

	DADO 1					
DADO 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

b $P(\text{doble}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Las seis formas posibles de tirar un doble aparecen resaltadas.

	DADO 1					
DADO 2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

▶ Continúa en la página siguiente.

c $P(\text{total} < 6) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Las 10 formas posibles de obtener un total menor a 6 aparecen resaltadas.

		DADO 1					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
DADO 2	**1**	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Ejemplo 9

En un experimento se lanza una moneda y se arroja un dado.
Dibuje un diagrama del espacio muestral para este experimento.
Halle la probabilidad de obtener una cara en la moneda (C) y un número menor que 3 (T) en el dado, en un solo experimento.

Respuesta

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
C	(1, C)	(2, C)	(3, C)	(4, C)	(5, C)	(6, C)
T	(1, T)	(2, T)	(3, T)	(4, T)	(5, T)	(6, T)

$P(\text{cara y número menor que 3}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Los resultados que dan una cara y un número menor que 3 aparecen sombreados.

Ejercitación 3E

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Se lanzan tres monedas equilibradas una después de otra y se anotan los resultados. Un posible resultado es que todas las monedas salgan cara (C). Esto se escribe como CCC. Otra es que las dos primeras monedas salgan cara y la última ceca (X). Esto puede escribirse como CCX.
Enumere todo el espacio muestral para este experimento aleatorio. Halle la probabilidad de que:

a El número de caras sea mayor que el de cecas.
b Se obtengan al menos dos caras consecutivas.
c Se obtengan caras y cecas alternativamente.

Una moneda no cargada (equilibrada) es aquella en la que es tan probable que salga cara como ceca.

2 Dibuje el diagrama del espacio muestral para el experimento aleatorio "Dos dados tetraédricos, uno azul y el otro rojo, tienen caras numeradas del 1 al 4. Se lanzan y se anota el resultado".
Halle la probabilidad de que:

a El número en el dado rojo sea mayor que el del dado azul.
b La diferencia entre los números de los dados sea uno.
c El dado rojo muestre un número impar y el dado azul muestre un número par.
d La suma de los números de los dados sea un número primo.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Una caja contiene tres cartones marcados con los números 1, 2, 3. Una segunda caja contiene cuatro cartones marcados con los números 2, 3, 4, 5. Un cartón se escoge al azar de cada caja. Dibuje el diagrama del espacio muestral para el experimento aleatorio.

Halle la probabilidad de que:

a Los cartones tengan el mismo número.

b El mayor de los dos números extraídos sea 3.

c La suma de los números de los cartones sea menor que 7.

d El producto de los números de los cartones sea al menos 8.

e Se escoja al menos un número par.

4 Seis cartones, numerados 0, 1, 2, 3, 4 y 5, se colocan en una bolsa. Se extrae uno al azar, se anota el número y luego se repone en la bolsa. Luego, se elige un segundo cartón. Dibuje el diagrama del espacio muestral para el experimento aleatorio.

Halle la probabilidad de que:

a Los cartones tengan el mismo número.

b El mayor de los números extraídos sea primo.

c La suma de los dos números en los cartones sea menor que 7.

d El producto de los números de los cartones sea al menos 8.

e Se escoja al menos un número par.

5 Tomás juega a un entretenimiento con un dado, llamado "Vaya y venga". Arroja el dado. Si el resultado es 1, avanza un metro. Si es 2, se mueve un metro a la derecha. Si es 3, retrocede un metro. Si es 4, se mueve un metro a la izquierda. Si es 5 o 6, se queda en la posición donde está.

Tomás arroja el dado dos veces. Hace dos pasos. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra lo siguiente?

a Esté en el mismo punto donde comenzó.

b Esté exactamente a dos metros de distancia de su posición original.

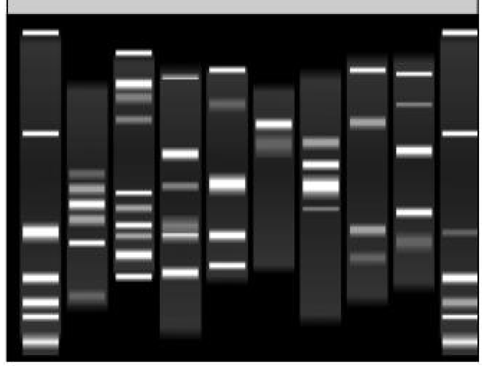
c Esté a más de uno pero menos de dos metros de distancia de su posición original.

Huellas genéticas

El método de las huellas genéticas fue desarrollado en 1984 por Alec Jeffreys, catedrático de la Universidad de Leicester. Cada uno de nosotros tenemos una única composición genética que está contenida en el ADN, que heredamos de nuestros padres.

El ADN puede extraerse de las células y fluidos corporales y analizarse para producir nuestra "huella genética", como se muestra más abajo.

Cuando se comparan huellas genéticas es usual comparar estas bandas. Algunas de estas comparaciones se usaron como pruebas para condenar a los criminales, pero el procedimiento está siendo investigado debido a la dependencia de factores probabilísticos. Comúnmente se examinan y comparan entre 10 y 20 bandas. Las pruebas empíricas sugieren que la probabilidad de que una banda concuerde por mera coincidencia es $\frac{1}{4}$, aunque este valor es debatible. La probabilidad de que dos bandas coincidan será consecuentemente de $\frac{1}{16}$.



Regla del producto para sucesos independientes

Cuando se arrojan un dado y una moneda, tal como en el ejemplo 9 de la página anterior, los sucesos resultan **independientes.** Esto se debe a que el resultado de la moneda no influye en el resultado del dado y viceversa.

➔ Dos sucesos A y B son independientes si la probabilidad de que ocurra uno no afecta la probabilidad de que ocurra el otro.

He aquí el espacio muestral para un dado y una moneda.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
C	(1, C)	(2, C)	(3, C)	(4, C)	(5, C)	(6, C)
T	(1, T)	(2, T)	(3, T)	(4, T)	(5, T)	(6, T)

Se define el suceso C como "la moneda sale cara".

Del diagrama:

$$\mathrm{P}(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Se define el suceso T como "el dado muestra un número menor que 3".

$$\mathrm{P}(T) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(C \cap T) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Hay dos resultados donde la moneda sale cara y el dado muestra un número menor que 3.

Pero también podemos notar que:

$$\mathrm{P}(C \cap T) = \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}(T)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

➔ Cuando dos sucesos A y B son independientes
$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$

Esta es la **regla del producto para sucesos independientes**. También se denomina "regla de la multiplicación".

Los diagramas del espacio muestral pueden ayudar a visualizar el número de resultados posibles, pero no siempre es necesario dibujar uno.

Ejemplo 10

Una bolsa contiene 3 bolillas rojas y 2 blancas, otra bolsa contiene 1 roja y 4 blancas. Se selecciona una bolilla al azar de cada caja. Halle la probabilidad de que:

a Ambas bolillas sean rojas. **b** Las bolillas sean de diferentes colores.
c Al menos una de las bolillas sea blanca.

Respuestas

a De la primera bolsa $\mathrm{P}(R_1) = \frac{3}{5}$

De la segunda bolsa $\mathrm{P}(R_2) = \frac{1}{5}$

En consecuencia, $\mathrm{P}(R_1 \cap R_2)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$

Los sucesos "tomar una bolilla roja de la bolsa" (R_1) y "tomar una bolilla roja de la bolsa" (R_2) son independientes. En R_1 hay 3 bolillas rojas de un total de 5. En R_2 hay 1 bolilla roja de un total de 5.
Los sucesos R_1 y R_2 son independientes, entonces $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2)$.

▶ Continúa en la página siguiente.

b De la primera bolsa $P(R_1) = \frac{3}{5}$ De la segunda bolsa $P(B_2) = \frac{4}{5}$ En consecuencia, $P(R_1 \cap B_2)$ $= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$ De la primera bolsa $P(B_1) = \frac{2}{5}$ De la segunda bolsa $P(R_2) = \frac{1}{5}$ En consecuencia, $P(B_1 \cap R_2)$ $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$	*Si las bolillas son de colores diferentes significa que o bien la primera es roja y la segunda blanca, o bien la primera es blanca y la segunda roja.*
P(colores diferentes) = $P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2)$ $\frac{12}{25} + \frac{2}{25} = \frac{14}{25}$	*Estos sucesos son mutuamente excluyentes.*
c P(al menos una blanca) = 1 – probabilidad de que ambas sean rojas $= 1 - P(R_1 \cap R_2)$ $= 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}$	*Para "al menos una de las bolillas es blanca",* ***podríamos*** *calcular la probabilidad de que ambas sean blancas, la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda roja y la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda blanca, y sumar estas probabilidades.* ***O*** *Si al menos una es blanca, significa que ambas no pueden ser rojas.* *Este es un método usual de resolver problemas que contengan las palabras "… al menos…". Calculamos: 1 – la probabilidad del complemento del suceso.*

Ejercitación 3F

1 Mi guardarropas contiene cinco camisas: una azul, una marrón, una roja, una blanca y una negra. Abro el guardarropa y escojo una camisa sin mirar. Repongo esta camisa y luego escojo otra. ¿Cuál es la probabilidad de que elija la camisa roja las dos veces?

2 Se elige al azar un naipe de un mazo de 52. Se repone y se escoge un segundo naipe. ¿Cuál es la probabilidad de que se elija un rey y un diez?

Para las preguntas de la 2 a la 8, posiblemente necesite recordar el juego de naipes: vea la página 73.

3 Se lleva a cabo una encuesta sobre la comida que se sirve en la cafetería de una gran escuela. Se halló que a $\frac{4}{5}$ de los estudiantes les gusta la pasta. Tres estudiantes se eligen al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que a los tres les guste la pasta?

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Adán juega un partido de cricket y un partido de hockey durante el fin de semana.

La probabilidad de que su equipo gane el partido de cricket es 0,75, y la probabilidad de que gane el partido de hockey es 0,85. Suponga que los resultados de los partidos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo de Adán gane ambos partidos?

5 Los sucesos A, B y C son tales que A y B resultan mutuamente excluyentes y $P(A) = 0{,}2$; $P(C) = 0{,}3$; $P(A \cup B) = 0{,}4$ y $P(B \cup C) = 0{,}34$.

a Calcule $P(B)$ y $P(B \cap C)$.
b Determine si B y C son independientes.

6 Se lanza una moneda y se arroja un dado de seis caras. Halle la probabilidad de que se obtenga una cara en la moneda y no un 6 en el dado.

7 Un misil aire-aire tiene una probabilidad de $\frac{8}{9}$ de dar en el blanco. Si se lanzan cinco misiles, ¿cuál es la probabilidad de que el blanco no sea destruido?

8 Se escogen cuatro naipes de un mazo de 52 cartas, con reposición. ¿Cuál es la probabilidad de escoger 4 corazones, uno tras otro?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

9 Sabiendo que $P(E') = P(F) = 0{,}6$ y $P(E \cap F) = 0{,}24$

a Escriba $P(E)$.
b Explique por qué E y F son independientes.
c Explique por qué E y F no son mutuamente excluyentes.
d Halle $P(E \cup F')$.

10 Tres bolsas contienen 4 canicas rojas y 8 canicas azules cada una. Se escoge al azar una canica de cada bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea roja, la segunda canica sea azul y la tercera roja?

11 Un dado de seis caras está numerado: 1, 2, 2, 5, 6, 6. Se lo lanza tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 6?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

12 A y B son sucesos independientes tales que $P(A) = 0{,}9$ y $P(B) = 0{,}3$. Halle:

a $P(A \cap B)$ **b** $P(A \cap B')$ **c** $P(A \cup B)'$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

13 Los sucesos independientes G y H son tales que $P(G \cap H') = 0{,}12$ y $P(G' \cap H) = 0{,}42$.
Dibuje un diagrama de Venn para representar los sucesos G y H.
Sea $P(G \cap H) = x$.
Halle dos posibles valores de x.

14 Se arrojan cuatro dados. Halle la probabilidad de que:
- **a** Los cuatro dados muestren un 6.
- **b** Los cuatro dados muestren el mismo número.

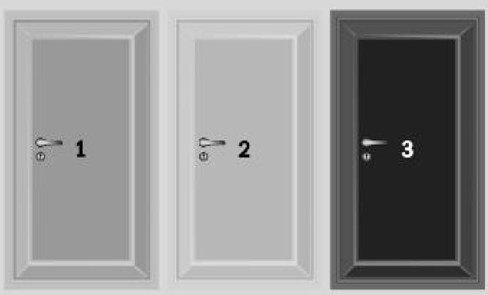
15 ¿Qué es más probable: obtener un 6 en cuatro tiradas de un dado, u obtener un doble 6 en 24 tiradas de dos dados?

Esta es la pregunta que se abordó en la investigación con dados de la página 64.

16 Un programa produce (independientemente) tres dígitos al azar del 0 al 9. Por ejemplo:
247 o 309 o 088 o 936
- **a** Halle la probabilidad de que ninguno de los tres dígitos sea un 5.
- **b** Halle la probabilidad que al menos un dígito sea un 5.

Investigación: el dilema de Monty Hall

El siguiente es un famoso acertijo de probabilidad que se basa en un programa de televisión estadounidense conocido como "Hagamos un trato".



El nombre proviene del anfitrión original del programa, Monty Hall. Suponga que usted participa del juego y le dan la posibilidad de elegir entre tres puertas. Detrás de una de las puertas se encuentra el premio principal (un automóvil) y detrás de las otras dos puertas hay fiascos, premios no deseados. El automóvil y los premios no deseados se colocan aleatoriamente detrás de las puertas, antes del programa.

Las reglas del juego son: después de elegir la puerta, esta permanece cerrada por el momento. Monty Hall, que sabe qué hay detrás de las puertas, abre una de las dos restantes y siempre revela uno de los premios no deseados. Luego de abrir una de las puertas y mostrar el fiasco, Monty Hall le pregunta al participante si desea continuar con su primera elección de puerta o cambiar por la puerta restante.

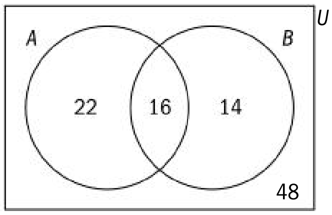
¿Qué haría usted?

- **a** Mantenerse con su primera elección.
- **b** Cambiar a la puerta cerrada restante.
- **c** En realidad no importa. La probabilidad es la misma en ambos casos.

Volveremos a ver este problema al finalizar el capítulo.

3.4 Probabilidad condicionada

He aquí un diagrama de Venn que muestra a los estudiantes que practican tiro con arco y bádminton.



Si sabemos que un estudiante en particular practica bádminton, ¿cómo afecta a la probabilidad de que también practique tiro con arco?

En total, 30 estudiantes practican bádminton; 16 de estos practican tiro con arco.

Escribimos la probabilidad de que un estudiante practique tiro con arco sabiendo que practica bádminton como $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Notamos que:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

Esto se conoce como **probabilidad condicionada**, dado que el resultado de A **depende** del resultado de B.

Además, se deduce que $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\frac{16}{100}}{\frac{30}{100}}$

$$= \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

> ➔ En general, para dos sucesos A y B la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurrió B puede hallarse usando:
>
> $$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Si reordenamos la fórmula, nos da:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \mid B) \times \mathrm{P}(B)$$

> ➔ Si A y B son sucesos independientes,
> $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \mid B') = \mathrm{P}(A)$
> y $\mathrm{P}(B \mid A') = \mathrm{P}(B)$

Recuerde que para sucesos independientes $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$. Por definición, para sucesos independientes A y B, la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurrió B será igual que la probabilidad de A, puesto que el hecho de que ocurra B no afecta a A.

Ejemplo 11

De los 53 miembros del personal del colegio, 36 beben té, 18 beben café y 10 no beben té ni café.

a ¿Cuántos miembros del personal toman té y café?

Un miembro del personal se elige al azar.

Halle la probabilidad de que:

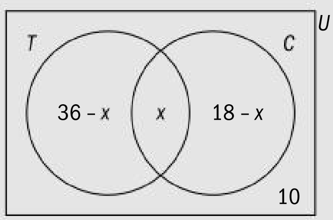
b Beba té pero no café.

c Sabiendo que bebe té, también beba café.

d Sabiendo que bebe té, no beba café.

Respuestas

a



Dibujar un diagrama de Venn para mostrar la información

Sea $n(T \cap C) = x$.

Por lo tanto,

$36 - x + x + 18 - x + 10 = 53$

$64 - x = 53$

$x = 11$

$n(T \cap C)$ es el número que beben café y té.

53 es el total de miembros del personal en el diagrama de Venn.

Resolver en x

Hay 11 personas que beben té y café.

b $\mathrm{P}(T \cap C') = \frac{25}{33}$

36 – 11 = 25

c $\mathrm{P}(C|\,T) = \frac{\mathrm{P}(C \cap T)}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\frac{11}{53}}{\frac{36}{53}}$

$= \frac{11}{53} \times \frac{53}{56} = \frac{11}{36}$

d $\mathrm{P}(C'\,|\,T) = \frac{\mathrm{P}(C' \cap T)}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\frac{25}{53}}{\frac{36}{53}}$

$P(C' \cap T) = P(T \cap C')$

$= \frac{25}{\cancel{53}} \times \frac{\cancel{53}}{36} = \frac{25}{36}$

Ejercitación 3G

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Hay 27 estudiantes en una clase. 15 toman clases de Artes Visuales y 20 toman clases de Teatro. Cuatro no toman ninguna de estas dos asignaturas. ¿Cuántos estudiantes toman clases de ambas asignaturas?

Una persona se elige al azar. Halle la probabilidad de que:

a Él o ella tomen clases de Teatro pero no de Artes Visuales.

b Él o ella tomen clases de al menos una de las dos asignaturas.

c Él o ella tomen clases de Teatro, sabiendo que él o ella toman clases de Artes Visuales.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Para los sucesos A y B se sabe que: $P(A' \cap B') = 0{,}35$; $P(A) = 0{,}25$; $P(B) = 0{,}6$. Halle:

a $P(A \cap B)$ **b** $P(A|B)$ **c** $P(B'|A')$

3 El 48% de los adolescentes poseen patinetas y el 39% de los adolescentes poseen patinetas y patines de ruedas. ¿Cuál es la probabilidad de que un adolescente posea un patín de ruedas sabiendo que posee una patineta?

4 Se elige un número al azar de la siguiente lista de ocho números:

1 2 4 7 11 16 22 29

Halle:

a P(sea par | no es un múltiplo de 4)
b P(sea menor que 15 | es mayor que 5)
c P(sea menor que 5 | es menor que 15)
d P(esté comprendido entre 10 y 20 | está comprendido entre 5 y 25)

5 En mi ciudad, el 95% de todos los hogares cuentan con un computador de escritorio. El 61% de todos los hogares tienen computador de escritorio y computador portátil. ¿Cuál es la probabilidad de que un hogar dado cuente con computador portátil sabiendo que cuenta con computador de escritorio?

6 La probabilidad de que un estudiante tome clases de Tecnología del Diseño y Español es 0,1. La probabilidad que un estudiante tome clases de Tecnología del Diseño es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante tome clases de Español sabiendo que toma clases de Tecnología del Diseño?

7 U y V son sucesos mutuamente excluyentes. $P(U) = 0{,}26$; $P(V) = 0{,}37$. Halle:

a $P(U$ y $V)$ **b** $P(U | V)$ **c** $P(U$ o $V)$.

8 Una profesora tomó a su clase una prueba 1 del IB y una prueba 2 del IB. El 35% de la clase pasó ambos exámenes y el 52% de la clase pasó la prueba 1. ¿Qué porcentaje de aquellos que pasaron la prueba 1 también pasaron la prueba 2?

9 Una jarra contiene canicas negras y blancas. Dos canicas se escogen al azar, sin reposición. La probabilidad de elegir una canica negra y luego una blanca es 0,34, y la probabilidad de elegir una canica negra en la primera extracción es 0,47. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una canica blanca en la segunda extracción sabiendo que la primera canica extraída fue negra?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

10 La tabla a continuación contiene el número de jugadores de tenis de mesa diestros y zurdos en una muestra de 50 hombres y mujeres.

	Zurdos	Diestros	Total
Hombres	5	32	37
Mujeres	2	11	13
Total	7	43	50

Un jugador de tenis de mesa fue elegido al azar del grupo. Halle la probabilidad de que la persona sea:

a Un hombre zurdo **b** Diestra
c Diestra, sabiendo que es mujer

11 J y K son sucesos independientes. Dado que $P(J \mid K) = 0{,}3$ y $P(K) = 0{,}5$, halle $P(J)$.

12 Su vecino tiene dos hijos. Usted sabe que tiene un hijo llamado Samuel. ¿Cuál es la probabilidad de que Samuel tenga un hermano varón?

¡No resulta tan obvio como parece!

Investigación: volvemos al problema de Monty Hall

Consideremos una situación en el juego. Supongamos que el participante haya elegido la puerta 3 y Monty Hall revele que hay un premio no deseado detrás de la puerta 2.

¿Cuál es la probabilidad condicionada de que el automóvil esté detrás de la puerta 1?

Sea A la condición de que el automóvil esté detrás de la puerta 1 y el participante ha elegido la puerta 3.

Sea B la condición de que Monty Hall haya revelado que hay un premio no deseado detrás de la puerta 2 sabiendo que el participante ha elegido la puerta 3.

Análisis del problema de Monty Hall usando probabilidades condicionadas

La probabilidad de A y B ($P(A \cap B)$) es solamente $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ porque si el automóvil está detrás de la puerta 1 y el participante ha elegido la puerta 3, Monty Hall tiene que mostrar qué hay detrás de la puerta 2.

El problema es el cómputo de la probabilidad de haber mostrado un premio no deseado detrás de la puerta 2 sabiendo que la elección fue la puerta 3. Esta situación puede darse de dos maneras:

1 Cuando el auto está detrás de la puerta 1

2 Cuando el auto está detrás de la puerta 3

La primera tiene una probabilidad de $\frac{1}{9}$, como se mostró anteriormente.

En la segunda situación, el anfitrión podría revelar cualquiera: lo que hay detrás de la puerta 1 o la puerta 2. Si el anfitrión elige aleatoriamente (equiprobablemente) entre las dos puertas, entonces la probabilidad de mostrar lo que hay detrás de la puerta 2 es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$. Por lo tanto, la probabilidad de que se revele un premio no deseado detrás de la puerta 2 cuando el participante ha elegido la puerta 3 es $\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{3}{18}$.

Esto es $P(B)$, la probabilidad de B.

Queremos la probabilidad condicionada, $P(A \mid B)$. Está dada por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{18}} = \frac{2}{3}.$$

Esto significa que la probabilidad condicionada de que el automóvil esté detrás de la puerta 3 sabiendo que el participante ha elegido la puerta 3 y le hayan mostrado que hay un premio no deseado detrás de la puerta 2 es solamente $\frac{1}{3}$. Consecuentemente, ¡vale la pena cambiar!

3.5 Diagramas de árbol de probabilidad

Los diagramas de árbol resultan útiles para problemas donde ocurre más de un suceso. Algunas veces resulta más sencillo emplearlos en lugar de enumerar todos los resultados. Es importante leer la pregunta cuidadosamente y distinguir entre los diferentes tipos de situaciones.

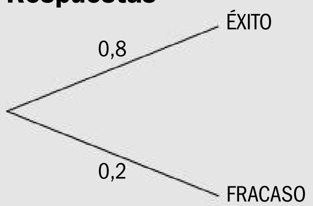
Probabilidad con reposición y sucesos repetidos

Ejemplo 12

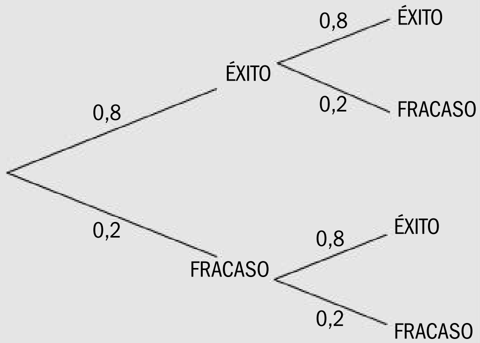
La probabilidad de que Samuel, un miembro entusiasta del club de tiro con arco del colegio, dé en la diana es 0,8. Samuel intenta dos tiros. Suponga que el éxito de cada tiro es independiente del resultado del tiro anterior.
Represente esta información es un diagrama de árbol.
Halle la probabilidad de que Samuel:

a Dé dos veces en la diana.
b Dé en la diana una sola vez.
c Dé en la diana al menos una vez.

Respuestas



La primera rama del diagrama de árbol representa el primer tiro de Samuel. Tendrá éxito en dar en la diana o fracasará.
La probabilidad de que fracase es 1 – 0,8 = 0,2.
El resultado se muestra al final de la rama, la probabilidad se coloca al lado de cada rama.



El segundo tiro dará en la diana exitosamente o fracasará.
En consecuencia, hay cuatro resultados posibles para este "experimento":
Un éxito seguido de un éxito (E y E)
Un éxito seguido de un fracaso (E y F)
Un fracaso seguido de un éxito (F y E)
Un fracaso seguido de un fracaso (F y F)

a Queremos hallar P(E y E).
Por lo tanto, P(E y E) = 0,8 × 0,8
= 0,64

Dado que un éxito en el primer tiro es independiente de un éxito en el segundo tiro, podemos multiplicar las probabilidades (regla del producto). Multiplicamos a lo largo de las dos primeras ramas.

b P(E y F) + P(F y E)
= (0,8 × 0,2) + (0,2 × 0,8)
= 0,32

Un solo éxito podría darse si el primer tiro da en la diana y el segundo no, o si el primer tiro no da en la diana y el segundo sí. Estos dos sucesos (E y F) y (F y E) son mutuamente excluyentes: no pueden ocurrir simultáneamente. Multiplicamos a lo largo de cada rama (ya que nuevamente los sucesos son independientes) y luego sumamos (ya que los sucesos resultan mutuamente excluyentes).

c P(al menos un éxito)
= 1 – (0,2 × 0,2)
= 1 – 0,04
= 0,96

Aquí necesitamos 1 – P(fracaso en dar en la diana las dos veces). Por lo tanto, tenemos 1 – P(F y F).

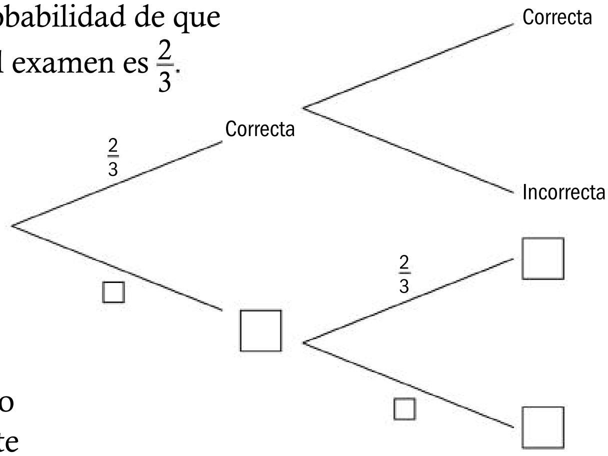
Ejercitación 3H

1 Liz contesta dos preguntas de examen. La probabilidad de que conteste correctamente cualquier pregunta del examen es $\frac{2}{3}$.

a Copie y complete el diagrama.

b ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente solo una pregunta?

c ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente al menos una?



2 Cuando Laura y Michelle juegan en el equipo de hockey, la probabilidad de que Laura anote es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que lo haga Michelle es $\frac{1}{2}$.
Dibuje un diagrama de árbol para ilustrar esta información y úselo para hallar la probabilidad que ninguna de las dos anote en el próximo partido.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Hay igual número de niños y niñas en una escuela y se sabe que $\frac{1}{10}$ de los varones y $\frac{1}{10}$ de las niñas llegan caminando a la escuela. Además, $\frac{1}{3}$ de los niños y $\frac{1}{2}$ de las niñas vienen en automóvil. El resto llega en autobús.
Determine:

a La proporción de alumnos de la escuela que son niñas que llegan en autobús

b La proporción de alumnos de la escuela que llegan en autobús

> En la pregunta 3, el diagrama tendrá dos ramas en la primera sección, cada una de las cuales tendrá tres ramas en la segunda sección.

4 Determine la probabilidad de obtener dos caras en tres lanzamientos de una moneda no equilibrada para la cual $P(\text{cara}) = \frac{2}{3}$.

5 Un dado de 10 caras tiene los números 1–10 escritos en ellas. Se lo arroja dos veces. Halle la probabilidad de que:

a Se obtenga exactamente un número primo.

b Se obtenga al menos un número primo.

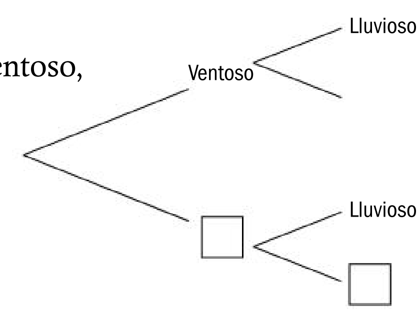
PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 La probabilidad de que un día sea ventoso es 0,6. Si está ventoso, la probabilidad de que llueva es 0,4. Si no está ventoso, la probabilidad de que llueva es 0,2.

a Copie y complete el diagrama de árbol.

b ¿Cuál es la probabilidad de que un día dado llueva?

c ¿Cuál es la probabilidad de que **no** llueva dos días consecutivos?



Probabilidad sin reposición y probabilidad condicionada

Ejemplo 13

Una bolsa contiene 5 bolillas grises y 6 bolillas rojas. Si se extraen dos bolillas en forma consecutiva, sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra lo siguiente?

a Se haya elegido al menos una gris.

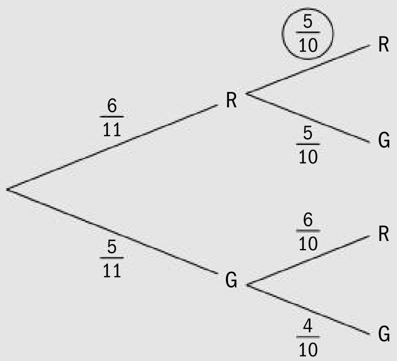
b Se haya tomado una roja en la primera extracción sabiendo que se ha elegido al menos una gris.

Esto significa que la probabilidad de la segunda extracción depende del resultado de la primera extracción, puesto que se quitó la bolilla después de la primera extracción.

Respuestas

Dado que en primer lugar se ha extraído una bolilla roja, quedarán 5 bolillas rojas (y 5 grises).

Dibuje un diagrama de árbol. Las probabilidades de la segunda rama dependen de lo que ha ocurrido en la primera rama.



a P(al menos una gris)

= 1 – P(ambas rojas)

$$= 1 - \left(\frac{6}{11} \times \frac{5}{10}\right) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$$

Resulta más rápido calcular la probabilidad de esta forma que calcular la probabilidad de gris en la primera extracción, o gris en la segunda extracción o gris en ambas extracciones.

b P(roja seguida de gris)

$$= \frac{P(\text{roja en la primera y al menos una gris})}{P(\text{al menos una gris})}$$

$$= \frac{\frac{6}{11} \times \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{10}_{2}}}{\frac{8}{11}} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{8}{11}} = \frac{3}{8}$$

Cuando la roja se selecciona primero, la probabilidad de que la segunda sea gris es $\frac{5}{10}$, por lo tanto multiplicamos estas probabilidades.

Algunos diagramas de árbol no tienen la disposición “clásica” que hemos visto hasta el momento.

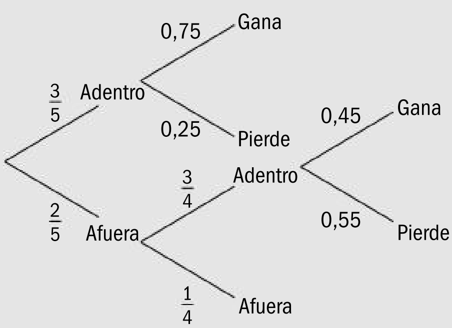
Ejemplo 14

Tobías es una estrella en ascenso del club de tennis del colegio. Sabe que, cuando logra colocar adentro el primer servicio, la probabilidad de que gane el punto es 0,75. Cuando usa su segundo servicio, hay una posibilidad de 0,45 de que él gane el punto. Logra colocar el primer servicio adentro en 3 de 5 ocasiones y su segundo servicio en 3 de 4 ocasiones.

a Halle la probabilidad de que Tobías gane el punto la próxima vez que le toque el servicio.

b Sabiendo que Tobías ganó el punto, ¿cuál es la probabilidad de que haya colocado adentro su primer servicio?

Respuestas



En este diagrama, no es necesario continuar las ramas una vez que se ha conseguido el punto.

a P(gane)= P(coloca adentro el primer servicio y gana) + P(pierde el primer servicio, coloca adentro el segundo servicio y gana)

$$\left(\frac{3}{5}\times 0{,}75\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times 0{,}45\right)$$

$= 0{,}45 + 0{,}135$

$= 0{,}585$

Multiplicamos a lo largo de las ramas.

b P(1.$^{\text{er}}$ adentro | gana el punto)

$$= \frac{\mathrm{P}\left(1.^{\text{er}}\ \text{adentro y gane el punto}\right)}{\mathrm{P}(\text{gane el punto})}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{5}\times 0{,}75\right)}{0{,}585} = 0{,}769\ (3\ \text{cs})$$

Ambos valores se hallaron en el apartado ***a****.*
Esta respuesta se dio con 3 cs dado que la respuesta exacta (en forma de fracción) no es obvia.

Ejercitación 3I

1 Se extraen tres naipes al azar de un mazo de naipes. Los naipes no se reponen. Halle la probabilidad de obtener:

a Tres figuras **b** Dos figuras

Vea la página 73 para el mazo común de 52 naipes de juego.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Una caja contiene 5 lapiceras sin tinta y 7 con tinta. Un niño, en primer lugar, y una niña, a continuación, eligen una lapicera cada uno.

a ¿Cuál es la probabilidad de que elijan dos sin tinta?

b ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las lapiceras escogidas no tenga tinta?

c Si se escoge exactamente una lapicera sin tinta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya escogido la niña?

Aunque la pregunta no lo pida, puede resultarle útil emplear un diagrama de árbol para responder a estas preguntas.

3 En una bolsa hay 4 bolillas rojas, 3 bolillas verdes y 2 amarillas. Se escoge una bolilla al azar y no se repone. Luego, se escoge una segunda bolilla.

a Halle P(las bolillas son ambas verdes).

b Halle P(las bolillas son del mismo color).

c Halle P(ninguna bolilla es roja).

d Halle P(al menos una bolilla es amarilla).

4 Cuatro bolillas se extraen al azar, una después de otra, sin reposición, de una bolsa que contiene las siguientes bolillas:
5 rojas, 4 azules, 3 naranjas, 2 púrpuras.
Halle la probabilidad de obtener una de cada color.

5 Un club tiene 10 miembros de los cuales 6 son mujeres y 4 varones. Uno de los miembros del club se elige al azar para ser el presidente del club.

a Halle la probabilidad de que el presidente elegido sea varón.

b Dos personas se eligen al azar para representar al club en una competencia. Halle la probabilidad de que se elijan un varón y una mujer.

6 Guillermo responde correctamente un promedio de 5 preguntas de cada 7. El promedio de Natacha es de 5 preguntas de cada 9. Ambos contestan la misma pregunta.

a ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los estudiantes conteste la pregunta correctamente?

b Si la pregunta fue respondida correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que la respuesta correcta la haya obtenido Guillermo?

c Si la pregunta fue respondida correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que la respuesta correcta la haya obtenido Natacha?

d Si hubo al menos una respuesta correcta, ¿cuál es la probabilidad de que haya habido dos?

Material de ampliación disponible en línea:
Hoja de ejercicios 3: Probabilidad condicionada

Ejercicios de revisión

1 Se anota al azar un número de dos dígitos entre 10 y 99 inclusive. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra lo siguiente?

a Sea divisible por 5. **b** Sea divisible por 3.

c Sea mayor que 50. **d** Sea un cuadrado.

2 En una clase de 30 alumnos, 18 tienen perro, 20 tienen gato y 3 no tienen ninguno de los dos. Se escoge un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante tenga un perro y un gato?

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Para los sucesos C y D se sabe que:
$P(C) = 0{,}7 \quad P(C' \cap D') = 0{,}25 \quad P(D) = 0{,}2$.

a Halle $P(C \cap D')$.

b Explique por qué C y D no son sucesos independientes.

4 Los sucesos A y B son tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}2$ y $P(A \mid B) = 0{,}1$.

Calcule las probabilidades de que:

a Ocurran ambos sucesos.

b Ocurra al menos uno de los sucesos.

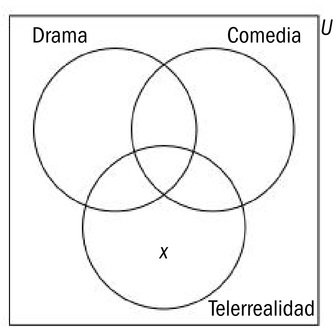
c Ocurra exactamente uno de los sucesos.

d Ocurra B sabiendo que ha ocurrido A.

5 A un grupo de 100 estudiantes se les pregunta cuáles de los tres tipos de programas de televisión: drama, comedia y telerrealidad, miran regularmente. Ellos aportan la siguiente información:

15 miran los tres tipos de programas.
18 miran drama y comedia.
22 miran comedia y telerrealidad.
35 miran drama y telerrealidad.
10 no miran ninguno de los tres programas regularmente.

Los estudiantes que miran drama solamente son tres veces más que los que miran comedia solamente y los estudiantes que miran comedia solamente son dos veces más que aquellos que miran solamente telerrealidad.



a Si x es el número de estudiantes que miran únicamente programas de telerrealidad, escriba una expresión para el número de estudiantes que miran solamente drama.

b Usando toda la información dada, copie y complete el diagrama de Venn.

c Calcule el valor de x.

Ejercicios de revisión

1 Sea $P(C) = 0{,}4$; $P(D) = 0{,}5$; $P(C \mid D) = 0{,}6$.

a Halle P(*C* y *D*).

b ¿Son *C* y *D* mutuamente excluyentes? Dé una razón para su respuesta.

c ¿Son *C* y *D* sucesos independientes? Dé una razón para su respuesta.

d Halle P(*C* y *D*).

e Halle $P(D \mid C)$.

2 Juan hace $\frac{3}{5}$ de las tareas generales de la casa y Gilda hace el resto.

Si el 35% de los trabajos de Juan se terminan satisfactoriamente y el 55% de los trabajos de Gilda se terminan satisfactoriamente, halle la probabilidad de que un trabajo general de la casa haya sido realizado:

a Satisfactoriamente

b Por Gilda sabiendo que no es satisfactorio

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Cada día, Maximiliano viaja al colegio en bicicleta, en autobús o en automóvil. La probabilidad que viaje en autobús un día determinado es 0,6. La probabilidad de que viaje en bicicleta un día determinado es 0,3.

a Dibuje un diagrama de árbol que muestre los resultados posibles para los viajes de Maximiliano del lunes y el martes. Rotule claramente el árbol escribiendo las probabilidades para cada uno de los resultados.

b ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra lo siguiente?

i Viaje en bicicleta lunes y martes.

ii Viaje en bicicleta el lunes y en autobús el martes.

iii Viaje por el mismo medio de transporte el lunes y el martes.

c Maximiliano viajó a la escuela en bicicleta el lunes y el martes. ¿Cuál es la probabilidad de que no viaje al colegio en bicicleta el miércoles, jueves y viernes?

d ¿Cuál es la probabilidad de que en tres días cualesquiera Maximiliano viaje dos veces en automóvil y una vez en autobús o dos veces en bicicleta y una vez en automóvil?

4 Una bolsa contiene 6 manzanas rojas y 10 verdes. Sin mirar en la bolsa, Magdalena selecciona una manzana al azar.

a ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

La manzana es roja y Magdalena se la come. Luego, pasa la bolsa a Juana. Sin mirar en la bolsa, ella selecciona al azar una manzana.

b ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana sea verde?

La manzana es verde y Juana la devuelve a la bolsa. Le pasa la bolsa a Tomás. Sin mirar en la bolsa, elige al azar dos manzanas.

c ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 En un camino cuento 70 conejos, 42 son hembras, 34 no están comiendo zanahorias y 23 son hembras que no están comiendo zanahorias.
Dibuje un diagrama de Venn y a partir de lo anterior, halle el número de conejos hembra que están comiendo zanahorias.

a ¿Cuál es la probabilidad de que un conejo sea macho y no esté comiendo zanahorias?

b ¿Cuál es la probabilidad de que un conejo sea hembra sabiendo que está comiendo zanahorias?

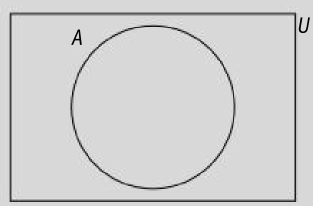
c ¿Resulta el hecho de ser hembra independiente de comer zanahorias? Justifique su respuesta.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

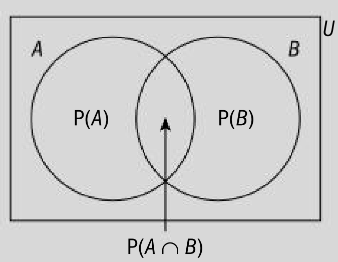
Definiciones

- Un **suceso** es el resultado de un experimento.
  Un **experimento** es el proceso por el cual obtenemos un resultado.
  Un **experimento aleatorio** es aquel en el cual existe incertidumbre acerca del suceso que pueda ocurrir.
- La probabilidad teórica de un suceso A es $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$,
  donde $n(A)$ es el número de maneras en que el suceso A puede ocurrir y $n(U)$ el número total de resultados posibles.
- Si la probabilidad de un suceso es P, en n experimentos se espera que el suceso ocurra $n \times P$ veces.
- Podemos emplear la frecuencia relativa como una estimación de la probabilidad. A mayor número de experimentos, mayor aproximación de la frecuencia relativa a la probabilidad.

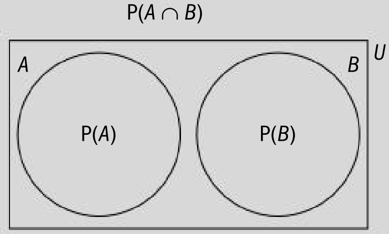
Diagramas de Venn



- Como suceso, A, puede ocurrir o no ocurrir.
  $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A') = 1$
  $\mathrm{P}(A') = 1 - \mathrm{P}(A)$



- Para dos sucesos A y B cualesquiera,
  $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$



- En general, si A y B son sucesos mutuamente excluyentes,
  $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Continúa en la página siguiente.

Diagramas del espacio muestral y regla del producto

- Dos sucesos *A y B* son independientes si el hecho de que ocurra uno de ellos no afecta la probabilidad de que ocurra el otro.
- Cuando dos sucesos *A y B* son independientes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
  Esta regla se conoce como la **regla del producto para sucesos independientes**.

Probabilidad condicionada

- Si *A y B* son sucesos independientes, $P(A \mid B) = P(A)$, $P(B \mid A) = P(B)$, $P(A \mid B') = P(A)$, $P(B \mid A') = P(B)$
- En general, para dos sucesos *A y B*, la probabilidad de que ocurra *A* sabiendo que *B* ha ocurrido puede hallarse usando:
  $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad: usos y abusos

Los problemas de probabilidades en los textos de matemáticas usualmente involucran escoger bolillas de colores de una bolsa. ¿Qué utilidad puede tener esto en la vida real? Pero la probabilidad tiene algunos usos sorprendentes, como encontrar respuestas a preguntas delicadas.

La gente también hace mal uso o malinterpreta la probabilidad al confiar más en su intuición que en hacer números.

- ¿Por qué la gente compra billetes de lotería cuando las posibilidades de ganar son tan pequeñas?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar la lotería nacional?

Preguntas delicadas

Si usted diseña una encuesta que contiene una pregunta delicada, ¿la gente contestará con sinceridad?

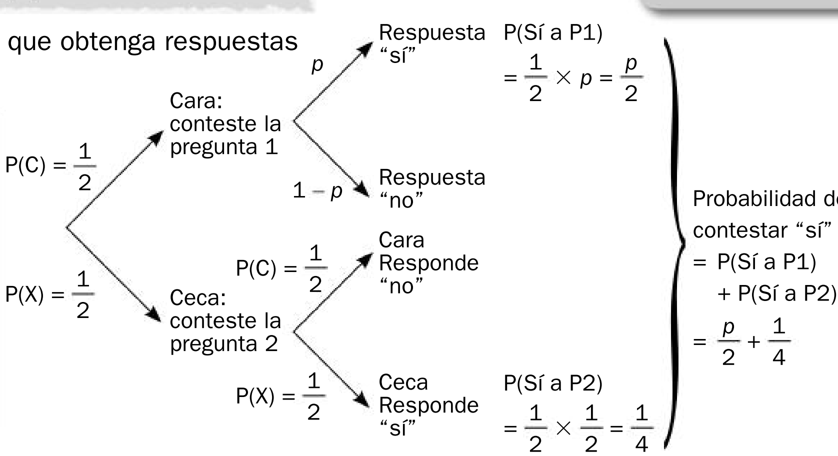
Una directora quiere saber cuántos de los 600 estudiantes de su escuela han hecho trampa en los exámenes. No está interesada en saber si una persona en particular hizo trampa, sino que quiere hacer solamente una estimación global para toda la escuela.

Si envía un cuestionario a cada estudiante con la pregunta:

> ¿Ha hecho alguna vez trampa en los exámenes del colegio?
>
> ☐ Sí ☐ No

es poco probable que obtenga respuestas sinceras.

El diagrama de árbol ayuda a estimar *p*, la fracción de estudiantes que han hecho trampa en un examen.



El proceso de respuestas aleatorizado

Esto se basa en que cada estudiante sabe que la directora desconoce si está respondiendo una pregunta delicada o una totalmente inofensiva.

Cada estudiante lanza al aire una moneda dos veces sin mostrar a nadie su resultado.

Luego sigue las instrucciones en esta cartilla.

> **1** Si obtuvo una cara en su primer lanzamiento, conteste la pregunta: "¿Ha hecho trampa alguna vez en un examen?" con sinceridad.
>
> **2** Si obtuvo una ceca en su primer lanzamiento, conteste la pregunta: "¿Obtuvo una ceca en el segundo lanzamiento?" con sinceridad.

Suponga que 220 estudiantes contestan "sí" sobre un total de 600 encuestados.

$$\frac{p}{2} + \frac{1}{4} = \frac{220}{600}$$
$$\frac{p}{2} = \frac{220}{600} - \frac{1}{4}$$
$$\frac{p}{2} = \frac{7}{60}$$
$$p = \frac{7}{30}$$

El número estimado de estudiantes que han hecho trampa en un examen es:
$600 \times \frac{7}{30} = 140$

Siempre y cuando todos digan la verdad cuando responden a sus preguntas, este método estima el número de estudiantes que alguna vez han hecho trampa en un examen.

- ¿Responderían los estudiantes con sinceridad esta pregunta?
- ¿Existe algún problema en este método para descubrir la verdad?

Probabilidad e intuición: el problema del cumpleaños

- En una clase de 23 personas, ¿cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día? ¿Qué piensa? ¿El 1%? ¿Quizás el 5%?¿O incluso tanto como el 10%?

Hagamos números:

23 estudiantes significa que hay 253 pares posibles de estudiantes.

$$\frac{23 \times 22}{2} = 253$$

Hay 23 elecciones para la primer persona en un par y luego 22 elecciones para la segunda.

El par (Timoteo, Juana) es exactamente el mismo que el par (Juana, Timoteo), por lo tanto el total se reduce a la mitad.

La probabilidad de que dos personas cumplan años en distintos días es:

$$\frac{364}{365} = 0{,}997260$$

Haciendo caso omiso de los años bisiestos, hay 364 días en los que los cumpleaños de las dos personas del par no coinciden.

Por lo tanto, para 253 pares, la probabilidad de que las dos personas de cada par cumplan años en días diferentes es:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{253} = 0{,}4995$$

Así, la probabilidad de que, para 253 pares, dos personas de un par cumplan años el mismo día es:

$1 - 0{,}4995 = 0{,}5005$, o 50,05%. ¡Poco más de la mitad!

- ¿Confía en la intuición como ayuda para tomar decisiones?
- ¿Existen otras áreas de las matemáticas donde la intuición lo ha defraudado?
- ¿Y en otras áreas de conocimiento?

4 Funciones exponenciales y logarítmicas

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

1.2 Estudio elemental de potencias y logaritmos
Propiedades de las potencias; propiedades de los logaritmos; cambio de base

2.6 Funciones exponenciales y sus gráficos:
$x \mapsto a^x,\ a > 0,\ x \mapsto e^x$
Funciones logarítimicas y sus gráficos:
$x \mapsto \log_a x,\ x > 0,\ x \mapsto \ln x,\ x > 0$
Relación entre estas funciones:
$a^x = e^{x \ln a};\ \log_a a^x = x;\ a^{\log_a x} = x,\ x > 0$

2.7 Resolución de ecuaciones de la forma $a^x = b$, $a^x = b^y$

2.8 Aplicaciones de las habilidades referidas a la representación gráfica de funciones y de resolución de ecuaciones en situaciones de la vida real

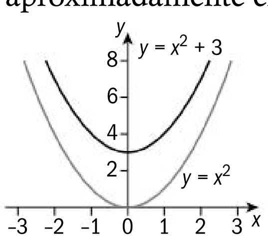
Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Evaluar potencias sencillas con exponente positivo
Por ejemplo: Evaluar 3^4
$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
Por ejemplo: Evaluar $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \frac{8}{125}$

2 Convertir números a la forma exponencial
Por ejemplo: Hallar n sabiendo que $2^n = 128$
$128 = 2^7$, entonces $n = 7$

3 Transformar gráficos
Por ejemplo: Dado el gráfico de $y = x^2$, dibujar aproximadamente el gráfico de $y = x^2 + 3$



Comprobemos nuestras habilidades

1 Evalúe:

a $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ **b** $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

c $0{,}001^3$

2 Indique el valor de n en estas ecuaciones:

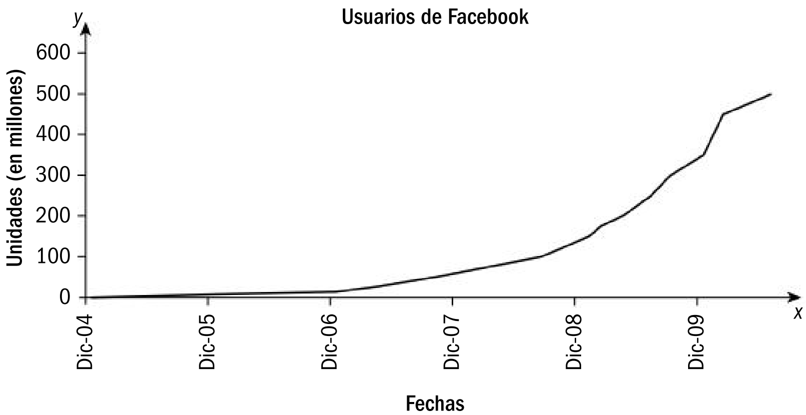
a $7^n = 343$ **b** $3^n = 243$

c $5^n = 625$

3 Transforme el gráfico de $y = x^2$ para obtener el gráfico de $y = (x - 2)^2$.

Facebook, la gigantesca red social, celebró su sexto aniversario en febrero de 2010 con más de 450 millones de usuarios. Había crecido desde los 100 millones registrados en agosto de 2008, y experimentado un ascenso enorme desde diciembre de 2004, cuando solo tenía 1 millón de miembros.

Este gráfico muestra cómo el número de usuarios de Facebook se ha incrementado con el tiempo.



(Fuente: http://www.facebook.com/press/info.php?timeline)

Un crecimiento de este tipo (ciertamente hasta febrero de 2010) es un **crecimiento exponencial**. Si se sigue el recorrido de la curva, su pendiente aumenta a la par de la tasa de crecimiento. La tasa de crecimiento en todo momento es aproximadamente proporcional al número de usuarios en ese momento.

Un buen modelo para representar los datos sobre los usuarios de Facebook es:

$n = 1{,}32 \times 1{,}1^x$

donde n es el número de usuarios en millones y x es el número de meses después de diciembre de 2004.

Podríamos usar la fórmula $n = 1{,}32 \times 1{,}1^x$ para estimar el número de usuarios en una fecha determinada o hallar la fecha en la que se alcanzó un número determinado de usuarios.

Encontraremos muchos otros ejemplos de crecimiento exponencial y su opuesto, el **decrecimiento exponencial** (donde la pendiente decrece a medida que seguimos el recorrido de la curva).

Podemos también usar el modelo para hacer predicciones acerca del futuro crecimiento de Facebook. Este procedimiento se conoce como "extrapolación". ¿Qué problemas surgen cuando se usan modelos de este tipo para estimar crecimientos a futuro? ¿Qué otros factores necesitamos considerar?

Investigación: qué sucede al plegar el papel

Malcolm Gladwell propuso este problema en su libro *The Tipping Point*.
Imagine que toma un gran pedazo de papel y lo dobla una y otra vez hasta haberlo doblado 50 veces. ¿Qué altura cree que alcanzaría el plegado?

1 Doble una hoja de papel (de cualquier tamaño) por la mitad tantas veces como sea posible.

2 Complete la siguiente tabla para mostrar el número de dobleces, el número de capas y el espesor del plegado formado.
Puede suponer que cada hoja de papel tiene un espesor de aproximadamente 0,1 mm, que equivale a 1×10^{-7} km.

Se muestran a continuación los primeros registros:

Número de dobleces	Número de capas	Espesor (km)	Tan alto como
0	1	1×10^{-7}	Una hoja de papel
1	2	2×10^{-7}	
2	4	4×10^{-7}	Una tarjeta de crédito
3	8		
4	16		
5			
6			
7			
8			
9			

3 ¿Cuántos dobleces necesitaría hacer para que el plegado resulte de las siguientes maneras?

a Tan alto como una mesa

b Apenas más alto que un hombre

4 ¿Qué altura tendrá el plegado después de 50 dobleces?

Probablemente consiga hacer cerca de seis o siete dobleces antes de que no pueda plegar más el papel. En el séptimo doblez el plegado ya estará tan grueso como este libro, después de 13 el plegado tendrá aproximadamente la altura de una mesa y después de 15 será mucho más alto que un hombre. Después de 17 tendrá una altura de aproximadamente 13 m: ¡la altura de una casa de dos pisos!

¿Depende este proceso del tamaño del papel con el que se comienza? Inténtelo

Después de 50 dobleces el papel tendría una altura aproximada de 113 millones de km. Esto es aproximadamente la distancia entre la Tierra y el Sol.

El plegado de papel es un ejemplo de crecimiento exponencial. Los "números de capas" de papel forman una **progresión**. Los términos de la progresión son una función del número de dobleces, n, donde $f(n) = 2^n$.

$f(n)$ es una **función de crecimiento exponencial**.

En este capítulo aprenderemos más acerca de funciones exponenciales y sus inversas, llamadas **funciones logarítmicas**.

4.1 Potencias

La potencia es una forma abreviada de representar una multiplicación reiterada de un número por sí mismo.
La expresión 3^5, por ejemplo, representa $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.
El 3 en esta expresión es la **base** y el 5 es el **exponente**.

También podemos usar una variable como base, por ejemplo:
$x^4 = x \times x \times x \times x$

Es más sencillo escribir x^4 que $x \times x \times x \times x$

Propiedades de las potencias

Multiplicación

Simplificar $x^5 \times x^3$

$$\begin{aligned} x^5 \times x^3 &= (x \times x \times x \times x \times x) \times (x \times x \times x) \\ &= x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \\ &= x^8 \end{aligned}$$

Quitar los paréntesis

Por lo tanto, $x^5 \times x^3 = x^{(5+3)} = x^8$

➔ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Observe que en $x^5 \times x^3$ las dos bases son iguales. No podemos simplificar $x^5 \times y^3$, por ejemplo, usando esta propiedad. $x^5 \times y^3 = x^5 y^3$

División

Simplificar $x^5 \div x^3$

$$x^5 \div x^3 = \frac{x \times x \times x \times x \times x}{x \times x \times x} = \frac{\cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times x \times x}{\cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}} = x \times x = x^2$$

Por lo tanto, $x^5 \div x^3 = x^{(5-3)}$
$= x^2$

➔ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Simplificar los factores comunes

Observe que no podemos simplificar $x^5 \div y^3$ pues las bases no son iguales.

Potencia de potencia

Simplificar$(x^5)^3$

$$(x^5)^3 = (x \times x \times x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x \times x)$$
$$= x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$$
$$= x^{15}$$

Por lo tanto, $= (x^5)^3 = x^{5\times3} = x^{15}$

➔ $(a^m)^n = a^{mn}$

Ejemplo 1

Desarrolle $(2xy^2)^3$.	
Respuesta $(2xy^2)^3 = (2xy^2) \times (2xy^2) \times (2xy^2)$ $= 2^3 \times x^3 \times (y^2)^3 = 8x^3y^6$	*No es necesario mostrar este paso intermedio.* *Elevar al cubo cada uno de los factores del paréntesis*

No olvide que debe elevar a la potencia indicada los números que figuran en el paréntesis del mismo modo que lo hace con los factores de x e y.

Ejercitación 4A

1 Simplifique:

a $x^3 \times x^2$ **b** $3p^2 \times 2p^4q^2$ **c** $\frac{1}{2}(xy^2) \times \frac{2}{3}(x^2y)$ **d** $(x^3y^2)(xy^4)$

2 Simplifique:

a $x^5 \div x^2$ **b** $2a^7 \div 2a^3$ **c** $2a^7 \div (2a)^3$ **d** $\frac{4x^3y^5}{2xy^2}$

3 Simplifique:

a $(x^3)^4$ **b** $(3t^2)^3$ **c** $3(x^3y^2)^2$ **d** $(-y^2)^3$

Recuerde multiplicar las constantes (los números) entre sí, además de las variables.

La potencia cero

Simplificar $x^2 \div x^2$

$$\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0$$

Pero $\frac{x^2}{x^2} = 1$

En consecuencia, $x^0 = 1$

> ➔ $a^0 = 1$
> Toda base distinta de cero elevada a la potencia 0 es igual a 1.

Cualquier base no nula a la potencia cero es igual a 1. Cero a cualquier potencia es cero. Entonces, ¿qué sucede con 0^0? ¿Cómo deberíamos decidir a qué es igual? ¿Quién debería decidir?

Exponentes racionales

Simplificar $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}$

Usando la **propiedad 1**, $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1$

Pero $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x$

Por lo tanto, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

De forma similar, $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x$ y $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x} = (\sqrt[3]{x})^3 = x$

y por lo tanto $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

> ➔ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Puede suponer siempre que *a* es positiva, cuando considere las raíces pares de *a*.

Raíces

Simplificar $\sqrt[3]{x^6}$

Dado que $x^6 = x^2 \times x^2 \times x^2$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^6} &= \sqrt[3]{x^2 \times x^2 \times x^2}\\ &= x^2\\ &= x^{\frac{6}{3}}\end{aligned}$$

> ➔ $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo 2

Sin usar la calculadora, evalúe:

a $36^{\frac{1}{2}}$ **b** $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$

Evaluar significa "calcular el valor de".

Respuestas

a $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$ *Dado que* $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

b $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^4$ *Dado que* $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{27}}\right)^4$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= \frac{1}{81}$$

Exponentes negativos

Simplificar $x^3 \div x^5$

$$x^3 \div x^5 = \frac{\cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}}{\cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times x \times x}$$

$$= \frac{1}{x \times x}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

También $x^3 \div x^5 = x^{3-5} = x^{-2}$

En consecuencia, $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

$$\rightarrow \; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Necesita aprender las propiedades de las potencias pues no están en el cuadernillo de fórmulas.

Ejemplo 3

Sin usar la calculadora, evalúe:

a 6^{-2} **b** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$

Respuestas

a $6^{-2} = \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$

Usar $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

b $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{9}{16}\right)}$

$= \dfrac{16}{9}$

Ejercitación 4B

1 Evalúe:

a $9^{\frac{1}{2}}$ **b** $125^{\frac{1}{3}}$ **c** $64^{\frac{2}{3}}$

d $8^{\frac{2}{3}}$ **e** $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

2 Evalúe:

a 2^{-3} **b** $32^{-\frac{2}{5}}$ **c** $81^{-\frac{1}{4}}$

d $(2^3)^{-\frac{4}{3}}$ **e** $\left(\dfrac{64}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$

Ejemplo 4

Simplifique estas expresiones:

a $5d^0$ **b** $6x^{-3} \div (2x^2)^3$ **c** $\sqrt[3]{27a^6}$ **d** $\left(\frac{9v^2}{16w^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Respuestas

a $5d^0 = 5 \times 1 = 5$	*Usar* $a^0 = 1$
b $6x^{-3} \div (2x^2)^3 = 6x^{-3} \div 8x^6$	*Usar* $(a^m)^n = a^{mn}$
$= \frac{6}{8}x^{-9} = \frac{3}{4x^9}$	*Usar* $a^m \div a^n = a^{m-n}$
c $\sqrt[3]{27a^6} = \left(27a^6\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}}\left(a^6\right)^{\frac{1}{3}} = 3a^2$	*Usar* $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$
d $\left(\frac{9v^2}{16w^4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{16w^4}{9v^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(16w^4)^{\frac{1}{2}}}{(9v^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4w^2}{3v}$	*Usar* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Aquí "simplifique" significa que se deben escribir estas expresiones usando solamente exponentes positivos.

Ejercitación 4C

1 Simplifique estas expresiones exponenciales:

a $\left(64a^6\right)^{\frac{1}{2}}$ **b** $\sqrt[4]{16x^{-8}}$ **c** $\frac{q\sqrt{q}}{q^{-1,5}}$ **d** $\left(\frac{27c^3}{d^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ **e** $\frac{(8p)^{\frac{2}{3}}}{(4p)^2}$

2 Simplifique estas expresiones:

a $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^3} \div \frac{a^{-1}}{b^2}$ **b** $\sqrt{\frac{x^{-2}y^2}{25x^4}}$ **c** $\frac{6x^2y^{-2}}{\sqrt[3]{8x^{-3}}}$

En este ejercicio, asegúrese de que sus respuestas tengan exponentes positivos.

4.2 Resolución de ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son ecuaciones en las que la incógnita es un exponente; por ejemplo: $5^x = 25$.
Se puede escribir una ecuación exponencial en la forma $a^x = b^y$.

Ejemplo 5

Resuelva $3^{x-1} = 3^{5x}$.

Respuesta

$3^{x-1} = 3^{5x}$	*Ambos miembros de la ecuación son potencias de 3, por lo tanto, los dos exponentes son iguales.*
$x - 1 = 5x$	
$-1 = 4x$	
$x = -\frac{1}{4}$	

Ejemplo 6

Resuelva $3^{3x+1} = 81$.

Respuesta

$3^{3x+1} = 81$	
$3^{3x+1} = 3^4$	*Escribir 81 como potencia de 3*
$3x + 1 = 4$	*Igualar los exponentes*
$3x = 3$	
$x = 1$	

Para este ejemplo y muchas de las siguientes preguntas, necesita aprender estas potencias.

$2^0 = 1$	$3^0 = 1$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$
$2^6 = 64$	
$2^7 = 128$	
$5^0 = 1$	$7^0 = 1$
$5^1 = 5$	$7^1 = 7$
$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$5^3 = 125$	$7^3 = 343$
$5^4 = 625$	

Ejercitación 4D

1 Resuelva en x estas ecuaciones.

a $2^x = 32$ **b** $3^{1-2x} = 243$

c $3^{x^2-2x} = 27$ **d** $5^{2x-1} - 25 = 0$

e $7^{1-x} = \frac{1}{49}$

2 Resuelva en x estas ecuaciones.

a $3^{x-3} = 3^{2-x}$ **b** $5^{3x} = 25^{x-2}$

c $9(3^{3x+1}) = \frac{1}{9^x}$ **d** $2^{2-3x} = 4^{x-1}$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Resuelva $8(2^{x+1}) = 2\sqrt{2^x}$.

Ejemplo 7

Resuelva $3x^{-\frac{3}{5}} = 24$.

Respuesta

$3x^{-\frac{3}{5}} = 24$	*Dividir ambos miembros por 3*
$x^{-\frac{3}{5}} = 8$	*Multiplicar el exponente por su recíproco, dado que* $-\frac{a}{b} \times -\frac{b}{a} = 1$
$\left(x^{\frac{-3}{5}}\right)^{\frac{-5}{3}} = 8^{-\frac{5}{3}}$	
$x = (2^3)^{-\frac{5}{3}}$	*Reemplazar 8 por* 2^3
$x = 2^{-5}$	
$x = \frac{1}{32}$	

Ejercitación 4E

1 Resuelva en x estas ecuaciones.

a $2x^4 = 162$ **b** $x^5 - 32 = 0$

c $x^{-2} = 16$ **d** $8x^{-3} = (8x)^3$

e $27x^{-2} = 81x$ **f** $27x^{-3} = 64$

2 Resuelva en x estas ecuaciones.

a $x^{\frac{1}{3}} = 2$ **b** $5x^{\frac{1}{2}} = 125$

c $x^{-\frac{1}{4}} = 4$ **d** $x^{\frac{2}{3}} = 16$

e $x^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{8}$ **f** $3x^{-\frac{1}{4}} = 6$

3 Resuelva en x estas ecuaciones.

a $x^{-\frac{3}{2}} = 125$ **b** $6x^{-\frac{2}{3}} = 216$

c $3x^{\frac{2}{3}} = 192$ **d** $9x^{-\frac{2}{3}} = 16$

4.3 Funciones exponenciales

Gráficos y propiedades de las funciones exponenciales

→ Una **función exponencial** es una función de la forma

$f(x) = a^x$

donde a es un número real positivo (o sea, $a > 0$) y $a \neq 1$.

Tambien podemos escribir $f : x \to a^x$

Investigación: gráficos de funciones exponenciales 1

Usando una calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG), dibuje aproximadamente los gráficos de estas funciones exponenciales.

a $y = 3^x$

b $y = 5^x$

c $y = 10^x$

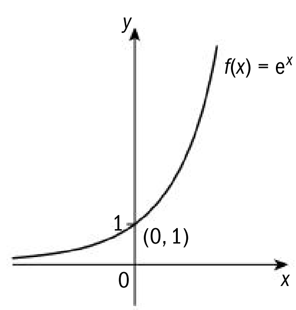
Observe los tres gráficos.

¿Qué puede deducir acerca de la función exponencial, $f(x) = a^x$, cuando $a > 1$?

Piense acerca del dominio, recorrido, intersecciones con los ejes, asíntotas, forma y comportamiento de cada gráfico cuando x tiende a infinito.

Cualquiera sea el valor positivo de a en la formula $f(x) = a^x$, el gráfico siempre tendrá la misma forma.

$f(x) = a^x$ es una **función de crecimiento exponencial**.



El **dominio** de $f(x) = a^x$ es el conjunto de todos los números reales.
El **recorrido** es el conjunto de todos los números reales positivos.
La curva no corta al eje x.
El gráfico se aproxima cada vez más al eje x a medida que el valor de x decrece.
La intersección con el eje y es 1.
Los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0,1)$ y $(1,a)$ pertenecen al gráfico de la función f.
El gráfico es siempre creciente.

Ahora veamos los gráficos de las funciones exponenciales cuando la base a está comprendida entre 0 y 1.

Investigación: gráficos de funciones exponenciales 2

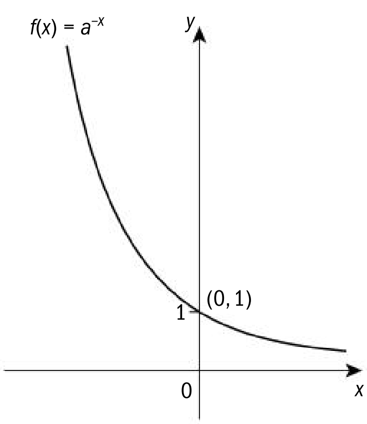
Usando una CPG, dibuje aproximadamente los gráficos de estas funciones exponenciales.

a $y = 3^{-x}$
b $y = 5^{-x}$
c $y = 10^{-x}$

¿Qué puede deducir acerca de la función exponencial, $f(x) = a^{-x}$, cuando $a > 1$, a partir de estos tres gráficos?

$y = 3^{-x}$ es equivalente a $y = \frac{1}{3^x}$ o $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, por lo tanto, la base está comprendida entre 0 y 1.

Cualquiera sea el valor positivo de a, el gráfico de $f(x) = a^{-x}$ tendrá siempre esta forma.



$f(x) = a^{-x}$ es una **función de decrecimiento exponencial**.

La función exponencial en base *e*

Una de las bases que hallaremos con frecuencia en funciones exponenciales es la base *e*.

Investigación: interés compuesto

Cuando se invierte dinero se ganan intereses.

Usamos la fórmula $A = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ para calcular intereses, donde A es el monto final (capital + intereses), C es el capital, r es la tasa de interés expresada en decimales, n es el número de capitalizaciones en el año y t el número total de años.

¿Qué ocurre cuando las capitalizaciones se hacen más y más frecuentes?

1 Una persona invierte 1 libra esterlina a una tasa de interés del 100% durante 1 año.

a ¿Cuánto dinero tendrá si se capitaliza solo una vez en el año?

$P = 1,\ r = 100\% = \frac{100}{100} = 1,\ n = 1,\ t = 1$

$A = C\left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1} = 2$ (dado que $r = 1$ y $n = 1$)

b ¿Cuánto dinero tendrá si se capitaliza trimestralmente?

$C = 1,\ r = 100\% = 1,\ n = 4,\ t = 1$

$A = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{4} = 2{,}44140625$

2 Copie y complete la siguiente tabla:

Capitalización	Cálculo	Monto final (escriba todas las cifras que lee en la calculadora)
Anual	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}$	2
Semestral	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}$	2,25
Trimestral	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{4}$	2,44 140 625
Mensual		
Semanal		
Diaria		
Horaria		
Cada minuto		
Cada segundo		

El monto final crece a medida que el intervalo entre capitalizaciones decrece, pero los incrementos resultan cada vez menores y el monto final converge hacia un valor. A este valor se lo denomina *e*.

El valor de *e* es aproximadamente 2,71828 y es un número excepcionalmente importante en matemáticas, puesto que tiene aplicaciones en varias de sus ramas.
e es un número **irracional**.

Un número irracional no puede ser expresado como fracción ni como decimal exacto.

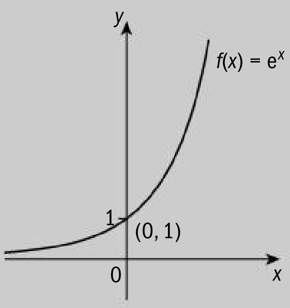
Con las matemáticas, a menudo se obtienen resultados hermosos y sorprendentes.

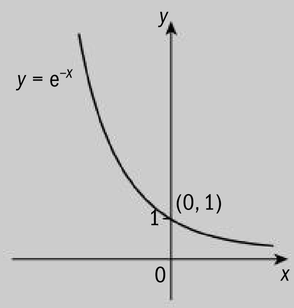
He aquí un ejemplo.
Con una aproximación de 20 cifras decimales,
e = 2,718 281 828 459 045 235 36…
No hay un patrón obvio en esta secuencia de números.
Sin embargo, observe esta serie que le da un valor aproximado de e:

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2\times 1}+\frac{1}{4\times 3\times 2\times 1}+\frac{1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}+\ldots$$

Podría preguntarse acerca de la conexión entre esta serie y el valor de e.
[La página de Teoría del Conocimiento al final de este capítulo contiene reflexiones y discusiones sobre la belleza en las matemáticas.]

➔ El gráfico de la función exponencial $f(x) = e^x$ es un gráfico de crecimiento exponencial y el gráfico de $f(x) = e^{-x}$ es un gráfico de decrecimiento exponencial.



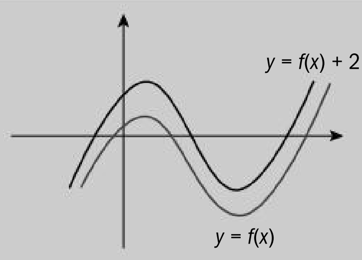


Transformaciones de funciones exponenciales

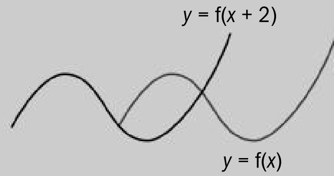
Ahora que conocemos la forma general del gráfico de una función exponencial, podemos usar las reglas de transformaciones de gráficos del capítulo 1 para ayudarnos a dibujar aproximadamente otras funciones exponenciales.

Jacobo Bernoulli (1654-1705) fue uno de los grandes matemáticos de la familia Bernoulli, de origen suizo. Cuando investigaba el problema del interés compuesto, trató de hallar el límite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando *n* tiende a infinito. Usó el teorema del binomio para demostrar que el límite debía estar comprendido entre 2 y 3. Este proceso fue considerado como la primera aproximación hallada para e.

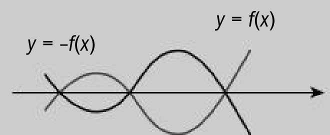
➔ $f(x) \pm k$ es una traslación vertical de $f(x)$, k unidades hacia arriba o hacia abajo.



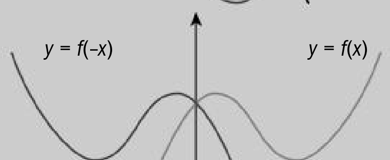
$f(x \pm k)$ es una traslación horizontal de $f(x)$, k unidades hacia la izquierda o hacia la derecha.



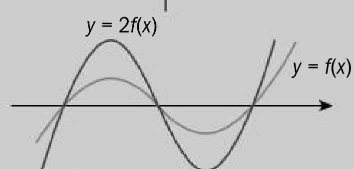
$-f(x)$ es la simetría de $f(x)$ respecto del eje x.



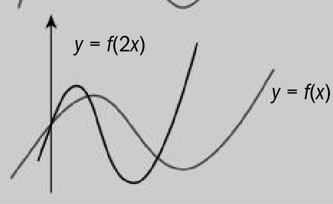
$f(-x)$ es la simetría de $f(x)$ respecto del eje y.



$pf(x)$ es un estiramiento vertical de $f(x)$, de razón p.

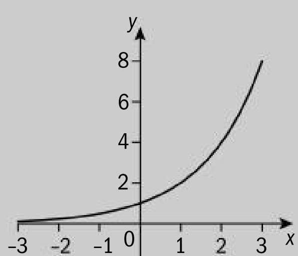


$f(qx)$ es un estiramiento horizontal de $f(x)$, de razón $\frac{1}{q}$.

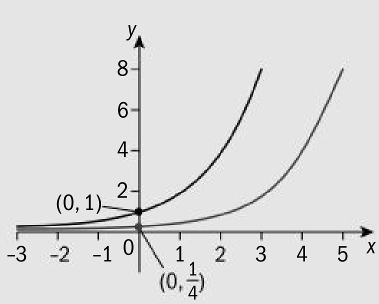


Ejemplo 8

El diagrama muestra el gráfico de $f(x) = 2^x$.
En los mismos ejes, dibuje aproximadamente el gráfico de $g(x) = 2^{x-2}$.



Respuesta

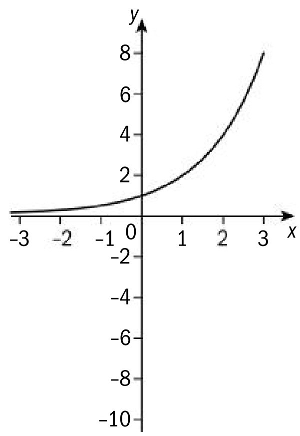


Hallamos g(x) mediante una traslación de f(x) de 2 unidades hacia la derecha.
El gráfico de g(x) pasará por el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.
Ambos gráficos se aproximan más y más al eje x a medida que el valor de x decrece.

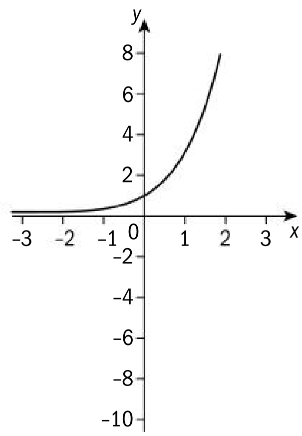
Ejercitación 4F

1 Dado el gráfico de $f(x)$, y sin usar la calculadora, dibuje aproximadamente el gráfico de $g(x)$ en los mismos ejes, mostrando claramente las intersecciones con los ejes y las asíntotas.

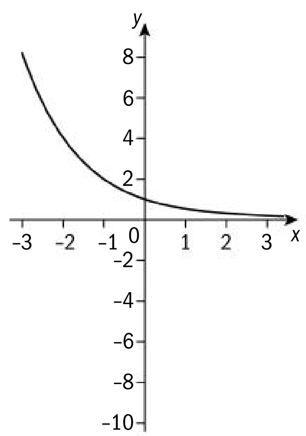
a $f(x) = 2^x \quad g(x) = 2^x + 3$



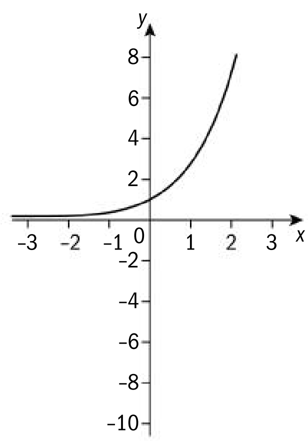
b $f(x) = 3^x \quad g(x) = 3^{-x}$



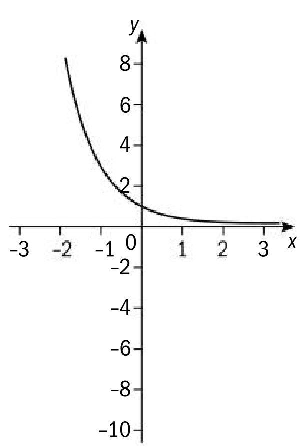
c $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$



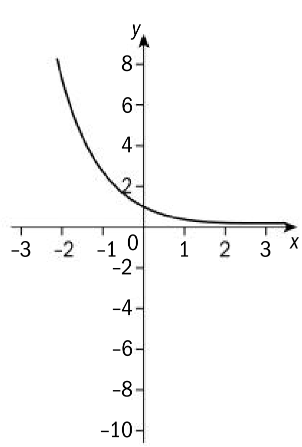
d $f(x) = e^x \quad g(x) = e^{x+1}$



e $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad g(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$



f $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x \quad g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{2x}$



2 Indique el dominio y el recorrido de cada función $g(x)$ de la pregunta 1.

4.4 Propiedades de los logaritmos

Observe esta igualdad: $2^3 = 8$

2 es la base y 3 es el exponente o el **logaritmo**.
Por lo tanto, decimos que el **logaritmo** en base 2 de 8 es 3 y lo escribimos como $\log_2 8 = 3$.
En general, siempre que $a > 0$:

> ➔ Si $b = a^x$ entonces $\log_a b = x$
>
> o, si b es a a la potencia x, entonces x es el logaritmo de b en base a.

Log es la abreviatura de logaritmo.

La posibilidad de cambiar de una forma a la otra permite simplificar los enunciados referidos a logaritmos.

Ejemplo 9

Evalúe $\log_5 125$.

Respuesta	
$x = \log_5 125$	*Escribir 'x =' expresión logarítmica*
$5^x = 125$	*Cambiar la ecuación a la forma exponencial*
$5^x = 5^3$	
$x = 3$	*Igualar los exponentes*

Ejemplo 10

Evalúe $\log_{64} 4$.

Respuesta	
$x = \log_{64} 4$	
$64^x = 4$	*Cambiar a la forma exponencial*
$(4^3)^x = 4^1$	*Escribir 64 como 4^3*
$3x = 1$	*Igualar los exponentes*
$x = \frac{1}{3}$	*y despejar x*

Ejercitación 4G

1 Evalúe estas expresiones:

a $\log_7 49$ **b** $\log_5 \sqrt{5}$ **c** $\log_2 64$ **d** $\log_9 1$

2 Evalúe estas expresiones:

a $\log_3 \frac{1}{81}$ **b** $\log_5 125^{\frac{1}{2}}$ **c** $\log_{32} 8$ **d** $\log_3 3^4$

Ejemplo 11

Evalúe $\log_4 4$.	
Respuesta	
$x = \log_4 4$	*Escribir 'x =' expresión logarítmica*
$4^x = 4$	*Cambiar la ecuación a la forma exponencial*
$x = 1$	*Igualar los exponentes ($4 = 4^1$)*

En general, para cualquier valor de a, el logaritmo en base a de a es 1.

➔ $\log_a a = 1$

Ejemplo 12

Evalúe $\log_5 1$.	
Respuesta	
$x = \log_5 1$	*Escribir la ecuación en forma exponencial*
$5^x = 1$	
$x = 0$	

Cualquier número (distinto de 0) elevado a la 0 es igual a 1, por lo tanto, el logaritmo de 1 en cualquier base es 0.

➔ $\log_a 1 = 0$

Ejercitación 4H

1 Evalúe:

a $\log_6 6$ **b** $\log_{10} 10$ **c** $\log_n n$

d $\log_8 1$ **e** $\log_2 1$ **f** $\log_b 1$

Algunas expresiones logarítmicas están **indefinidas**, lo cual significa que no se las puede evaluar.

1 ¿Qué ocurre cuando intenta evaluar la siguiente expresión?

$$\log_3(-27)$$

Primero escriba la ecuación.

$$x = \log_3(-27)$$

Luego, reescriba la ecuación en forma exponencial.

$$3^x = -27$$

Esta ecuación no tiene solución.

Solamente podemos hallar logaritmos de números **positivos**.

➔ $\log_a b$ no está definido para cualquier base a si b es negativo.

2 ¿Cuál es el valor de $\log_3 0$?
Primero escriba una ecuación.

$x = \log_3 0$

Reescríbala en forma exponencial.

$3^x = 0$

Esta ecuación no tiene solución.

➔ $\log_a 0$ no está definido.

El ejemplo 13 ilustra otra propiedad de los logaritmos.

Ejemplo 13

Evalúe $\log_2 2^5$.	
Respuesta	
$x = \log_2 2^5$	*Escribir la ecuación logarítmica*
$2^x = 2^5$	*Reescribir en forma exponencial*
$x = 5$	*Resolver*

➔ $\log_a(a^n) = n$

Resumen de las propiedades de los logaritmos

Dado $a > 0$

- Si $x = a^b$ entonces $\log_a x = b$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a b$ no está definido si b es negativo
- $\log_a 0$ no está definido
- $\log_a(a^n) = n$

Ejemplo 14

Halle el valor de x si $\log_2 x = 5$.	
Respuesta	
$\log_2 x = 5$	
$2^5 = x$	*Reescribir en forma exponencial*
$x = 32$	*Resolver*

Ejercitación 4I

1 Escriba estas ecuaciones en forma logarítmica:

a $x = 2^9$ **b** $x = 3^5$ **c** $x = 10^4$ **d** $x = a^b$

2 Escriba estas ecuaciones en forma exponencial:

a $x = \log_2 8$ **b** $x = \log_3 27$ **c** $x = \log_{10} 1000$ **d** $x = \log_a b$

3 Resuelva estas ecuaciones:

a $\log_4 x = 3$ **b** $\log_3 x = 4$ **c** $\log_x 64 = 2$

d $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ **e** $\log_2 x = -5$

4.5 Funciones logarítmicas

Investigación: funciones inversas

¿Qué clase de función invertiría una función exponencial tal como $f : x \mapsto 2^x$?

a Copie y complete esta tabla de valores para la función $y = 2^x$.

x	−3	−2	1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$						

$f: x \mapsto 2^x$ significa que f es la función que a cada x le asigna 2^x.

La **función inversa** de $y = 2^x$ hará que se intercambien los valores de x e y.

b Copie y complete esta tabla de valores para la inversa de la función $y = 2^x$.

x	$\frac{1}{8}$						
y	−3						

c Usando estas tablas de valores, dibuje aproximadamente el gráfico de $y = 2^x$ y el de su inversa en el mismo sistema de ejes coordenados.

d ¿Qué observa?

Ahora hallaremos la fórmula del gráfico de la función inversa.

➔ Para hallar algebraicamente la función **inversa**, intercambie x e y y reordene la expresión, despejando y.

$f: x \mapsto 2^x$ es otra manera de escribir $y = 2^x$.

Para obtener la función inversa, f^{-1}, de $f : x \mapsto 2^x$:

Escriba $y = 2^x$

$x = 2^y$ *Intercambiar x e y*

$\log_2 x = y\log_2 2$ *Aplicar logaritmos en base 2 en ambos miembros*

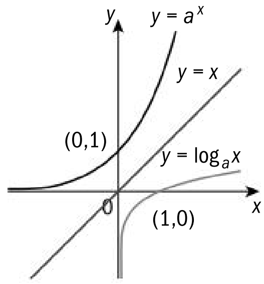
Por lo tanto, $y = \log_2 x$ *Dado que* $\log_2 2 = 1$

Por lo tanto, $f^{-1} : x \mapsto \log_2 x$

y es el exponente al que hay que elevar a la base 2 para obtener x.

➔ En general, si $f : x \mapsto a^x$ entonces $f^{-1} : x \mapsto \log_a x$.
$y = \log_a x$ es la inversa de $y = a^x$.

El gráfico de $y = \log_a x$ es la simetría del gráfico de $y = a^x$ respecto de la recta $y = x$.



> ➔ Una función logarítmica, $f(x) = \log_a x$, tiene las siguientes propiedades:
> - El dominio es el conjunto de todos los números reales positivos.
> - El recorrido es el conjunto de todos los números reales.
> - La curva no corta al eje y.
> - El eje y es una asíntota vertical.
> - Corta al eje x en 1.
> - El gráfico es siempre creciente.

Se atribuye a John Napier (1550–1617) muchos de los primeros trabajos sobre logaritmos. ¿Diría que *inventó* los logaritmos o que los *descubrió*?

Transformaciones de funciones logarítmicas

Una vez que conocemos la forma general del gráfico de una función logarítmica, podemos usar lo que aprendimos en el capítulo 1 para examinar los gráficos de otras funciones logarítmicas.

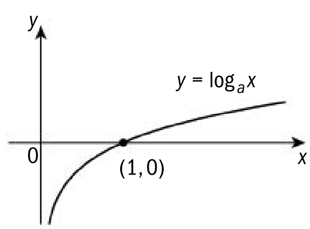
Ejercitación 4J

1 Dada la función $f(x) = \log_a x$, describa la transformación requerida en cada caso para obtener el gráfico de $g(x)$.

a $g(x) = \log_a (x) - 2$

b $g(x) = \log_a (x - 2)$

c $g(x) = 2\log_a x$



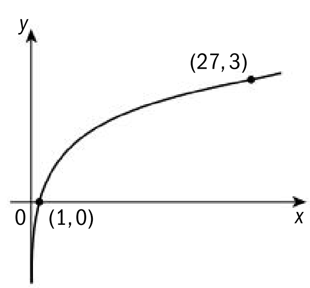
PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = -2\log(x - 1)$ sin usar la calculadora.
Incluya en su gráfico las intersecciones con los dos ejes (si existen).

Cuando la base no está indicada, los logaritmos son en base 10.

3 Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = \log_2(x + 1) + 2$ y rotule claramente cualquier asíntota en el gráfico.

4 El dibujo muestra el gráfico de $y = \log_a x$.
Halle el valor de a.



5 Sabiendo que $f(x) = \log_3 x$, halle $f^{-1}(2)$.

Logaritmos en base 10

$y = \log_{10} x$ es la inversa de $y = 10^x$. Este es un logaritmo importante puesto que es uno de los únicos que podemos hallar con la calculadora. A los logaritmos en base 10 se los conoce como logaritmos decimales, y podemos omitir la base y solo escribir $\log x$ en lugar de $\log_{10} x$.

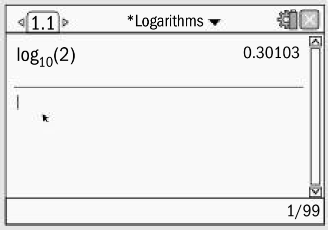
La calculadora tiene una tecla para "log".

Ejemplo 15

Use la calculadora para evaluar log 2 con una aproximación de 3 cifras decimales.

Respuesta

$\log 2 = 0{,}301$ con una aproximación de 3 cifras decimales.



Logaritmos naturales

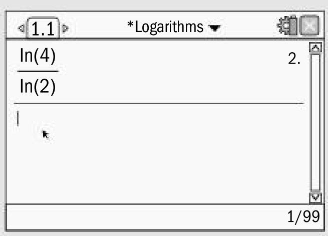
El **logaritmo natural,** $\log_e x$ (log en base e), es el otro logaritmo importante.
Escribimos $\ln x$ en lugar de $\log_e x$. La calculadora tiene una tecla para "ln".

Ejemplo 16

Use la calculadora para evaluar $\frac{\ln 4}{\ln 2}$.

Respuesta

$\frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$



Asegúrese de cerrar el paréntesis después del número 4; de lo contrario, la calculadora hallará $\ln\left(\frac{4}{\ln 2}\right)$.

Ejercitación 4K

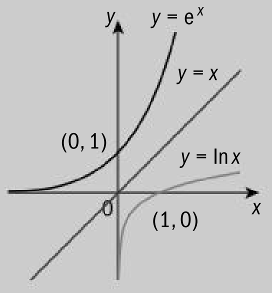
1 Use la calculadora para evaluar estas expresiones con una aproximación de 3 cifras significativas (cs).

a $\log 3$ **b** $4\log 2$ **c** $\ln\sqrt{5}$

d $\frac{\log 4}{\log 5}$ **e** $\frac{\ln 4}{\ln 5}$ **f** $\log\frac{4}{5}$

g $(\log 3)^2$ **h** $\log 3^2$

➔ $y = \ln x$ es la inversa de la función exponencial $y = e^x$



Esta relación nos da tres resultados importantes:

➔ $\log_a(a^x) = x$ y $a^{\log_a x} = x$

$\ln(e^x) = x$ y $e^{\ln x} = x$

$\log(10^x) = x$ y $(10^{\log x}) = x$

Ejemplo 17

Resuelva estas ecuaciones dando su respuesta con una aproximación de 3 cifras significativas.

a $e^x = 2,3$ **b** $\ln x = -1,5$ **c** $10^x = 0,75$ **d** $\log x = 3$

Respuestas	
a $e^x = 2,3$	
$\ln(e^x) = \ln 2,3$	*Escribir en forma de logaritmo natural*
$x = 0,833$ (3 cs)	
b $\ln x = -1,5$	*Usar ln (e^x) = x y evaluar*
$e^{\ln x} = e^{-1,5}$	
$x = 0,223$ (3 cs)	*Usar ($e^{\ln x}$) = x y evaluar*
c $10^x = 0,75$	
$\log(10^x) = \log 0,75$	*Usar log(10^x) = x y evaluar*
$x = -0,125$ (3 cs)	
d $\log x = 3$	
$10^{\log x} = 10^3$	*Usar $10^{\log x}$ = x y evaluar*
$x = 1000$	

Ejemplo 18

Dada $f(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$, halle $f^{-1}(x)$.

Respuesta	
$f(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$	
$y = \frac{1}{3}e^{2x}$	
$x = \frac{1}{3}e^{2y}$	*Intercambiar x e y*

▶ Continúa en la página siguiente.

$3x = e^{2y}$ $\ln(3x) = \ln e^{2y}$ $\ln(3x) = 2y$ $\frac{1}{2}\ln(3x) = y$ Entonces, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(3x),\ x > 0$	 *Usar* $\ln(e^x) = x$ *Despejar* y

Ejercitación 4L

1 Resuelva estas ecuaciones dando las respuestas con 3 cifras significativas donde sea necesario.

a $e^x = 1{,}53$ **b** $e^x = 0{,}003$ **c** $e^x = 1$

d $e^x = \frac{1}{2}$ **e** $5e^x = 0{,}15$

2 Resuelva estas ecuaciones dando las respuestas con 3 cifras significativas donde sea necesario.

a $10^x = 2{,}33$ **b** $10^x = 0{,}6$ **c** $10^x = 1$ **d** $10^x = \frac{1}{2}$

3 Halle x si:

a $\log x = 2$ **b** $\log x = -1$ **c** $\log x = 0$ **d** $\log x = -5{,}1$

4 Sin usar la calculadora, evalúe estas expresiones:

a $5^{\log_5 12}$ **b** $5^{\log_5 4}$ **c** $e^{\ln\sqrt{3}}$ **d** $e^{\ln 4}$

5 Sin usar la calculadora, evalúe estas expresiones:

a $\ln e^5$ **b** $\log 100$ **c** $\ln 1$ **d** $\ln e$ **e** $\ln \frac{1}{e^3}$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

6 Dada $f(x) = e^{2x-1}$, halle $f^{-1}(x)$ e indique su dominio.

7 Dada $f(x) = e^{0{,}25x}$, $-2 \le x \le 4$, indique el dominio y el recorrido de f^{-1}.

8 Dada $f(x) = \ln 3x$, $x > 0$, halle $f^{-1}(x)$.

9 Dadas $f(x) = \ln(x-1)$, $x > 1$, y $g(x) = 2e^x$, halle $(g \circ f)(x)$.

4.6 Propiedades de los logaritmos

Podemos deducir las propiedades de los logaritmos a partir de las ecuaciones exponenciales $x = a^p$ e $y = a^q$.

$x = a^p$ e $y = a^q$

entonces $p = \log_a x$ y $q = \log_a y$

y $xy = a^p \times a^q = a^{p+q}$

por lo tanto $\log_a xy = p + q$

y de aquí $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Esta expresión resulta verdadera para logaritmos en cualquier base, en consecuencia:

> Observe que $\log xy \neq \log x \times \log y$ y que $\log \frac{x}{y} \neq \frac{\log x}{\log y}$.

➔ $\log x + \log y = \log xy$

$$\frac{x}{y} = a^p \div a^q = a^{p-q}$$

por lo tanto $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

y de aquí $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

➔ $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$

$$x^n = (a^p)^n = a^{pn}$$

por lo tanto $\log_a x^n = pn$

y de aquí $\log_a x^n = n \log_a x$

➔ $n \log x = \log x^n$

Podemos incluso deducir el siguiente resultado clave a partir de la tercera propiedad.

➔ $\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -1 \times \log_a x = -\log_a x$

Todas estas propiedades se cumplen para logaritmos en cualquier base y por lo tanto las bases pueden omitirse. Necesita aprender estas propiedades puesto que no aparecen en el cuadernilo de fórmulas de Matemáticas NM del IB.

Ejemplo 19

Exprese $\log_2 5 + \frac{1}{2}\log_2 36 - \log_2 10$ como un único logaritmo.

Respuesta

$\log_2 5 + \frac{1}{2}\log_2 36 - \log_2 10$	
$= \log_2 5 + \log_2 36^{\frac{1}{2}} - \log_2 10$	$n\log_a x = \log_a x^n$
$= \log_2 5 + \log_2 6 - \log_2 10$	
$= \log_2 30 - \log_2 10$	$\log x + \log y = \log xy$
$= \log_2 3$	$\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$

Ejercitación 4M

1 Exprese como un único logaritmo:

a $\log 5 + \log 6$ **b** $\log 24 - \log 2$ **c** $2\log 8 - 4\log 2$

d $\frac{1}{2}\log 49$ **e** $3\log x - 2\log y$ **f** $\log x - \log y - \log z$

g $\log x + 2\log y - 3\log xy$

2 Exprese como un único logaritmo:

a $\log_2 6 + 2\log_2 3 - \log_2 4$ **b** $\log_3 40 - \log_3 15 + 2\log_3\left(\frac{3}{5}\right)$

c $\log_a 4 + 2\log_a 3 - 2\log_a 6$ **d** $2\ln 3 - \ln 18$

e $3\ln 2 - 2$ **f** $4\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 y - 5\log_2 z$

3 Halle el valor de cada expresión (cada respuesta es un número entero).

a $\log_6 2 + \log_6 18$ **b** $\log_2 24 - \log_2 3$ **c** $\log_8 2 + \log_8 32$

d $2\log_6 3 + \log_6 24$ **e** $\frac{1}{2}\log 36 - \log 15 + 2\log 5$

Ejemplo 20

Sabiendo que $a = \log_5 x$, $b = \log_5 y$ y $c = \log_5 z$,

escriba $\log_5\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2z^3}\right)$ en función de a, b y c.

Respuesta

$$\log_5\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2z^3}\right) = \log_5\sqrt{x} - \log_5 y^2z^3$$

$$= \log_5 x^{\frac{1}{2}} - (\log_5 y^2 + \log_5 z^3)$$

$$= \frac{1}{2}\log_5 x - 2\log_5 y - 3\log_5 z$$

$$= \frac{1}{2}a - 2b - 3c$$

Ejercitación 4N

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Sabiendo que $p = \log_2 a$ y $q = \log_2 b$, halle expresiones en función de p y/o q para:

a $\log_2 ab$ **b** $\log_2 a^3$ **c** $\log_2 \frac{b}{a}$

d $\log_2 \sqrt{b}$ **e** $\log_2 \frac{b^2}{\sqrt{a}}$

2 Sean $x = \log P$, $y = \log Q$ y $z = \log R$.

Exprese $\log\left(\dfrac{P^2}{QR^2}\right)^3$ en función de x, y y z.

3 Escriba estas expresiones en la forma $a + b\log x$ donde a y b son números enteros

a $\log 10x$ **b** $\log\dfrac{100}{x^2}$ **c** $\log\sqrt{10x}$ **d** $\log\dfrac{1}{10\sqrt{x}}$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Sabiendo que $y = \log_3 \dfrac{27^a}{81}$, escriba y en la forma $y = pa + q$ donde p y q son números enteros a determinar.

5 Escriba $\log_3 \dfrac{1}{27x^2}$ en la forma $a + b\log_3 x$ donde a y b son enteros.

6 Muestre que $e^{x\ln 2} = 2^x$.

Observe que la pregunta 6 de la ejercitación 4N ilustra el resultado general

$$a^x = e^{x\ln a}$$

Cambio de base

A veces se necesita cambiar la base de un logaritmo y existe una fórmula que permite hacerlo.

Suponga que quiere evaluar $\log_b a$ utilizando logaritmos en otra base, c.
Si $y = \log_b a$ entonces $a = b^y$.
Comenzamos con $a = b^y$.
Aplicamos logaritmos en base c en ambos miembros:

$$\log_c a = \log_c b^y$$
$$\log_c a = y\log_c b$$
$$y = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Pero $y = \log_b a$ por lo tanto

> ➔ Fórmula del cambio de base:
> $$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Esta fórmula resulta útil puesto que la mayoría de las calculadoras solo calculan logaritmos en base 10 o e.

Esta fórmula se puede usar para evaluar un logaritmo o para cambiar un logaritmo a cualquier base.

Ejemplo 21

Use la fórmula del cambio de base para evaluar $\log_4 9$ con 3 cifras significativas.	
Respuesta	
$\log_4 9 = \dfrac{\log 9}{\log 4}$	*Cambiar el logaritmo a la base 10*
$= 1{,}58\ (3\ \text{cs})$	*Usar la calculadora para evaluar la respuesta*

Para logaritmos en base 10, el 10 se omite.

Ejemplo 22

$\log_x 3 = a$ y $\log_x 6 = b$. Halle $\log_3 6$ en función de a y b.	
Respuesta	
$\log_3 6 = \dfrac{\log_x 6}{\log_x 3}$ $= \dfrac{b}{a}$	*Usar la fórmula del cambio de base*

Ejercitación 40

1 Use la fórmula del cambio de base para evaluar estas expresiones con una aproximación de 3 cifras significativas.

a $\log_2 7$ **b** $\log_5\left(\dfrac{1}{7}\right)$ **c** $\log_3(0{,}7)$

d $\log_7 e$ **e** $\log_3 7^7$

2 Sabiendo que $\log_3 x = y$, exprese $\log_9 x$ en función de x e y.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Si $\log_a 2 = x$ y $\log_a 6 = y$, halle en función de x e y:

a $\log_2 6$ **b** $\log_6 2$ **c** $\log_2 36$

d $\log_a 24$ **e** $\log_6 12$ **f** $\log_2 3$

4 Use su CPG para dibujar aproximadamente estos gráficos.

a $y = \log_4 x$ **b** $y = 2\log_5 x$

5 Sabiendo que $\log_4 a = b$, exprese y en función de b.

a $y = \log_4 a^2$ **b** $y = \log_{16} a$

c $y = \log_{\frac{1}{4}} a^2$ **d** $y = \log_{\frac{1}{16}} \sqrt{a}$

4.7 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Resolución de ecuaciones exponenciales

Podemos usar logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales.
En la sección 4.2 resolvimos ecuaciones exponenciales donde las bases eran iguales o podían igualarse. En esta sección aprenderemos cómo resolver ecuaciones exponenciales en las que las bases son números distintos.

Ejemplo 23

Resuelva $5^x = 9$.

Respuesta

$5^x = 9$	
$\log 5^x = \log 9$	*Aplicar logaritmos en ambos miembros*
$x \log 5 = \log 9$	*Ahora bajar el exponente*
$x = \frac{\log 9}{\log 5}$	*Reordenar la ecuación*
$x = 1{,}3652\ldots$	
$x = 1{,}37$ (3 cs)	*Controlar si la pregunta requiere una respuesta exacta*

Elija logaritmos en base 10 o logaritmos naturales para poder usar su CPG.

Ejemplo 24

Resuelva $6^x = 3^{x+1}$ dando su respuesta en la forma $\frac{\ln a}{\ln b}$ donde a y b son enteros.

Respuesta

$6^x = 3^{x+1}$	
$\ln 6^x = \ln 3^{x+1}$	*Aplicar ln en ambos miembros*
$x \ln 6 = (x+1) \ln 3$	*Bajar los exponentes*
$x \ln 6 = x \ln 3 + \ln 3$	*Aplicar propiedad distributiva para eliminar los paréntesis*
$x \ln 6 - x \ln 3 = \ln 3$	*Agrupar los términos en x*
$x(\ln 6 - \ln 3) = \ln 3$	*Factorizar y dividir*
$x = \frac{\ln 3}{(\ln 6 - \ln 3)}$	
$x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$	$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

Ejemplo 25

Resuelva $e^{3x} = 5^{1-x}$, dando su respuesta en forma exacta.

Respuesta

$e^{3x} = 5^{1-x}$	*Usar logaritmos naturales dado que*
$\ln e^{3x} = \ln 5^{1-x}$	*$\ln e^x = x$*
$3x = (1-x)\ln 5$	*Bajar los exponentes*
$3x = \ln 5 - x\ln 5$	*Aplicar propiedad distributiva para eliminar los paréntesis*
$3x + x\ln 5 = \ln 5$	*Agrupar los términos en x*
$x(3 + \ln 5) = \ln 5$	*Factorizar y dividir*
$x = \dfrac{\ln 5}{(3+\ln 5)}$	

Deje su respuesta como un logaritmo, dado que se exige una respuesta exacta.

Ejercitación 4P

1 Resuelva estas ecuaciones para hallar el valor de x con 3 cifras significativas.

a $2^x = 5$ **b** $3^x = 50$ **c** $5^{-x} = 17$ **d** $7^{x+1} = 16$

e $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \dfrac{7}{9}$ **f** $2^{2x-1} = 3{,}2 \times 10^{-3}$ **g** $e^x = 6$ **h** $e^{\frac{x}{5}} = 0{,}11$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Resuelva estas ecuaciones para hallar el valor de x con 3 cifras significativas.

a $2^{x+2} = 5^{x-3}$ **b** $3^{2-x} = 4^{2x-5}$ **c** $3^{\frac{x}{3}} = 5^{x+3}$ **d** $7^x = (0{,}5)^{x-1}$

e $e^{3x-1} = 3^x$ **f** $4e^{3x-2} = 244$ **g** $35e^{-0{,}001x} = 95$

Ejemplo 26

Resuelva $3 \times 6^{x-1} = 2 \times 3^{x+2}$, dando su respuesta en la forma $x = \dfrac{\ln a}{\ln b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Respuesta

$\ln(3 \times 6^{x-1}) = \ln(2 \times 3^{x+2})$	*Aplicar logaritmo natural en ambos miembros*
$\ln 3 + \ln(6^{x-1}) = \ln 2 + \ln(3^{x+2})$	
$\ln 3 + (x-1)\ln 6 = \ln 2 + (x+2)\ln 3$	
$\ln 3 + x\ln 6 - \ln 6 = \ln 2 + x\ln 3 + 2\ln 3$	
$x\ln 6 - x\ln 3 = \ln 2 + 2\ln 3 + \ln 6 - \ln 3$	*Agrupar los términos en x y factorizar*
$x(\ln 6 - \ln 3) = \ln 2 + \ln 9 + \ln 6 - \ln 3$	
$x = \dfrac{\ln\left(\frac{108}{3}\right)}{\ln\left(\frac{6}{3}\right)} = \dfrac{\ln 36}{\ln 2}$	*Este resultado no puede simplificarse más.* $\dfrac{\ln a}{\ln b} \neq \ln\dfrac{a}{b}$

Ejercitación 4Q

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 Resuelva estas ecuaciones para hallar el valor de x con 3 cifras significativas.

a $7 \times 3^x = 25$ **b** $4 \times 3^x = 5^{2x-1}$ **c** $3 \times 2^x = 4 \times 5^x$

d $5 \times 2^{x-1} = 3 \times 7^{2x}$ **e** $3^x 4^{x-1} = 2 \times 7^{x+2}$

2 Resuelva estas ecuaciones para hallar el valor de x en la forma $x = \frac{\ln a}{\ln b}$, donde $a, b \in \mathbb{Q}$.

a $2^{x+2} = 5^{x-3}$ **b** $5 \times 3^x = 8 \times 7^x$

c $5 \times 3^{x+1} = 2 \times 6^{3-2x}$ **d** $(6^x)(2^{x-1}) = 2(4^{x+2})$

3 Resuelva en x:

a $e^{2x} - e^x = 0$ **b** $4^x - 3(2^x) = 0$

Resolución de ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas que presentan logaritmos de igual base en ambos miembros de la igualdad pueden resolverse igualando los **argumentos** de los logaritmos.

El argumento es la expresión que figura entre paréntesis.

Ejemplo 27

Resuelva $\log_a(x^2) = \log_a(3x+4)$.

Respuesta

$\log_a(x^2) = \log_a(3x+4)$	
$x^2 = 3x + 4$	*Igualar los argumentos*
$x^2 - 3x - 4 = 0$	*Resolver la ecuación cuadrática*
$(x-4)(x+1) = 0$	
$x = 4$ o $x = -1$	

Debemos verificar que ambas soluciones son posibles.
Debemos recordar que no es posible calcular el logaritmo de un número negativo. Reemplazando $x = 4$ y $x = -1$ en ambos miembros de la ecuación original se obtienen argumentos positivos; por ende, en este caso, ambas soluciones son posibles.

Ejemplo 28

Resuelva $\ln(12-x) = \ln x + \ln(x-5)$.

Respuesta

$\ln(12-x) = \ln x + \ln(x-5)$	
$\ln(12-x) = \ln x(x-5)$	
$\ln(12-x) = \ln(x^2-5x)$	
$12 - x = x^2 - 5x$	*Igualar argumentos*
$x^2 - 4x - 12 = 0$	*Resolver la ecuación cuadrática*
$(x-6)(x+2) = 0$	
$x = 6$ o $x = -2$	

▶ Continúa en la página siguiente.

Cuando $x = 6$, ambos argumentos, x y $(x - 5)$, son positivos. Cuando $x = -2$, los argumentos, x y $(x - 5)$, son negativos. Por lo tanto, $x = 6$ es la única solución.	*Verificar las soluciones*

Ejercitación 4R

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Resuelva en x las siguientes ecuaciones:

a $\log_2(x) = \log_2(6x - 1)$

b $\ln(x+1) = \ln(3-x)$

c $\log_5(2-x) = \log_5(6x-1)$

d $\log_2(2x+3) + \log_2(x-1) = \log_2(x+1)$

e $\log_3 x - \log_3(x-1) = \log_3(x+1)$

Algunas veces resulta más sencillo resolver una ecuación logarítmica usando exponentes.

Ejemplo 29

Resuelva $\log_5(x - 2) = 3$.

Respuesta $\log_5(2x-1) = 3$ $5^3 = 2x - 1$ $125 = 2x - 1$ $2x = 126$ $x = 63$	*Dado que* $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$

Ejemplo 30

Resuelva $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

Respuesta	
$\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$	
$\log_2[x(x-2)] = 3$	*Se usa la primera propiedad de la página 123.*
$\log_2(x^2 - 2x) = 3$	
$x^2 - 2x = 2^3$	*Dado que* $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$
$x^2 - 2x = 8$	
$x^2 - 2x - 8 = 0$	
$(x+2)(x-4) = 0$	
$x = -2$ o $x = 4$	*x y $(x - 2)$ deben ser números positivos.*
$x = 4$ es la única solución	

Ejercitación 4S

1 Resuelva en x estas ecuaciones:

a $\log_9(x-2)=2$ **b** $\log_3(2x-1)=3$ **c** $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=5$

2 Resuelva en x estas ecuaciones:

a $\log_6(x-5)+\log_6 x=2$ **b** $\log_2(4x-8)-\log_2(x-5)=4$

c $\log_7(2x-3)-\log_7(4x-5)=0$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Sabiendo que $\log_2 x + \log_2(2x+7)=\log_2 A$.
halle una expresión para A en función de x.

A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva
$\log_2 x+\log_2(2x+7)=2$

4 Resuelva $\log_4 x + \log_x 4=2$.

Aquí primero necesitará cambiar la base.

5 Resuelva $\log_2 x^2+\log_4\sqrt{x}=9$.

4.8 Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 4: Reducción a la forma lineal*

Crecimiento y decrecimiento exponencial

Los modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial emplean funciones exponenciales.

He aquí algunas aplicaciones de los modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial.

Biología

- Crecimiento de micro-organismos en un cultivo
- Población humana
- Propagación de un virus

Física

- Cadena de reacciones nucleares
- Transferencia de calor

Economía

- Los diagramas piramidales

Tecnología informática

- Potencia de procesamiento de computadores
- Crecimiento del tráfico de Internet

Podría elegir alguno de estos temas como base de su exploración matemática.

Dos áreas de las matemáticas que aparentan estar totalmente desconectadas podrían ser las de exponenciales y probabilidades. Pero, examine este problema. Un grupo de personas salen a almorzar y luego toman sus sombreros al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tome su propio sombrero? Puede demostrarse que esta probabilidad es $\frac{1}{e}$.
(Podría explorar esto una vez que haya profundizado el tema de las probabilidades.) ¿Puede pensar en otras áreas de conocimiento que estén asombrosamente conectadas?

Crecimiento exponencial

Ejemplo 31

La población de una ciudad, $A(t)$, en miles, se modeliza mediante la función $A(t) = 30e^{(0,02)t}$ donde t es el número de años después de 2010. Use este modelo para responder a estas preguntas:

a ¿Cuál era la población de la ciudad en el año 2010?

b ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento de la población de la ciudad cada año?

c ¿Cuál será la población en el año 2020?

d ¿Cuándo la población de la ciudad alcanzará los 60 000 habitantes?

Respuestas

a $A(0) = 30e^0$
$= 30$

La población en 2010 era de 30 000.

t es el número de años ***después*** *de 2010, por lo tanto, t = 0*

b $A(1) = 30e^{(0,02)}$

$\frac{30e^{(0,02)}}{30} = e^{(0,02)}$
$= 1,0202...$

La población crece un 2,02% cada año.

Escribir una ecuación para la población un año después de 2010
Calcular el factor de multiplicación

c $A(10) = 30e^{(0,02)\times 10}$
$= 36,642...$

En 2020 la población será de 36 642.

En 2020, t = 10.

d $60 = 30e^{(0,02)t}$

$2 = e^{(0,02)t}$

$\ln 2 = \ln e^{(0,02)t}$

$\ln 2 = 0,02t$

$t = \frac{\ln 2}{0,02}$

$t = 34,657...$

La población será de 60 000 después de 34,66 años, esto es, durante 2044.

Cuando la población es de 60 000, A(t) = 60.
Aplicar logaritmos en ambos miembros

Bajar el exponente
Resolver en t

Decrecimiento exponencial

Ejemplo 32

Una cazuela se saca del horno y se enfría de acuerdo con el modelo de fórmula $T(t) = 85e^{-0,1t}$, donde t es el tiempo en minutos y T es la temperatura en °C.

a ¿Cuál es la temperatura de la cazuela cuando se la saca del horno?

b Si la temperatura de la habitación es de 25°C, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que la cazuela alcance temperatura ambiente?

Respuestas

a $T(0) = 85e^0$
$= 85$

La temperatura de la cazuela es de 85°C.

Cuando la cazuela se saca del horno, t = 0.

b
$$85e^{-0,1t} = 25$$

T = 25 si la temperatura de la habitación es de 25°C.

$$e^{-0,1t} = \frac{25}{85} = \frac{5}{17}$$

$$\ln e^{-0,1t} = \ln\frac{5}{17}$$

Aplicar logaritmos en ambos miembros

$$-0,1t = \ln\frac{5}{17}$$
$$= -1,22377\ldots$$
$$t = 12,2 \text{ (3 cs)}$$

Resolver en t

La cazuela alcanzará temperatura ambiente luego de 12,2 minutos.

Ejercitación 4T

1 Se invierte una suma de 450 euros al 3,2% de interés compuesto, con capitalización anual.

a Escriba la fórmula para el valor de la inversión luego de n años.

b ¿Después de cuántos años el valor superará por primera vez los 600 euros?

2 En las primeras etapas de una epidemia de sarampión había 100 personas infectadas y cada día el número aumentó un 10%.

a ¿Cuánta gente resultó infectada en los siguientes espacios de tiempo?

i Después de dos días **ii** Después de una semana

b ¿Cuánto tiempo pasará hasta que se infecten 250 personas?

3 Los incendios forestales se propagan de manera exponencial. Por cada hora de fuego sin control, el área de la quema se incrementa en un 15%.

Si se han quemado 10 hectáreas y el fuego se sale de control, ¿en cuánto tiempo se estarán quemando 10 000 hectáreas?

4 José realizó un salto en paracaídas para fines de caridad. Después de saltar del avión, su velocidad en el tiempo t segundos después de que su paracaídas se abrió era v m s^{-1}, donde

$v = 9 + 29e^{-0{,}063t}$

a Dibuje aproximadamente el gráfico de v en función de t.

b ¿Cuál era la velocidad de José en el instante en el que se abrió el paracaídas?

c ¿Cuál fue su menor velocidad posible si se lanzó desde una altura muy grande?

d Si aterrizó después de 45 segundos, ¿cuál fue la velocidad a la que aterrizó?

e ¿Cuánto tiempo le llevó alcanzar la mitad de la velocidad que tenía cuando se abrió el paracaídas?

5 Dos variables x y n están relacionadas por la fórmula $x = a \times n^b$. Cuando $n = 2$, $x = 32$ y cuando $n = 3$, $x = 108$. Halle los valores de a y b.

El geólogo estadounidense Charles Richter definió la magnitud de un terremoto como:

$$M = \log \frac{I}{S}$$

M es la magnitud (en decimales), I es la intensidad del terremoto (medida por la amplitud en mm, tomada por un sismógrafo ubicado a 100 km del epicentro del terremoto) y S es la intensidad de un terremoto “estándar”.
La intensidad de un terremoto estándar (S) es 0,001 milímetros.
Explore en profundidad la escala Richter.

Intensidad	Escala de Richter
Suave	0–4,3
Moderado	4,3–4,8
Intermedio	4,8–6,2
Fuerte	6,2–7,3
Catastrófico	7,3+

Ejercicio de revisión

1 Evalúe $\log_5 287$.

2 Resuelva estas ecuaciones:

a $3^{2x+3} = 90$ **b** $5^{x-1} = 3^{3x}$ **c** $2 \times 3^{2x} = 5^x$

3 Resuelva estas ecuaciones:

a $\log x + \log(3x - 13) = 1$

b $\log_5(x + 6) - \log_5(x + 2) = \log_5 x$

c $\ln(4x - 7) = 2$

d $\log_2\left(x^2\right) = (\log_2 x)^2$

e $\log_{10} x = 4\log_x 10$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Las funciones f y g están definidas como

$f(x) = e^{2x}$ para todo x real

$g(x) = \frac{3}{2}\ln x$ para $x > 0$

a Indique el recorrido de $f(x)$ y $g(x)$.

b Explique por qué ambas funciones tienen inversa. Halle las expresiones de las funciones inversas $f^{-1}(x)$ y $g^{-1}(x)$.

c Halle una expresión para $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

d Resuelva la ecuación $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

5 El número, n, de insectos en una colonia, está dado por $n = 4000e^{0,08t}$ donde t es el número de días después de comenzada la observación.

a Halle la población de la colonia después de 50 días.

b ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que la población se duplique?

Ejercicio de revisión

1 Resuelva $25^{4x-3} = \left(\frac{1}{125}\right)^{x+2}$.

2 Halle el valor exacto de x que satisface la ecuación $(5^{x+1})(7^x) = 3^{2x+1}$. Dé su respuesta en la forma $\frac{\log a}{\log b}$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

3 Halle el valor exacto de $2\log_3 27 + \log_3\left(\frac{1}{3}\right) - \log_3 \sqrt{3}$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Escriba $4\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 y - 5\log_3 z$ como un único logaritmo.

5 Resuelva:

a $\log_3(4x - 1) = 3$ **b** $\log_{x+1}(x - 1) = 2$

c $\log_3(2\log x) = 4$ **d** $\log_2(x - 2) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = 3$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 Si $m = \log_x 4$ y $n = \log_x 8$, halle expresiones en función de m y n para:

a $\log_4 8$ **b** $\log_x 2$ **c** $\log_x 16$ **d** $\log_8 32$

7 La función f está definida para todos los valores reales de x por $f(x) = e^{3(x-1)} + 2$. Describa una serie de transformaciones por las cuales el gráfico de $y = f(x)$ pueda obtenerse a partir del gráfico de $y = e^x$.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

8 Halle la función inversa $f^{-1}(x)$ si:

a $f(x) = 3e^{2x}$ **b** $f(x) = 10^{3x}$ **c** $f(x) = \log_2(4x)$

9 Resuelva este sistema de ecuaciones en a y b, sabiendo que a y b son números reales positivos.

$\log_a 64 + \log_a b = 8;\ \log_{ba} = \frac{1}{2}$

RESUMEN DEL CAPÍTULO 4

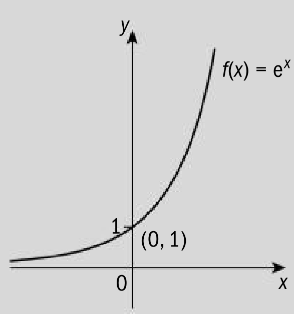
Potencias

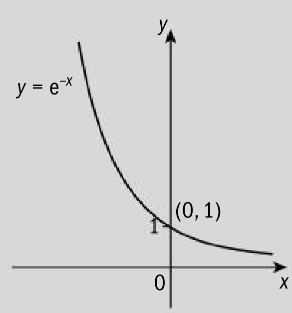
Propiedades de las potencias

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Funciones exponenciales

- Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$ donde a es un número real positivo (esto es, $a > 0$) y $a \neq 1$.
- El **dominio** de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales.
- El **recorrido** es el conjunto de todos los números reales positivos.
- El gráfico de la función exponencial $f(x) = e^x$ es un gráfico de crecimiento exponencial y el gráfico de $f(x) = e^{-x}$ es un gráfico de decrecimiento exponencial.





Continúa en la página siguiente.

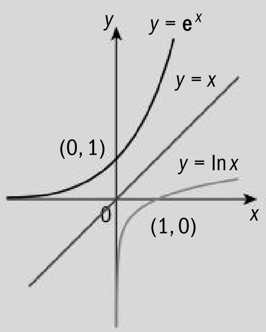
Logaritmos

Propiedades de los logaritmos

- Si $b = a^x$ entonces $\log_a b = x$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a b$ no está definido para cualquier base a si b es negativo
- $\log_a 0$ no está definido
- $\log_a (a^n) = n$

Funciones logarítmicas

- Para hallar algebraicamente la inversa de una función, intercambie x e y y luego reordene, despejando la variable y.
- En general, si $f : x \mapsto a^x$ entonces $f^{-1} : x \mapsto \log_a x$.
  $y = \log_a x$ es la inversa de $y = a^x$.
- $y = \ln x$ es la inversa de la función exponencial $y = e^x$.



- $\log_a(a^x) = x$ y $a^{\log_a x} = x$
  $\ln(e^x) = x$ y $e^{\ln x} = x$
  $\log(10^x) = x$ y $(10^{\log x}) = x$

Propiedades de los logaritmos

- $\log x + \log y = \log xy$
- $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$
- $\log x^n = n \log x$
- $\log \frac{1}{x} = -\log x$

Fórmula del cambio de base

- $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

La belleza de las matemáticas

"Las matemáticas más admirables tienen la simplicidad y la inevitabilidad de la poesía y la música supremas, erigidas en el límite entre todo lo maravilloso de la ciencia y toda la belleza del arte".

Herbert Westren Turnbull (1885–1961)
Los grandes matemáticos, 1929

Soluciones bellas y sencillas

¿Alguna vez se ha sentido satisfecho(a) por la forma en que había resuelto un problema matemático?

¿Fue simplemente por haber llegado a la respuesta correcta o porque su resolución le pareció eficiente, elegante y hasta hermosa?

Considere estas dos resoluciones del problema:

Desarrolle y simplifique $(x + y + z)(x - y - z)$

Solución 1	**Solución 2**
$(x + y + z)(x - y - z)$	$(x + y + z)(x - y - z)$
$= x^2 - xy - xz + xy - y^2 - yz + xz - yz - z^2$	$= (x + (y + z))(x - (y + z))$
$= x^2 - 2yz - y^2 - z^2$	$= x^2 - (y + z)^2$
$= x^2 - (y^2 + 2yz + z^2)$	
$= x^2 - (y + z)^2$	

- ¿Cuál solución es mejor?

Ambas arrojan el mismo resultado, por lo tanto ninguna es mejor que la otra. Sin embargo, la solución 2 es más elegante y demuestra más perspicacia que la solución 1.

"La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas".

Albert Einstein
(1879–1955)

Ecuaciones hermosas y sencillas: modelos del mundo

> *"La esencia de las matemáticas no es complicar las cosas simples sino simplificar las cosas complicadas".*
>
> Stan Gudder, catedrático de matemáticas, Universidad de Denver

He aquí algunas ecuaciones famosas

Ecuación de Einstein: $E = mc^2$

Segunda ley de Newton: $F = ma$

Ley de Boyle: $V = \frac{k}{p}$

Ecuación de Schrödinger: $H\psi = E\psi$

Ley de la gravitación universal de Newton: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

¿No resulta asombroso que podamos describir el universo usando ecuaciones matemáticas como estas?

Estas ecuaciones han ayudado a poner al hombre en la Luna y traerlo de vuelta, desarrollar la Internet inalámbrica y comprender el funcionamiento del cuerpo humano.

- Estas son solo cinco ecuaciones: ¿cuál es su favorita?
- ¿Es posible que las matemáticas y la ciencia descubran un día la teoría que explique absolutamente todo?
  - ¿Una teoría que explique y relacione completamente todos los fenómenos físicos conocidos?
  - ¿Una teoría que tenga el poder de predecir el resultado de cualquier experimento que pudiera llevarse a cabo?

¿No sería algo maravilloso?

◄ La ley de Boyle explica por qué las burbujas aumentan su tamaño a medida que ascienden a la superficie del agua.

5 Funciones racionales

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

2.5 La función recíproca $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, su gráfico y la propiedad de coincidir con su inversa

La función racional $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ y su gráfico

Asíntotas horizontales y verticales

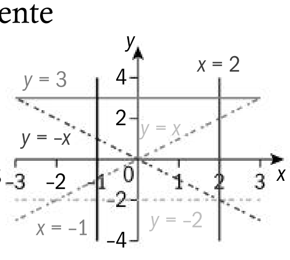
Aplicación de las funciones racionales a situaciones de la vida real

Antes de comenzar

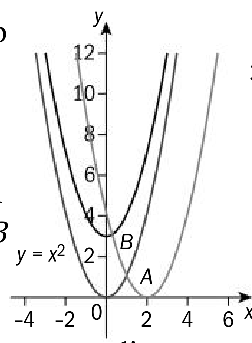
Qué necesitamos saber

1 Desarrollar polinomios
Por ejemplo: Multiplicar los polinomios $-2(3x-1)$ y $3x(x^2+1)$:
$-2(3x-1) = -6x + 2$
$3x(x^2+1) = 3x^3 + 3x$

2 Representar gráficamente rectas horizontales y verticales
Por ejemplo:
Representar las rectas $y = x$, $y = -x$, $x = 2$, $x = -1$, $y = 3$ e $y = -2$ en el mismo gráfico



3 Reconocer y describir una traslación
Por ejemplo: Hallar las traslaciones que le asignan a $y = x^2$ las funciones A y B
A es un desplazamiento horizontal de 2 unidades a la derecha. La función correspondiente a A es $y = (x-2)^2$.
B es un desplazamiento vertical de 3 unidades hacia arriba. La función correspondiente a B es $y = x^2 + 3$.



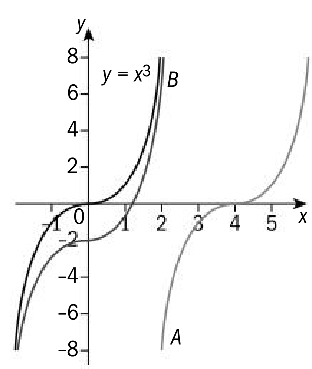
Comprobemos nuestras habilidades

1 Desarrolle los polinomios:

a $-4(2x-5)$ **b** $6(2x-3)$
c $-x(x^2+7)$ **d** $x^2(x+3)^2$
e $x(x-3)(x+8)$

2 Dibuje las siguientes rectas en un gráfico:
$x = 0$, $y = 0$,
$x = 3$, $x = -2$,
$y = -3$, $y = 4$

3 Describa las trasformaciones que le asignan a $y = x^3$ las funciones A y B y escriba las fórmulas correspondientes.



¿Sabemos cuántas canciones, álbumes, sonidos y demás podemos almacenar en un reproductor de MP3? La respuesta depende de la calidad del ajuste de grabación y la duración de la canción. Sin embargo, una idea aproximada es que un reproductor MP3 de 4GB puede almacenar 136 horas o 8160 minutos de música. Esto es aproximadamente:

2000 canciones de 4 minutos cada una
o 1000 canciones de 8 minutos
o 4000 canciones de 2 minutos

Esto nos lleva a la función $s = \frac{8000}{m}$ donde s es el número de canciones y m es el número de minutos que dura una canción.

Esta función es un ejemplo de la función recíproca $f(x) = \frac{k}{x}$.

En este capítulo utilizaremos la calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG) para explorar los gráficos de las funciones recíprocas y otras funciones racionales que pueden ser expresadas en la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Examinaremos asíntotas horizontales y verticales para los gráficos de esas funciones y el dominio y recorrido de las mismas.

5.1 Recíprocos

Investigación: representación gráfica de productos

Pensemos en pares de números cuyo producto es 24.

Por ejemplo: 24 x 1, 12 x 2, 8 x 3, 3 x 8. Copie la tabla y añada más pares de números.

x	24	12	8	3					
y	1	2	3	8					

Muestre esos pares como coordenadas en un gráfico con $0 \leq x \leq 24$ y $0 \leq y \leq 24$.
Ahora haga lo mismo con números negativos (p.ej., -12×-2) y muéstrelos en el gráfico también.
Explique lo que observa acerca de:

- El valor de x cuando y se hace más grande
- El valor de y cuando x se hace más grande
- El comportamiento extremo de su gráfico

Se denomina **comportamiento extremo** a la apariencia de un gráfico a medida que se lo continúa en ambas direcciones.

→ El **recíproco** de un número es 1 dividido por el número.

Por ejemplo, el recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$.
El recíproco de una fracción resulta ser la fracción invertida.
Por ejemplo, el recíproco de $\frac{3}{4}$ es $1 \div \frac{3}{4} = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.
El recíproco de $\frac{7}{10}$ es $\frac{10}{7}$. El recíproco de $\frac{1}{4}$ es $\frac{4}{1}$ o 4.

El número cero no tiene recíproco ya que $\frac{1}{0}$ no está definido. ¿Qué le muestra su CPG para $1 \div 0$?

→ Un número multiplicado por su recíproco es igual a 1.
Por ejemplo: $3 \times \frac{1}{3} = 1$

En una traducción de 1570 de la obra de Euclides, *Elementos* (300 a.C.), se llamó *reciprocali* a las cantidades geométricas en proporción inversa.

Ejemplo 1

Halle el recíproco de $2\frac{1}{2}$.

Respuesta

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$	*Escribir como una fracción impropia*
Recíproco de $\frac{5}{2} = \frac{2}{5}$	*Invertirla*

Verificar: $\frac{5}{2} \times \frac{2}{5} = 1$

También podemos hallar recíprocos de términos algebraicos.

→ El **recíproco** de x es $\frac{1}{x}$ o x^{-1} y $x^{-1} \times x = 1$.

Al recíproco de un número o de una variable también se lo llama "inverso multiplicativo".

Ejercitación 5A

1 Halle los recíprocos:

a 2 **b** 3 **c** -3 **d** -1

e $\frac{2}{3}$ **f** $\frac{7}{11}$ **g** $-\frac{3}{2}$ **h** $3\frac{1}{2}$

2 Halle los recíprocos:

a $6{,}5$ **b** x **c** y **d** $3x$ **e** $4y$

f $\frac{2x}{9}$ **g** $\frac{3a}{5}$ **h** $\frac{2}{3d}$ **i** $\frac{d}{t}$ **j** $\frac{x+1}{x-1}$

El término *recíproco* ya se usaba por lo menos en la tercera edición de la *Encyclopaedia Britannica* (1797), para describir dos números cuyo producto es 1.

3 Multiplique cada cantidad por su recíproco. Muestre su procedimiento.

a 6 **b** $\frac{3}{4}$ **c** $\frac{2c}{3d}$

4 **a** ¿Cuál es el recíproco del recíproco de 4?

b ¿Cuál es el recíproco del recíproco de x?

5 Para la función $xy = 24$:

a Halle y cuando x vale:

i 48 **ii** 480 **iii** 4800 **iv** 48 000

b ¿Qué sucede con el valor de y cuando x se vuelve más grande?

c ¿Alcanzará y alguna vez el valor 0? Explique.

d Halle x cuando y vale:

i 48 **ii** 480 **iii** 4800 **iv** 48 000

e ¿Qué sucede con el valor de x cuando y se vuelve más grande?

f ¿Alcanzará x alguna vez el valor 0? Explique.

Esta es la función que se usó en la investigación de la página 142.

5.2 La función recíproca

La **función recíproca** es $f(x) = \frac{k}{x}$ donde k es una constante.

Todos los gráficos de funciones recíprocas tienen formas similares.

Investigación: gráficos de funciones recíprocas

Utilice la CPG para dibujar los gráficos de esta investigación.

1 Obtenga el gráfico de las siguientes funciones: **a** $f(x) = \frac{1}{x}$ **b** $g(x) = \frac{2}{x}$ **c** $h(x) = \frac{3}{x}$

¿Qué efecto produce cambiar el valor del numerador?

2 Obtenga el gráfico de las siguientes funciones: **a** $f(x) = \frac{-1}{x}$ **b** $g(x) = \frac{-2}{x}$ **c** $h(x) = \frac{-3}{x}$

¿Qué efecto produce cambiar el signo del numerador?

3 **a** Copie y complete esta tabla para $f(x) = \frac{4}{x}$:

x	0,25	0,4	0,5	1	2	4	8	10	16
$f(x)$									

b ¿Qué observa acerca de los valores de x y $f(x)$ en la tabla?

c Dibuje el gráfico de la función.

d Dibuje la recta $y = x$ en el mismo gráfico.

e Dibuje la simetría de $f(x) = \frac{4}{x}$ con respecto a la recta $y = x$. **f** ¿Qué observa?

g ¿Qué le dice esto acerca de la función inversa f^{-1}?

Asíntotas

Los gráficos de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ en la investigación de la página 143 consisten todos en dos curvas. Las curvas se acercan a los ejes pero nunca los tocan ni los cortan.

Los ejes son asíntotas del gráfico.

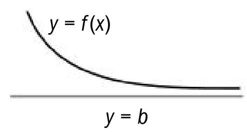
➔ Si una curva se acerca más y más a una recta pero nunca la toca, esa recta se denomina **asíntota**.

La palabra *asíntota* se deriva del griego *asymptotos*, que significa "que no cae junto".

$y = b$ es una asíntota de la función $y = f(x)$

A medida que $x \to \infty$, $f(x) \to b$.

El símbolo $\to$ significa "tiende a".

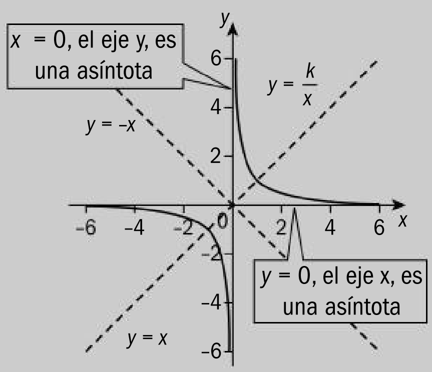


➔ El gráfico de cualquier función recíproca de la forma $y = \frac{k}{x}$ tiene como asíntota vertical a $x = 0$ y como asíntota horizontal a $y = 0$.

La recta horizontal $y = b$ es una asíntota horizontal del gráfico de $y = f(x)$.

➔ El gráfico de una función recíproca se llama **hipérbola**.

- El eje x es la asíntota horizontal.
- El eje y es la asíntota vertical.
- El dominio y el recorrido son todos los números reales excepto el cero.
- Las dos ramas del gráfico son simétricas respecto de la recta $y = -x$.
- $y = -x$ e $y = x$ son los ejes de simetría de esta función.



La función recíproca tiene muchas aplicaciones en los algoritmos de la informática, particularmente los relacionados con la teoría de números. Quizás resulte interesante investigar estas aplicaciones con mayor profundidad.

En el capítulo 1 vimos que para dibujar la inversa de la función $f(x)$, se dibuja la simetría de f respecto de la recta $y = x$. Si realizamos una simetría de $f(x) = \frac{1}{x}$ respecto de la recta $y = x$, obtenemos el mismo gráfico que para $f(x)$.

➔ La función recíproca **coincide con su inversa**.

La fórmula de la función en la investigación de la página 142 es $xy = 24$. Esta se puede escribir como $y = \frac{24}{x}$ y es una función recíproca. Tiene un gráfico similar al que se mostró anteriormente.

La **función recíproca**, $f(x) = \frac{1}{x}$, es uno de los ejemplos más simples de una función que coincide con su inversa.

El diseño del hotel Yas Viceroy de Abu Dhabi, por el estudio Asymptote Architecture, se basa en modelos matemáticos. ¡También cuenta con una pista de carreras de Fórmula 1 que recorre el centro del hotel!

Ejemplo 2

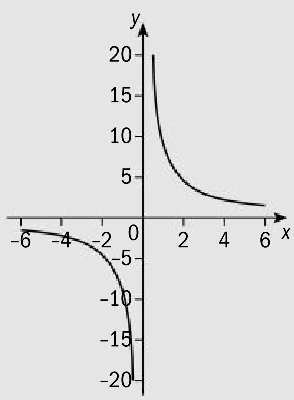
Para cada función:

- Escriba las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
- Dibuje aproximadamente el gráfico.
- Indique el dominio y el recorrido.

a $y = \frac{9}{x}$ **b** $y = \frac{9}{x} + 2$

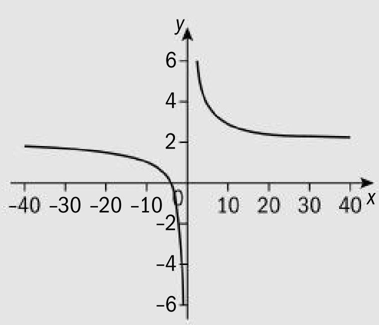
Respuestas

a Las asíntotas son $x = 0$ e $y = 0$.



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

b Las asíntotas son $x = 0$ e $y = 2$.



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 2$

El gráfico de f(x) + 2 es igual al gráfico de f(x) pero desplazado 2 unidades en la dirección del eje y.

Ejercitación 5B

1 Dibuje en distintos gráficos:

a $y = \frac{5}{x}$ **b** $y = \frac{6}{x}$ **c** $xy = 8$

2 En el mismo gráfico muestre $y = \frac{12}{x}$ e $y = \frac{-12}{x}$.

3 a Dibuje aproximadamente el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y escriba sus asíntotas.

b Dibuje aproximadamente el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ y escriba sus asíntotas.

Es importante saber resolver las preguntas **3b**, **4b** y **4c** tanto analíticamente (por medios algebraicos y gráficos, aplicando transformaciones) como utilizando la CPG.

4 Identifique la asíntota horizontal y la vertical de las siguientes funciones e indique el dominio y el recorrido de cada una.

a $y = \frac{20}{x}$ **b** $y = \frac{3}{x} + 2$ **c** $y = \frac{4}{x} - 2$

Puede resultar útil dibujar los gráficos.

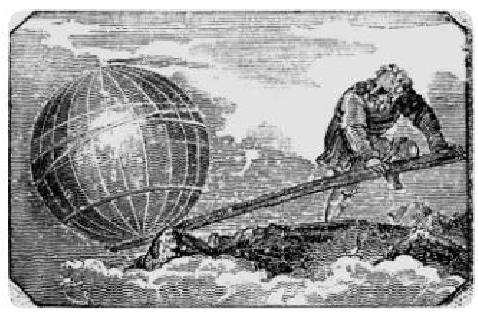
5 El Corryvreckan, el tercer remolino más grande del mundo, está entre las islas de Jura y Scarba en las costas de Escocia. El flujo y reflujo de las mareas desde el oeste sumado al rugido del maelstrom resultante pueden oírse a 16 km de distancia.

La velocidad del agua circundante aumenta a medida que se acerca al centro y se modeliza mediante $v = \frac{250}{d}$ donde v es la velocidad del agua en m s^{-1} y d es la distancia desde el centro en metros.

a Use su CPG para obtener el gráfico de la función para $0 \le d \le 50$ y $0 \le v \le 200$.

b ¿A qué distancia la velocidad es de $10\,\text{m s}^{-1}$?

c ¿Cuál es la velocidad del agua a 100 m del centro?



▲ Se cree que Arquímedes dijo: “Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo”.

6 La fuerza (F) necesaria para levantar un objeto de una masa de 1500 kg se modeliza mediante $F = \frac{1500}{l}$ donde l es la longitud de la palanca en metros y la fuerza se mide en Newtons.

a Dibuje aproximadamente el gráfico para $0 \le l \le 6$ y $0 \le F \le 5000$.

b ¿Cuánta fuerza debería aplicar si tuviera una palanca de 2 m?

c ¿Qué longitud de palanca necesitaría si pudiera ejercer las siguientes fuerzas? **i** 1000 N **ii** 2000 N **iii** 3000 N

N es el símbolo de la unidad de fuerza, Newton.

5.3 Funciones racionales

¿Hemos notado la manera en la que cambia el sonido de la sirena de un auto policial o de bomberos a medida que se acercan a nosotros? La frecuencia observada es superior a la frecuencia emitida durante el acercamiento, es idéntica en el instante de paso y es menor durante el tiempo que se aleja. A esto se lo llama efecto Doppler. La fórmula para la frecuencia observada de sonido cuando la fuente viaja hacia nosotros es:

La frecuencia de sonido se mide en hercios (Hz), la cantidad de ondas por segundo.

$$f_1 = \frac{330f}{330-v}$$

donde:

- 330 es la velocidad del sonido en $\mathrm{m\,s^{-1}}$.
- f_1 es la frecuencia observada en Hz.
- f es la frecuencia emitida.
- v es la velocidad de la fuente.

f_1 es una función racional.

➔ Una **función racional** es una función de la forma $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ donde g y h son polinomios.

$h(x)$ nunca puede ser cero, ya que un valor dividido por cero no está definido.

En este curso $g(x)$ y $h(x)$ serán exclusivamente funciones lineales de la forma $px + q$, por lo que investigaremos funciones racionales $f(x)$ donde:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Ejemplo 3

Un vehículo se desplaza hacia nosotros a 96 km $\mathrm{h^{-1}}$ y hace sonar su bocina con una frecuencia de 8000 Hz. ¿Cuál es la frecuencia del sonido que oímos si la velocidad del sonido es 330 m $\mathrm{s^{-1}}$?

Respuesta $96\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 96\,000\,\mathrm{m\,h^{-1}}$ $96\,000\,\mathrm{m\,h^{-1}} = \frac{96\,000}{3600} = 26{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ $\text{Frecuencia observada} = \frac{330f}{330-v} = \frac{330\times 8000}{330-26{,}7} = 8700\,\mathrm{Hz}\ (3\,\mathrm{cs})$	*Convertir kilómetros por hora a metros por segundo* *1 hora = 3600 segundos*

Las unidades de velocidad deben ser las mismas en toda la ecuación. Podemos redondear números para obtener una respuesta aproximada.

Investigación: gráficos de funciones racionales 1

a Utilice la CPG para obtener el gráfico de $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x-2}$, $y = \frac{1}{x+3}$, $y = \frac{2}{x+3}$.

b Copie y complete la tabla:

Función racional	Asíntota vertical	Asíntota horizontal	Dominio	Recorrido
$y = \frac{1}{x}$				
$y = \frac{1}{x-2}$				
$y = \frac{1}{x+3}$				
$y = \frac{2}{x+3}$				

c ¿Qué efecto produce el cambio en el denominador en la asíntota vertical?
d ¿Qué observa acerca de las asíntotas horizontales?
e ¿Qué observa acerca del dominio y el valor de la asíntota vertical?
f ¿Qué observa acerca del recorrido y el valor de la asíntota horizontal?

Funciones racionales de la forma $y = \frac{k}{x-b}$

Una función racional $y = \frac{k}{x-b}$, donde k y b son constantes, tendrá una asíntota vertical cuando el denominador sea igual a 0, es decir, cuando $x = b$.

La asíntota horizontal será el eje x.

$\frac{1}{0}$ no está definido. Examinaremos esto más detalladamente en la sección de Teoría del Conocimiento al final del capítulo.

Ejemplo 4

a Identifique la asíntota horizontal y la vertical de $y = \frac{1}{x-3}$.
b Indique el dominio y el recorrido.
c Dibuje aproximadamente la función con la ayuda de la CPG.

Respuestas

a El eje x ($y = 0$) es la asíntota horizontal.
$x = 3$ es la asíntota vertical.

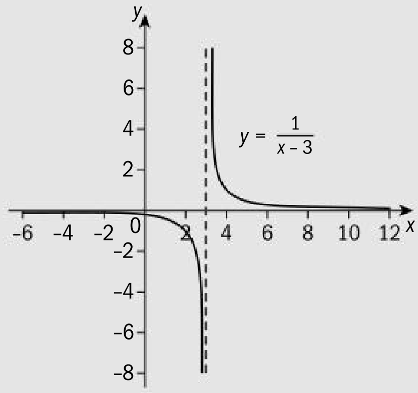
Dado que el numerador nunca será cero, el gráfico de esta función nunca toca al eje x. El denominador es cero cuando x = 3.

▶ Continúa en la página siguiente.

Un tema interesante para explorar es el concepto de infinito.

b Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

c



Ejercitación 5C

1 Identifique la asíntota horizontal y la vertical de las siguientes funciones e indique el dominio y el recorrido de cada una.

a $y = \frac{1}{x+1}$ **b** $y = \frac{1}{x-4}$ **c** $y = \frac{-2}{x-5}$ **d** $y = \frac{4}{x+1}$

e $y = \frac{4}{x+1} + 2$ **f** $y = \frac{4}{x+1} - 2$ **g** $y = \frac{4}{x-3} + 2$ **h** $y = \frac{-2}{x+3} - 2$

La pregunta 1 deberá resolverse usando el álgebra (a esto se le dice "utilizar un método analítico"), aunque se puede usar la CPG para verificar los resultados obtenidos.

2 Dibuje aproximadamente cada función con la ayuda de la CPG e indique el dominio y el recorrido de cada una.

a $y = \frac{4}{x}$ **b** $y = \frac{3}{x-3} + 1$ **c** $y = \frac{-4}{x+5} - 8$

d $y = \frac{1}{x-7} + 3$ **e** $y = \frac{6}{x+2} - 6$ **f** $y = \frac{5}{x} + 4$

g $y = \frac{1}{4x+12} - 2$ **h** $y = \frac{3}{2x}$ **i** $y = \frac{4}{3x-6} + 5$

Utilice su CPG con la ventana de visualización correcta.

3 Cuando cae un rayo, la luz alcanza los ojos casi instantáneamente. Pero el sonido del trueno viaja a aproximadamente $331\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Sin embargo, las ondas sonoras se ven afectadas por la temperatura del aire circundante. El tiempo que tarda el sonido en recorrer un kilómetro se modeliza mediante $t = \frac{1000}{0{,}6c + 331}$ donde t es el tiempo en segundos y c es la temperatura en grados Celsius.

a Dibuje aproximadamente el gráfico de t para las temperaturas desde $-20\,°C$ a $40\,°C$.

b Si estamos a un kilómetro de distancia y tardamos 3 segundos en oír el trueno, ¿cuál es la temperatura del aire circundante?

4 **a** En el mismo conjunto de ejes, dibuje aproximadamente $y = x + 2$ e $y = \frac{1}{x+2}$. Compare los dos gráficos y establezca relaciones entre la función lineal y su recíproca.

b Ahora haga lo mismo para $y = x + 1$ e $y = \frac{1}{x+1}$.

Funciones racionales de la forma $y = \dfrac{ax+b}{cx+b}$

➔ Toda función racional de la forma $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tiene un gráfico llamado hipérbola.

El gráfico de toda función racional $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tiene una asíntota horizontal y una vertical.

Investigación: gráficos de funciones racionales 2

a Utilice la CPG para mostrar los gráficos de:

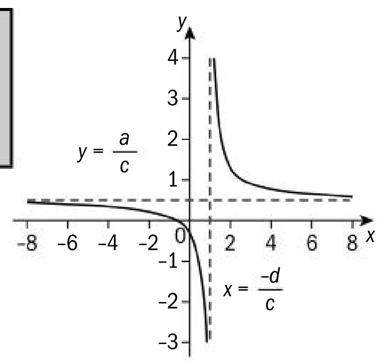
$y = \dfrac{x}{x+3}$, $y = \dfrac{x+1}{x+3}$, $y = \dfrac{2x}{x+3}$ e $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$

b Copie y complete la tabla:

Función racional	Asíntota vertical	Asíntota horizontal	Dominio	Recorrido
$y = \dfrac{x}{x+3}$				
$y = \dfrac{x+1}{x+3}$				
$y = \dfrac{2x}{x+3}$				
$y = \dfrac{2x-1}{x+3}$				

c ¿Qué observa acerca de las asíntotas horizontales?
d ¿Qué observa acerca del dominio y el valor de la asíntota vertical?

➔ La asíntota vertical ocurre para el valor de x que hace cero al denominador.
➔ La asíntota horizontal es la recta $y = \dfrac{a}{c}$.



Para hallar la asíntota horizontal se deberá despejar x.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$y(cx+d) = ax+b$$

$$cyx - ax = b - dy$$

$$x = \frac{b-dy}{cy-a}$$

La asíntota horizontal se produce cuando el denominador es cero, es decir, cuando:

$$cy = a \text{ o } y = \frac{a}{c}$$

Ejemplo 5

Para la función $y = \dfrac{x+1}{2x-4}$:

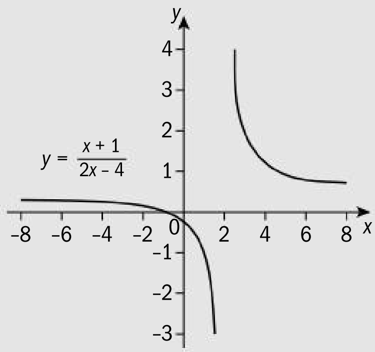
a Dibuje aproximadamente el gráfico.

b Halle la asíntota horizontal y la vertical.

c Indique el dominio y el recorrido.

Respuestas

a



b Asíntota vertical $x = 2$

Asíntota horizontal $y = \dfrac{1}{2}$

c Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq \dfrac{1}{2}$

Cuando $2x - 4 = 0$, $x = 2$.

$a = 1$, $c = 2$, $y = \dfrac{a}{c}$

Ejercitación 5D

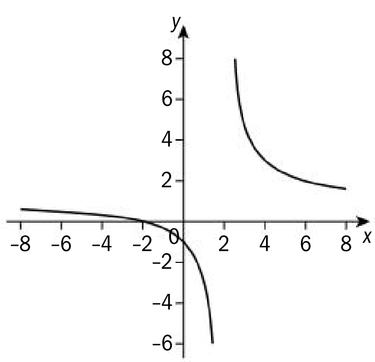
1 Identifique la asíntota horizontal y la vertical de las siguientes funciones e indique el dominio y el recorrido de cada una.

a $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ **b** $y = \dfrac{2x+2}{3x-1}$ **c** $y = \dfrac{-3x+2}{-4x-5}$ **d** $y = \dfrac{34x-2}{16x+4}$

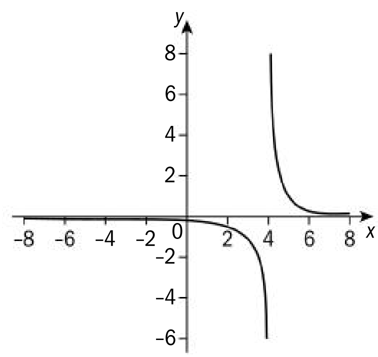
2 Una cada función con su gráfico:

a $y = \dfrac{5}{x}$ **b** $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ **c** $y = \dfrac{x-1}{x-3}$ **d** $y = \dfrac{1}{x-4}$

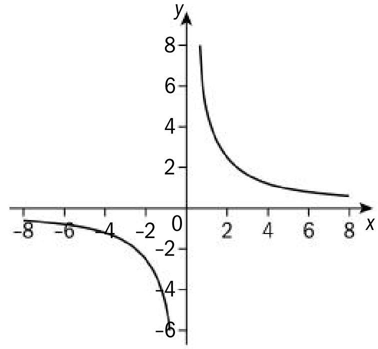
i



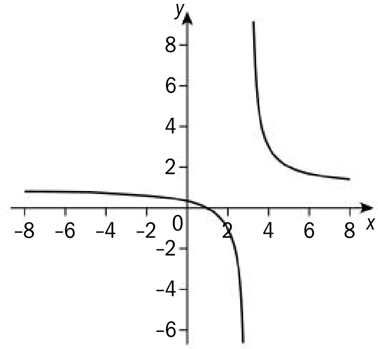
ii



iii



iv



3 Dibuje aproximadamente cada función con la ayuda de la CPG e indique el dominio y el recorrido.

a $y=\dfrac{x+2}{x+3}$ **b** $y=\dfrac{x}{4x+3}$ **c** $y=\dfrac{x-7}{3x-8}$

d $y=\dfrac{9x+1}{3x-2}$ **e** $y=\dfrac{-3x+10}{4x-12}$ **f** $y=\dfrac{5x+2}{4x}$

g $y=\dfrac{3x}{2x-4}$ **h** $y=\dfrac{7x}{-x-15}$ **i** $y=\dfrac{14x-4}{2x-1}$

Utilice la CPG para obtener el gráfico de la función y verificar la respuesta.

4 Escriba una función racional que tenga una asíntota vertical en $x = -4$ y una asíntota horizontal en $y = 3$.

5 Cristian y Leandro diseñan camisetas para surfistas y tienen un negocio en su garaje. Costará \$450 instalar el equipo y estiman que estampar cada camiseta costará \$5,50.

a Escriba una función lineal $C(x)$ para el costo total de producir x camisetas. Recuerde que debe considerar el costo de instalación.

b Escriba una función racional $A(x)$ que permita calcular el **costo promedio** de una camiseta, cuando se producen x camisetas.

c ¿Cuál es el dominio de $A(x)$ en el contexto del problema? Explique.

d Escriba la asíntota vertical de $A(x)$.

e Halle la asíntota horizontal para $A(X)$. ¿Qué significado tiene este valor en el contexto del problema?

Dibuje aproximadamente el gráfico de la función.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 La regla de Young es una manera de calcular la dosis de un medicamento para los niños mayores de dos años, basada en la dosis para adultos.

"Tomar la edad del niño en años y dividirla por su edad más 12. Multiplicar este número por la dosis para adultos".

Esto se modeliza mediante la función $n=\dfrac{at}{t+12}$ donde n es la dosis para niños, a es la dosis para adultos en mg y t es la edad del niño en años.

a Haga una tabla de valores de 2 a 12 años con una dosis de 100 mg para adultos.

b Utilice los valores de **a** para dibujar el gráfico de la función.

c Utilice el gráfico para calcular la dosis estimada para un niño de $7\frac{1}{2}$ años.

d Escriba la ecuación de la asíntota horizontal.

e ¿Qué significa el valor de la asíntota horizontal en la regla de Young?

7 El costo promedio anual de la electricidad que consume un refrigerador es de \$92.

a Un refrigerador nuevo cuesta \$550. Determine el costo anual total de un refrigerador que dura 15 años. Puede suponer que el costo incluye el costo del artefacto y de electricidad.

b Desarrolle una función que muestre el costo anual de un refrigerador en función del número de años desde que se lo compró.

c Dibuje aproximadamente la función. ¿Cuál será una ventana adecuada? Rotule los ejes para indicar la escala.

d Puesto que esta es una función racional, determine sus asíntotas.

e Explique el significado de la asíntota horizontal en el contexto del refrigerador.

f Una empresa ofrece un refrigerador que cuesta \$1200, pero afirma que va a durar por lo menos 20 años. ¿Vale este refrigerador la diferencia de precio?

Ejercicio de revisión

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 5: Fracciones continuas y asíntotas*

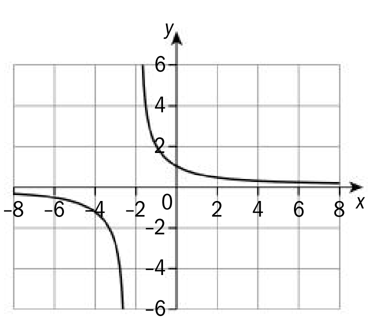
PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Una cada función con su gráfico.

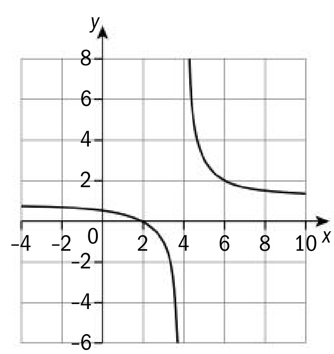
i $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ **ii** $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ **iii** $f(x) = \dfrac{4x+1}{x}$

iv $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ **v** $f(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$ **vi** $f(x) = \dfrac{x+2}{x+4}$

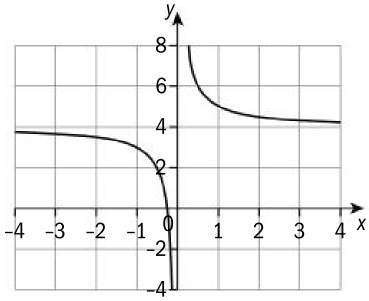
a



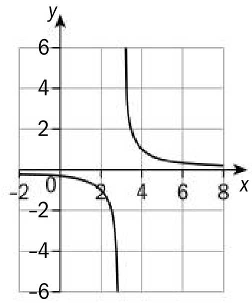
b



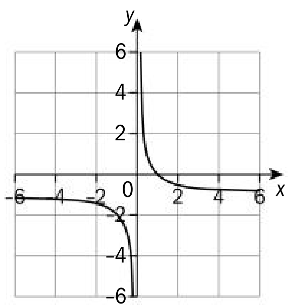
c



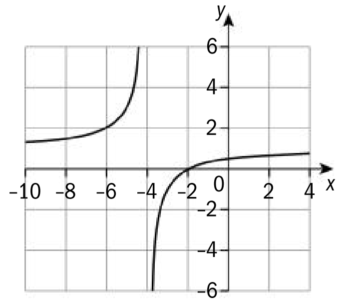
d



e



f



2 Dadas **a** $f(x)=\dfrac{5}{x}$ **b** $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ **c** $f(x)=\dfrac{x+3}{3-x}$

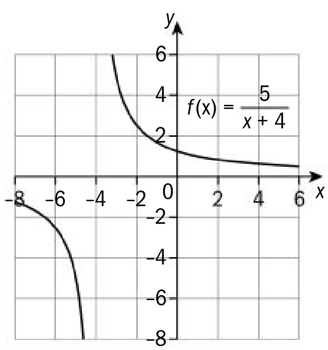
i Dibuje aproximadamente la función.

ii Determine la asíntota vertical y la horizontal de la función.

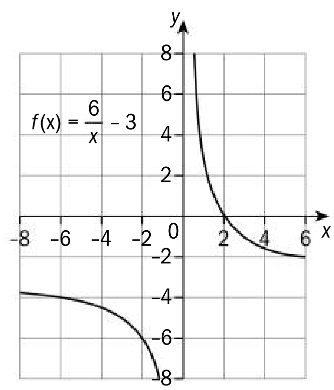
iii Halle el dominio y el recorrido de la función.

3 Para cada una de estas funciones, escriba las asíntotas, el dominio y el recorrido.

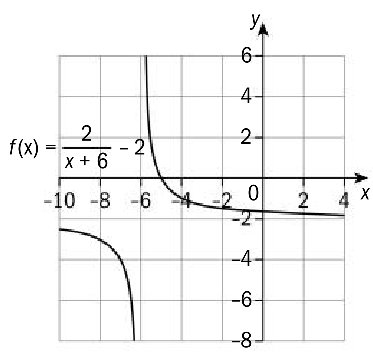
a



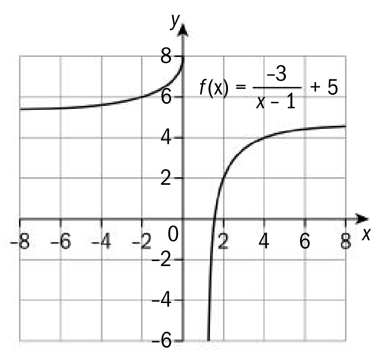
b



c



d



4 Un grupo de estudiantes quiere regalarle a su profesor un vale por un fin de semana en un spa de salud. El vale cuesta \$300.

a Si c representa el costo para cada estudiante y e representa el número de estudiantes, escriba una ecuación para mostrar el costo en función del número de estudiantes.

b Dibuje el gráfico de la función.

c Explique cualquier restricción sobre el recorrido y el dominio de esta función.

5 La función f está dada por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq -2$$

a **i** Halle la asíntota horizontal del gráfico de $y = f(x)$.

ii Halle la asíntota vertical del gráfico.

iii Escriba las coordenadas del punto P donde se cortan las asíntotas.

b Halle los puntos de intersección del gráfico con los ejes cartesianos.

c A partir de lo anterior, dibuje el gráfico de $y = f(x)$, mostrando las asíntotas mediante líneas punteadas.

Ejercicio de revisión

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Dibuje aproximadamente el gráfico de cada función con la ayuda de la CPG. Indique el dominio y el recorrido.

a $f(x) = \frac{6}{x} - 5$ **b** $f(x) = \frac{2}{x} + 3$ **c** $f(x) = \frac{-2}{x-5}$

d $f(x) = \frac{3}{x-7} - 8$ **e** $f(x) = \frac{8}{x+3}$ **f** $f(x) = \frac{-6}{x+4} - 2$

2 Una aerolínea vuela desde Londres a Nueva York, que están a una distancia de 5600 km.

a Muestre que esta información puede escribirse como $v = \frac{5600}{t}$ donde v es la velocidad media del avión en km h^{-1} y t es el tiempo en horas.

b Dibuje aproximadamente el gráfico de la función para $0 \leq v \leq 1200$ y $0 \leq t \leq 20$.

c Si el vuelo dura 10 horas, ¿cuál es la velocidad promedio del avión?

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Las personas con piel sensible deben ser cuidadosos con la cantidad de tiempo que se exponen a la luz solar directa. La relación

$$m = \frac{22,2s + 1428}{s}$$

donde m es el tiempo en minutos y s es el valor de escala del sol, nos da la máxima cantidad de tiempo que puede pasar una persona con piel sensible al sol sin dañarse la piel.

a Dibuje un gráfico aproximado para esta relación cuando $0 \le s \le 120$ y $0 \le m \le 300$.

b Halle la cantidad de minutos que puede estar expuesta la piel, cuando:

i $s = 10$ **ii** $s = 40$ **iii** $s = 100$

c ¿Cuál es la asíntota horizontal?

d Explicar qué representa esto para una persona con piel sensible.

4 El alcalde de la ciudad suministró mascarillas durante un brote de gripe en Bangkok. El costo (c) en bahts tailandeses de suministrar las máscaras a m por ciento de la población está dado por

$$c = \frac{750\,000m}{100 - m}$$

a Elija una escala adecuada y utilice su CPG para dibujar aproximadamente la función.

b Halle el costo de suministrar mascarillas a:

i el 20% **ii** el 50% **iii** el 90%

de la población.

c ¿Sería posible suministrar mascarillas a la totalidad de la población, según este modelo? Explique su respuesta.

5 La función $f(x)$ se define como:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2x - 5},\ x \neq \frac{5}{2}$$

a Dibuje aproximadamente la curva de f para $-3 \le x \le 5$, mostrando sus asíntotas.

b Utilizando su gráfico, escriba:

i La ecuación de cada asíntota

ii El valor de la intersección con el eje x

iii El valor de la intersección con el eje y

RESUMEN DEL CAPÍTULO 5

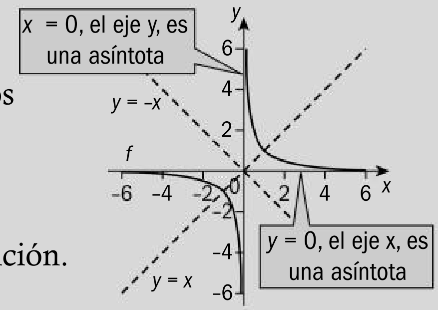
Recíprocos

- El **recíproco** de un número es 1 dividido por ese número.
- Un número multiplicado por su recíproco es igual a 1.

  Por ejemplo: $3 \times \frac{1}{3} = 1$
- El **recíproco** de x es $\frac{1}{x}$ o x^{-1} y $x^{-1} \times x = 1$.

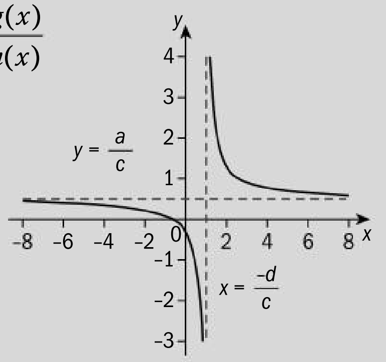
La función recíproca

- Si una curva se acerca más y más a una recta, pero nunca la corta, esa recta se denomina **asíntota**.
- El gráfico de una función recíproca de la forma $y = \frac{k}{x}$ tiene a $x = 0$ como asíntota vertical y a $y = 0$ como asíntota horizontal.
- El gráfico de una función recíproca es una **hipérbola.**
  - El eje x es la asíntota horizontal.
  - El eje y es la asíntota vertical.
  - Tanto el dominio como el recorrido son todos los números reales menos el cero.
  - Las dos ramas del gráfico son simétricas respecto de $y = -x$.
  - $y = x$ e $y = -x$ son los ejes de simetría de esta función.
- La función recíproca **coincide con su inversa**.



Funciones racionales

- Una **función racional** es una función de la forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ donde g y h son polinomios.
- Toda función racional de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tiene un gráfico llamado hipérbola.
- La asíntota vertical se produce en el valor de x que hace que el denominador sea cero.
- La asíntota horizontal es la recta $y = \frac{a}{c}$.



Sistemas de numeración

Fracciones egipcias

Los antiguos egipcios solo utilizaban fracciones con numerador 1, por ejemplo $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.
Esto significa que en lugar de $\frac{3}{4}$ ellos escribían $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Todas sus fracciones se expresaban en la forma $\frac{1}{n}$ y se las llama **fracciones unitarias**.
Se representaban números tales como $\frac{2}{7}$ como sumas de fracciones unitarias (por ejemplo, $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$).
Además, la misma fracción no podía utilizarse dos veces (así, $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ no era válido).
Por ejemplo, $\frac{5}{8}$ sería $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

- Escriba como fracciones unitarias:
  $\frac{5}{6}$ $\quad \frac{5}{8}$ $\quad \frac{2}{5}$ $\quad \frac{6}{7}$

En álgebra: $\frac{3}{4x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x}$

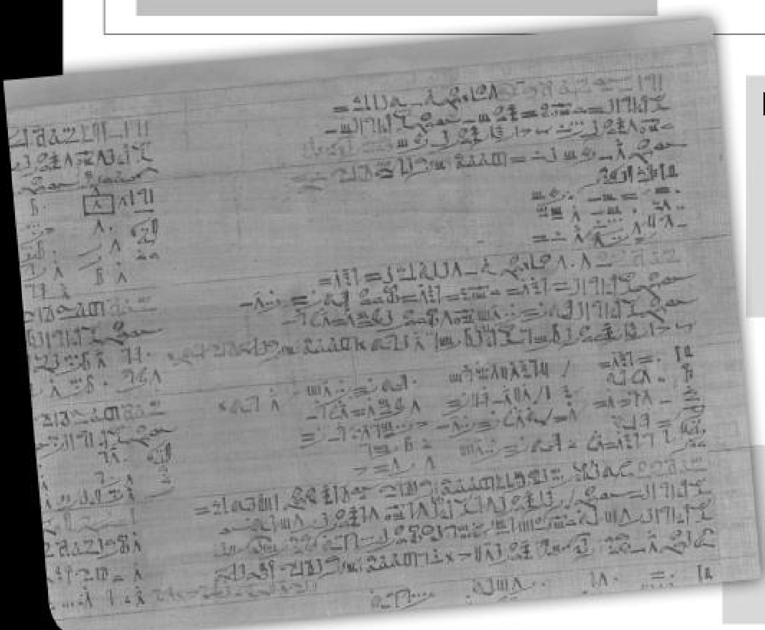
- Escriba cada expresión algebraica como una fracción egipcia.
  $\frac{4}{3x}$ $\quad \frac{5}{4x}$ $\quad \frac{7}{4x}$ $\quad \frac{23}{24x}$

¿Dónde cree que esto podría ser útil?

¿Cuáles son las limitaciones de estas fracciones?

¿Es posible escribir cualquier fracción como una fracción egipcia? ¿Cómo lo sabe?

▶ En un quipu inca, los nudos en las cuerdas representan números.



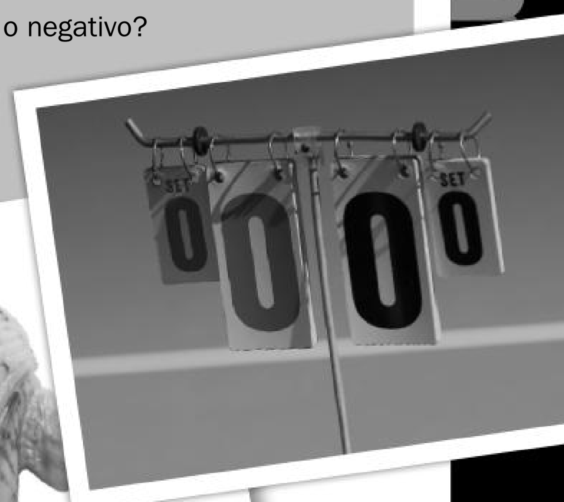
◀ El papiro matemático Rhind de 1650 a.C. contiene una tabla de fracciones egipcias copiada de otro papiro 200 años más antiguo.

¿Hay alguna diferencia entre cero y nada?

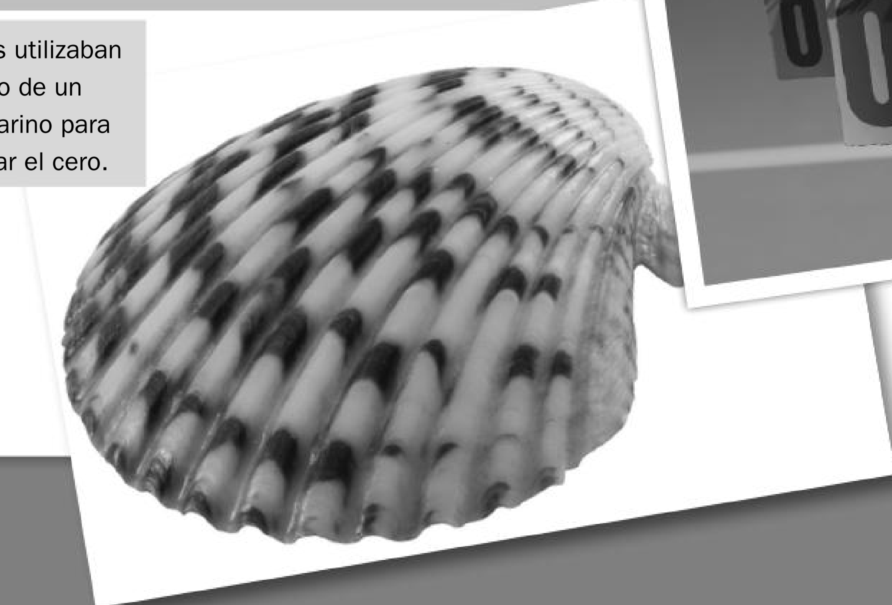
Las culturas babilónica e hindú ya contaban hace más de 2000 años con sistemas para representar la ausencia de un número. En el siglo IX d.C., el matemático y filósofo islámico Muhammad al-Khwarizmi comentó que, si en un cálculo, ningún número aparece en el lugar de las decenas, debía utilizarse un pequeño círculo "para preservar las filas". Los árabes llamaron a este círculo *sifr* (vacío). El nombre *sifr* se convirtió, con el tiempo, en nuestra palabra *cero*.

- ¿Esto significa que cero era nada?

- ¿Quién utilizó el cero por primera vez?
- ¿Qué se usaba antes de eso?
- Haga una lista de todos los subconjuntos de {0, 1, 2, 3}.
- Observe que un subconjunto es {0} y otro es { }. ¿Significa esto que cero y nada son diferentes?
- Ahora intente esto. Resuelva la ecuación $9 + x = 3^2$ y la ecuación $3x = 0$.
- En la numeración de los años, tenemos el año 1 a.C. y el año 1 d.C. ¿Y el año cero?
- Los antiguos griegos no estaban seguros de qué hacer con el cero y se preguntaban cómo podía ser que nada fuese algo. Las paradojas de Zenón (un buen tema para investigar) dependen en parte del uso tentativo del cero.
- ¿Cómo entendían el cero las culturas maya e inca?
- ¿Dónde está el cero en el sistema decimal? ¿Es positivo o negativo?
- ¿Qué sucede si dividimos cero por cualquier cosa?
- ¿Qué sucede si dividimos cualquier cosa por cero?
- ¿Qué sucede si dividimos cero por cero?



▶ Los mayas utilizaban un símbolo de un caracol marino para representar el cero.



6 Patrones, progresiones y series

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

1.1 Progresiones aritméticas y series; suma finita de series aritméticas; progresiones geométricas y series geométricas; suma finita e infinita de series geométricas; la notación de sumatoria.
Aplicaciones

1.3 El teorema del binomio: desarrollo de $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$; cálculo de los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio usando el triángulo de Pascal y $\binom{n}{r}$.

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas y despejar variables

Por ejemplo: Resolver la ecuación

$$n(n-4) = 12$$
$$n^2 - 4n = 12$$
$$n^2 - 4n - 12 = 0$$
$$(n-6)(n+2) = 0$$
$$n = -2,\ n = 6$$

Por ejemplo: Despejar b en esta fórmula

$$ac = b - 3$$
$$b = ac + 3$$

2 Reemplazar valores conocidos en fórmulas

Por ejemplo: Usando la fórmula $A = 3p^4 - 10q$, hallar el valor de A si $p = 2$ y $q = 1{,}5$

$$A = 3p^4 - 10q$$
$$A = 3(2)^4 - 10(1{,}5)$$
$$A = 3(16) - 15$$
$$A = 48 - 15$$
$$A = 33$$

Comprobemos nuestras habilidades

1 Resuelva cada ecuación:

a $3x - 5 = 5x + 7$

b $p(2 - p) = -15$

c $2^n + 9 = 41$

2 Despeje k:

a $6m + 8k = 30$

b $2pk - 5 = 3$

3 Si $T = 2x(x + 3y)$, halle el valor de T cuando:

a $x = 3$ e $y = 5$

b $x = 4{,}7$ e $y = -2$

4 Usando la fórmula $m = 2^x - y^3$, halle el valor de m si:

a $x = 5$ e $y = 3$

b $x = 3$ e $y = -2$

c $x = -5$ e $y = \frac{1}{2}$

▲ Crecimiento de bacterias en una cápsula de Petri

Las bacterias en esta cápsula de Petri crecen y se reproducen; en este caso, su masa total se duplica cada dos horas. A las 8 de la mañana la masa mide 3 gramos; por lo tanto, a las 10 medirá 6 gramos, a las 12 medirá 12 gramos y así sucesivamente.

La masa de las bacterias en la cápsula sigue un patrón que podría usarse para predecir la masa de las bacterias en la cápsula después de 8 horas, 12 horas o 24 horas.
En este capítulo estudiaremos los patrones. Los patrones nos pueden resultar útiles para hacer predicciones para el futuro inmediato y mediato. Por ejemplo, podemos usar patrones para:

- Predecir la población de un país en 20 años
- Calcular cuánto tiempo tomará cancelar un préstamo bancario
- Predecir cuánto tiempo durarán las reservas de un recurso natural
- Calcular la distancia total que recorrerá una pelota que rebota
- Calcular cuánto tiempo tomará para que una inversión se duplique

6.1 Patrones y progresiones

Investigación: ahorro de dinero

Joel decide comenzar a ahorrar dinero.
Ahorra \$20 la primera semana, \$25 la segunda semana, \$30 la tercera semana y así sucesivamente.

a Copie y complete la siguiente tabla para mostrar cuánto ahorra Joel por semana y cuánto ahorra en total durante las ocho primeras semanas.

Número de semana	Ahorro semanal	Total ahorrado
1	20	20
2	25	45
3	30	75
4		
5		
6		
7		
8		

b ¿Cuánto ahorrará Joel en la 10.ª semana? ¿Y en la 17.ª?
c ¿Cuánto dinero ahorrará Joel al cabo de un año?
d ¿Cuánto tiempo le tomará ahorrar al menos \$1000?
e Intente escribir una fórmula para el monto de dinero que Joel ahorra **cada** semana. Sea M el monto que ahorra cada semana y n el número de semana.
f Trate de escribir una fórmula para el **monto total** de dinero que ahorró Joel. Sea T el total de sus ahorros y n el número de semanas.

En la investigación anterior, los montos de dinero que Joel ahorra cada semana forman una **progresión**. Los montos totales de dinero que ahorra a medida que el tiempo pasa forman otra progresión diferente.

> ➔ Una **progresión numérica** es un patrón de números dispuestos en un orden particular de acuerdo con una regla.

He aquí algunas progresiones:

8, 11, 14, 17, …
800, 400, 200, 100, …
1, 4, 9, 16, 25, …
5, 10, 15, 20, 25, …

➔ Cada número o elemento de una progresión se denomina **término**.

En la progresión 8, 11, 14, 17, …, el primer término es 8, el segundo término es 11, el tercer término es 14, y así sucesivamente.

También podemos usar la notación u_n para denotar el enésimo término de una progresión, donde n es un entero positivo.

Por lo tanto, para 8, 11, 14, 17, … se podría decir:
$u_1 = 8$, $u_2 = 11$, $u_3 = 14$, y así sucesivamente.

Algunas veces, usamos letras distintas de u para representar a los términos de una progresión. Por ejemplo, podríamos usar a_n, t_n o x_n para representar el enésimo término de una progresión.

Se puede continuar el patrón si nos damos cuenta de que el valor de cada término es tres unidades mayor que el valor del término anterior:

8, 11, 14, 17, <u>20</u>, <u>23</u>, <u>26</u>

Para esta progresión, se podría escribir: $u_1 = 8$ y $u_{n+1} = u_n + 3$

Esta es una fórmula **recursiva**: el valor de cada término depende del valor del término anterior.

En la progresión 800, 400, 200, 100, …, el valor de cada término es la mitad del término anterior.

En este caso, $u_1 = 800$ y $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$.

Ejemplo 1

Escriba una fórmula recursiva para el enésimo término de cada progresión.

a 9, 15, 21, 27, …

b 2, 6, 18, 54, …

Respuestas	
a $u_1 = 9$ y $u_{n+1} = u_n + 6$	*Sumar 6 para llegar de un término al siguiente*
b $u_1 = 2$ y $u_{n+1} = 3u_n$	*Multiplicar por 3 para llegar de un término al siguiente*

Muchas veces resulta más útil escribir la **fórmula general del enésimo término de una progresión**. Con una fórmula general, podemos hallar el valor de un término sin necesidad de conocer el valor del anterior.

A veces esto se denomina la “regla general para el enésimo término”.

En la progresión 1, 4, 9, 16, 25, …, cada término es un cuadrado perfecto. El primer término es 1^2, el segundo 2^2, y así sucesivamente. Una fórmula general para el enésimo término de esta progresión es $u_n = n^2$.

En la progresión 5, 10, 15, 20, 25, …, cada término es un múltiplo de 5. El primer término es 5×1, el segundo 5×2, y así sucesivamente. Una fórmula general para el enésimo término de esta progresión es $u_n = 5n$.

Recordemos que n, la posición del término, será siempre un número entero. No podríamos tener un término ‘$\frac{3}{4}$-ésimo’ o un término ‘7,5-ésimo’.

Ejemplo 2

Escriba una fórmula general para el enésimo término de cada progresión.

a 4, 8, 12, 16, …

b $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \ldots$

Respuestas

a $u_n = 4n$	*Cada término es un múltiplo de 4.*
b $u_n = \frac{1}{3n}$	*Los denominadores son múltiplos de 3.*

Ejercitación 6A

1 Escriba los próximos tres términos de cada progresión.

a 3, 7, 11, 15, … **b** 1, 2, 4, 8, …

c 3, 4, 6, 9, 13, … **d** 5, –10, 20, –40, …

e $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \ldots$ **f** 6,0; 6,01; 6,012; 6,0123; …

2 Escriba los primeros cuatro términos en cada progresión.

a $u_1 = 10$ y $u_{n+1} = 3(u_n)$ **b** $u_1 = 3$ y $u_{n+1} = 2u_n + 1$

c $u_1 = \frac{3}{4}$ y $u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n)$ **d** $u_1 = x$ y $u_{n+1} = (u_n)^2$

3 Escriba una fórmula recursiva para cada progresión.

a 2, 4, 6, 8, … **b** 1, 3, 9, 27, …

c 64, 32, 16, 8, … **d** 7, 12, 17, 22, …

4 Escriba los cuatro primeros términos de cada progresión.

a $u_n = 3^n$ **b** $u_n = -6n + 3$

c $u_n = 2^{n-1}$ **d** $u_n = n^n$

Para hallar el primer término, reemplazamos $n = 1$; para hallar el segundo, usamos $n = 2$, y así sucesivamente.

5 Escriba una fórmula general para el enésimo término de cada progresión.

a 2, 4, 6, 8, … **b** 1, 3, 9, 27, …

c 64, 32, 16, 8, … **d** 7, 12, 17, 22, …

e $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **f** $x, 2x, 3x, 4x, \ldots$

6 La progresión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … se conoce como la progresión de Fibonacci.

a Escriba el 15.° término de la progresión de Fibonacci.

b Escriba una fórmula recursiva para la progresión de Fibonacci.

▲ Fibonacci, también conocido como Leonardo de Pisa (italiano, *c.* 1170–*c.* 1250).

6.2 Progresiónes aritméticas

En la progresión 8, 11, 14, 17, …, el valor de cada término es tres unidades mayor que el anterior. Esta progresión es un ejemplo de **progresión aritmética** o sucesión aritmética.

➔ En una progresión aritmética, los términos crecen o decrecen en un valor constante. Este valor se denomina **diferencia** o ***d***. La diferencia puede ser un valor positivo o negativo.

En el Papiro de Ahmes, que data aproximadamente del año 1650 a. C., aparecen ejemplos de progresiones aritméticas.

Por ejemplo:

8, 11, 14, 17, …	En esta progresión, $u_1 = 8$ y $d = 3$.
35, 30, 25, 20, …	En esta progresión, $u_1 = 35$ y $d = -5$.
4; 4,1; 4,2; 4,3; …	En esta progresión, $u_1 = 4$ y $d = 0{,}1$.
c, $2c$, $3c$, $4c$, …	En esta progresión, $u_1 = c$ y $d = c$.

Para cualquier progresión aritmética, $u_{n+1} = u_n + d$.
Podemos hallar cualquier término de la progresión sumando la diferencia, d, al término anterior.
En una progresión aritmética:

u_1 = primer término
$u_2 = u_1 + d$
$u_3 = u_2 + d = (u_1 + d) + d = u_1 + 2d$
$u_4 = u_3 + d = (u_1 + 2d) + d = u_1 + 3d$
$u_5 = u_4 + d = (u_1 + 3d) + d = u_1 + 4d$
…
…
$u_n = u_1 + (n - 1)d$

➔ Podemos hallar el enésimo término de una progresión aritmética usando la fórmula: $u_n = u_1 + (n - 1)\,d$.

Ejemplo 3

a Halle el 12.º término de la progresión aritmética 13, 19, 25, …
b Halle una expresión para el enésimo término.

Respuestas

a $u_1 = 13$ y $d = 6$	*Determinar estos valores observando la progresión*
$u_{12} = 13 + (12 - 1)6$ $= 13 + 66$ $u_{12} = 79$	*Para el 12.º término, reemplazar* $n = 12$ *en la fórmula* $u_n = u_1 + (n-1)\,d$
b $u_n = 13 + (n - 1)6$ $= 13 + 6n - 6$ $u_n = 6n + 7$	*Para el enésimo término, reemplazar los valores de* u_1 *y* d *en la fórmula* $u_n = u_1 + (n-1)\,d$

Ejemplo 4

Halle el número de términos de la progresión 84, 81, 78, …, 12.	
Respuesta $u_1 = 84$ y $d = -3$ $u_n = 84 + (n-1)(-3) = 12$ $84 - 3n + 3 = 87 - 3n = 12$ $3n = 75$ $n = 25$ Hay 25 términos en la progresión.	*Determinar estos valores observando la progresión* *Reemplazar los valores de u_1 y d en la fórmula $u_n = u_1 + (n-1)d$* *Resolver en n*

Si una progresión continúa indefinidamente y no hay último término, es una progresión infinita. Si la progresión termina o tiene último término, es una progresión finita.

Ejercitación 6B

1 Para cada progresión:

i Halle el 15.º término.

ii Halle una expresión para el enésimo término.

a 3, 6, 9, … **b** 25, 40, 55, …

c 36, 41, 46, … **d** 100, 87, 74, …

e 5,6; 6,2; 6,8; … **f** $x, x + a, x + 2a, \dots$

2 Halle el número de términos en cada progresión:

a 5, 10, 15, …, 255 **b** 4,8; 5,0; 5,2; …; 38,4

c $\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{5}{4}, \dots, 14$ **d** 250, 221, 192, …, –156

e $2m, 5m, 8m, \dots, 80m$ **f** $x, 3x + 3, 5x + 6, \dots, 19x + 27$

Ejemplo 5

En una progresión aritmética, $u_9 = 48$ y $u_{12} = 75$. Halle el primer término y la diferencia.	
Respuesta $u_9 + 3d = u_{12}$ $48 + 3d = 75$ $3d = 27$ $d = 9$ $u_9 = u_1 + (9-1)9 = 48$ $u_1 + 72 = 48$ $u_1 = -24$ El primer término es –24 y la diferencia es 9.	*Para llegar del 9.° término al 12.°, habría que sumar la diferencia tres veces.* *Para hallar el primer término, usar la fórmula*

Ejercitación 6C

1 Una progresión aritmética tiene primer término 19 y 15.° término 31,6. Halle la diferencia.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 En una progresión aritmética, $u_{10} = 37$ y $u_{21} = 4$. Halle la diferencia y el primer término.

3 Halle el valor de x en la progresión aritmética 3, x, 8, …

4 Halle el valor de m en la progresión aritmética m, 13, $3m - 6$, …

6.3 Progresiones geométricas

En la progresión 2, 6, 18, 54, ..., cada término se obtiene triplicando el anterior. Esta progresión es un ejemplo de **progresión geométrica**, o sucesión geométrica.

➔ En una **progresión geométrica**, cada término se obtiene multiplicando al anterior por un valor constante. Este valor se denomina **razón** o ***r***.

La razón, r, puede ser positiva o negativa.
Por ejemplo:

1, 5, 25, 125, …	$u_1 = 1$ y $r = 5$
3, –6, 12, –24, …	$u_1 = 3$ y $r = -2$
81, 27, 9, 3, …	$u_1 = 81$ y $r = \frac{1}{3}$
$k, k^2, k^3, k^4, \ldots$	$u_1 = k$ y $r = k$

Para cualquier progresión geométrica, $u_{n+1} = (u_n)r$. Podemos calcular cualquier término de la progresión multiplicando al anterior por la razón, r.
Para cualquier progresión geométrica:

u_1 = primer término
$u_2 = u_1 \times r$
$u_3 = u_2 \times r = (u_1 \times r) \times r = u_1 \times r^2$
$u_4 = u_3 \times r = (u_1 \times r^2) \times r = u_1 \times r^3$
$u_5 = u_4 \times r = (u_1 \times r^3) \times r = u_1 \times r^4$
…
…
$u_n = u_1 \times r^{n-1}$

➔ Podemos hallar el enésimo término de una progresión geométrica usando la fórmula $u_n = u_1(r^{n-1})$.

Ejemplo 6

Halle el 9.° término de la progresión 1, 4, 16, 64, …	
Respuesta	
$u_1 = 1$ y $r = 4$	*Determinar estos valores observando la progresión*
$u_9 = 1(4^{9-1}) = 1(4^8)$ $= 1(65\,536)$ $u_9 = 65\,536$	*Para el 9.° término, reemplazar $n = 9$ en la fórmula $u_n = u_1(r^{n-1})$*

Ejemplo 7

Halle el 12.° término de la progresión 7, –14, 28, –56, …	
Respuesta	
$u_1 = 7$ y $r = -2$	*Determinar estos valores observando la progresión*
$u_{12} = 7((-2)^{12-1}) = 7((-2)^{11})$ $= 7(-2048)$ $u_{12} = -14\,336$	*Para el 12.° término, reemplazar $n = 12$ en la fórmula $u_n = u_1(r^{n-1})$*

Ejercitación 6D

1 Para cada progresión, halle la razón y el 7.° término.

a 16, 8, 4, … **b** −4, 12, −36, …
c 1, 10, 100, … **d** 25, 10, 4, …
e $2, 6x, 18x^2, \ldots$ **f** $a^7b, a^6b^2, a^5b^3, \ldots$

Ejemplo 8

En una progresión geométrica, $u_1 = 864$ y $u_4 = 256$. Halle la razón.	
Respuesta	
$u_4 = u_1(r^{4-1}) = u_1(r^3)$ $256 = 864(r^3)$	*Reemplazar $n = 4$, $u_1 = 864$, y $u_4 = 256$ en la fórmula $u_n = u_1(r^{n-1})$*
$r^3 = \frac{256}{864} = \frac{8}{27}$ $r = \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ $r = \frac{2}{3}$	*Resolver en r*

Ejemplo 9

Para la progresión geométrica 5, 15, 45, … halle el menor valor de n tal que el enésimo término resulte mayor que 50 000.

Respuesta

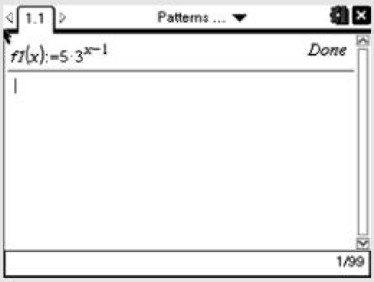
$u_1 = 5$ y $r = 3$

$u_n = 5 \times 3^{n-1}$

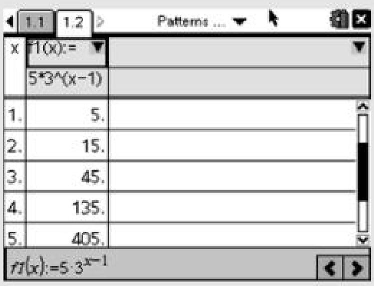
Determinar u_1 y r observando la progresión

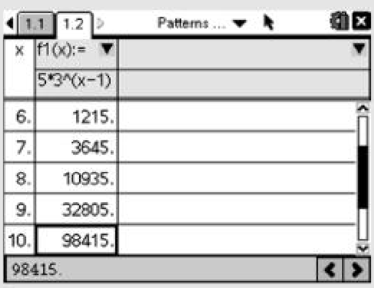
Reemplazar $u_1 = 5$ y $r = 3$ en la fórmula $u_n = u_1(r^{n-1})$

Se puede usar la calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG) para hallar el valor de n. Primero ingresar la fórmula para u_n en una función. Sea x la variable que representa n, tal como se muestra.



Observar la tabla para ver los valores de los primeros n términos





El 9.° término es 32 805, y el 10.° término es 98 415.

$n = 10$, dado que $u_{10} > 50\,000$ y $u_9 < 50\,000$

Ejercitación 6E

1 Una progresión geométrica tiene 2.° término 50 y 5.° término 3,2. Halle el primer término y la razón.

2 Una progresión geométrica tiene 3.^{er} término –18 y 6.° término 144. Halle el primer término y la razón.

3 Para cada progresión geométrica, halle el menor valor de n tal que el enésimo término sea mayor que 1000.

a 16, 24, 36, … **b** 1; 2,4; 5,76; ...

c 112, –168, 252, ... **d** 50; 55; 60,5; ...

4 Una progresión geométrica tiene primer término 9 y tercer término 144. Muestre que hay dos valores posibles para la razón, y halle los dos valores posibles del segundo término.

5 Halle el valor de p en la progresión geométrica 18; p; 40,5.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 Halle el valor positivo de x en la progresión geométrica $7x - 2, 4x + 4, 3x, \ldots$

6.4 La notación de sumatoria (Σ) y las series

En esta sección vamos a ver las formas de sumar los términos de una progresión.

La suma de los términos de una progresión origina una **serie**.

$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n$ es una *progresión.*

$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$ es una *serie.*

La letra griega Σ, llamada sigma, se emplea usualmente para indicar una suma de valores.

→ $\sum_{i=1}^{n} u_i$ significa la suma de los primeros n términos de una progresión.
Se lee "la suma de todos los términos u_i desde $i = 1$ hasta $i = n$".

Cuando se representa una suma de valores de esta forma, estamos usando la **notación de sumatoria** o notación sigma.

La progresión aritmética 8, 14, 20, … tiene primer término 8 y diferencia 6. Una regla general para el enésimo término de esta progresión es $u_n = 6n + 2$.

La suma de los cinco primeros términos de esta progresión es $\sum_{n=1}^{5}(6n+2)$.

Esto significa "la suma de todos los términos $6n + 2$ desde $n = 1$ hasta $n = 5$".

Para calcular esta suma, tenemos que reemplazar todos los valores enteros desde $n = 1$ hasta $n = 5$ en la expresión $6n + 2$, y posteriormente sumarlos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}(6n+2) &= [6(1) + 2] + [6(2) + 2] + [6(3) + 2] + [6(4) + 2] \\ &\quad + [6(5) + 2] \\ &= 8 + 14 + 20 + 26 + 32 = 100\end{aligned}$$

Ejemplo 10

a Escriba la expresión $\sum_{x=1}^{4}(x^2-3)$ como una suma de términos.

b Calcule la suma de estos términos.

Respuestas

a $\sum_{x=1}^{4}(x^2-3)$

$= (1^2 - 3) + (2^2 - 3)$
$\quad + (3^2 - 3) + (4^2 - 3)$
$= -2 + 1 + 6 + 13$

Reemplazar los enteros positivos comenzando con x = 1 y terminando con x = 4

b $-2 + 1 + 6 + 13 = 18$

Ejemplo 11

Evalúe la expresión $\sum_{a=3}^{8}\left(2^{a}\right)$.	
Respuesta $\sum_{a=3}^{8}(2^{a}) = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$ $= 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256$ $= 504$	*Reemplazar los enteros consecutivos comenzando con a = 3 y terminando con a = 8*

"Evaluar" significa hallar un valor, por lo tanto la respuesta final será un número.

Ejemplo 12

Escriba la serie 3 + 15 + 75 + 375 + 1875 + 9375 usando notación de sumatoria.	
Respuesta $u_n = 3(5^{n-1})$	*Los términos son los de una progresión geométrica con primer término 3 y razón 5.*
$\sum_{n=1}^{6}\left(3\left(5^{n-1}\right)\right)$	*Esta serie es la suma de los primeros seis términos de la progresión geométrica.*

Ejercitación 6F

1 Escriba una expresión para cada serie usando notación de sumatoria.

a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

b $9 + 16 + 25 + 36 + 49$

c $27 + 25 + 23 + 21 + 19 + 17$

d $240 + 120 + 60 + 30 + 15 + 7{,}5$

e $5x + 6x + 7x + 8x + 9x + 10x$

f $4 + 7 + 10 + 13 + \cdots + 55$

g $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 59\,049$

h $a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5$

2 Escriba cada serie como una suma de términos.

a $\sum_{n=1}^{8}(3n+1)$ **b** $\sum_{a=1}^{5}(4^{a})$ **c** $\sum_{r=3}^{7}(5(2^{r}))$ **d** $\sum_{n=5}^{11}(x^{n})$

3 Evalúe:

a $\sum_{n=1}^{9}(8n-5)$ **b** $\sum_{r=1}^{5}(3^{r})$ **c** $\sum_{m=1}^{7}(m^{2})$ **d** $\sum_{x=4}^{10}(7x-4)$

Recordemos que el término "evaluar" nos pide que hallemos un valor, por lo tanto, debemos dar respuestas numéricas.

6.5 Series aritméticas

La suma de los términos de una progresión se denomina serie.
La suma de los términos de una progresión aritmética se denomina **serie aritmética**. Por ejemplo, 5, 12, 19, 26, 33, 40 es una progresión aritmética, por lo tanto 5 + 12 + 19 + 26 + 33 + 40 es una serie aritmética. Cuando una serie tiene unos pocos términos, sumarlos no resulta complicado. Sin embargo, si la serie tiene 50 o 100 términos llevaría mucho tiempo sumarlos. Será útil encontrar una regla, o fórmula, para evaluar una serie aritmética.

Se dice comúnmente que Carl Friedrich Gauss (1777–1885) fue el más grande matemático del siglo XIX. Averigüemos qué procedimiento empleó Gauss para calcular la suma de los 100 primeros números enteros positivos.

S_n denota la suma de los primeros n términos de una serie. Para una serie con n términos

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_n$$

Recordemos que n debe ser un número entero positivo.

Para una serie aritmética esta fórmula sería:

$$S_n = u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) + (u_1 + 3d) + (u_1 + 4d) + \cdots + (u_1 + (n - 1)d)$$

Si invertimos el orden de los términos de la progresión, el valor de la suma sería el mismo y tendríamos:

$$S_n = u_n + (u_n - d) + (u_n - 2d) + (u_n - 3d) + (u_n - 4d) + \cdots + u_1$$

Comenzar con el último término u_n, luego el anteúltimo término es $u_n - d$ y así sucesivamente

Sumando miembro a miembro verticalmente estas dos expresiones para S_n,

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \cdots + (u_1 + u_n)$$

Esto es $(u_1 + u_n)$ sumado n veces, por lo tanto:

$$2S_n = n(u_1 + u_n)$$

Dividiendo ambos miembros por 2 nos da:

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

Reemplazando u_n por $u_1 + (n - 1)d$,

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$$

➔ Podemos hallar la suma de los primeros n términos de una serie aritmética usando la fórmula:

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \quad \text{o} \quad S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$$

Ejemplo 13

Calcule la suma de los 15 primeros términos de la serie 29 + 21 + 13 + …	
Respuesta $u_1 = 29$ y $d = -8$ $S_{15} = \frac{15}{2}\left(2(29) + (15-1)(-8)\right)$ $= 7{,}5(58 - 112)$ $= -405$	*Para la suma de los 15 términos reemplazar n = 15 en la fórmula* $S_n = \frac{n}{2}\left(2u_1 + (n-1)d\right)$

Ejemplo 14

a Halle el número de términos de la serie 14 + 15,5 + 17 + 18,5 + ⋯ + 50. **b** Halle la suma de los términos.	
Respuestas **a** $u_1 = 14$ y $d = 1{,}5$	*Hallar estos valores observando la progresión*
$u_n = 50$ $u_n = 14 + (n-1)(1{,}5) = 12{,}5 + 1{,}5n$ $12{,}5 + 1{,}5n = 50$ $1{,}5n = 37{,}5$ $n = 25$	*Para hallar n, reemplazar los valores conocidos en la fórmula* $u_n = u_1 + (n-1)d$ *Resolver en n*
b $S_{25} = \frac{25}{2}(14 + 50)$ $= 12{,}5(64)$ $= 800$	*Reemplazar el primer término, el último término y el valor de n en la fórmula* $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Ejercitación 6G

1 Halle la suma de los 12 primeros términos de la serie aritmética
3 + 6 + 9 + ⋯

2 Halle la suma de los 18 primeros términos de la serie aritmética
2,6 + 3 + 3,4 + ⋯

3 Halle la suma de los 27 primeros términos de la serie aritmética
100 + 94 + 88 + ⋯

4 Halle la suma de los 16 primeros términos de la serie
$(2 - 5x) + (3 - 4x) + (4 - 3x) + \cdots$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 Considere la serie $120 + 116 + 112 + \cdots + 28$.

a Halle el número de términos de la serie.

b Halle la suma de los términos.

6 Halle la suma de la serie $15 + 22 + 29 + \cdots + 176$.

Ejemplo 15

a Escriba una expresión para S_n, la suma de los primeros n términos de la serie $64 + 60 + 56 + \cdots$

b A partir de lo anterior, halle el valor de n para el cual $S_n = 0$.

Respuestas

a $u_1 = 64$ y $d = -4$	*Reemplazar los valores de u_1 y d en la fórmula*
$S_n = \frac{n}{2}(2(64)+(n-1)(-4))$	$S_n = \frac{n}{2}(2u_1+(n-1)d)$
$= \frac{n}{2}(128-4n+4)$	
$= \frac{n}{2}(132-4n)$	
$S_n = 66n-2n^2$	
b $66n - 2n^2 = 0$ $2n(33 - n) = 0$ $n = 0$ o $n = 33$	*Igualar S_n a 0 y resolver en n (Esta ecuación también se puede resolver con la CPG.) Cuando la resolvemos por factorización, la ecuación usualmente tiene dos soluciones.*
$n = 33$	*Dado que el número de términos debe ser un entero positivo, descartamos $n = 0$.*

La instrucción "a partir de lo anterior" en la pregunta indica que debemos usar nuestra respuesta anterior para resolver este apartado.

Ejercitación 6H

1 Una serie aritmética tiene $u_1 = 4$ y $S_{30} = 1425$.
Halle el valor de la diferencia.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 **a** Escriba una expresión para S_n, para la serie $1 + 7 + 13 + \cdots$

b A partir de lo anterior, determine el valor de n para el cual $S_n = 833$.

3 **a** Escriba una expresión para S_n, para una serie aritmética con $u_1 = -30$ y $d = 3{,}5$.

b A partir de lo anterior, halle el valor de n para el cual $S_n = 105$.

4 En enero de 2012, una nueva cafetería vende 500 bebidas. En febrero, venden 600, luego 700 en marzo, y así sucesivamente en progresión aritmética.

a ¿Cuántas bebidas esperan vender en diciembre de 2012?

b Calcule el total de bebidas que esperan vender en el año 2012.

5 En una progresión aritmética, el 2.º término es cuatro veces el 5.º término, y la suma de los 10 primeros términos es –20. Halle el primer término y la diferencia.

6 En una serie aritmética, la suma de los 12 primeros términos es igual a 10 veces la suma de los 3 primeros términos. Si el primer término es 5, halle la diferencia y el valor de S_{20}.

6.6 Series geométricas

Así como una serie aritmética es la suma de los términos de una progresión aritmética, una **serie geométrica** es la suma de los términos de una progresión geométrica.

Sumando los términos de una progresión geométrica obtenemos la siguiente igualdad:

$$S_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + u_1 r^3 + \cdots + u_1 r^{n-2} + u_1 r^{n-1}$$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por *r*.

$$rS_n = u_1 r + u_1 r^2 + u_1 r^3 + u_1 r^4 + \cdots + u_1 r^{n-1} + u_1 r^n$$

Restamos la primera igualdad de la segunda.

$$rS_n - S_n = -u_1 + u_1 r^n = u_1 r^n - u_1$$

Factorizamos ambos miembros de la igualdad.

$$S_n(r-1) = u_1(r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r-1}$$

➔ Podemos hallar la suma de los primeros *n* términos de una serie geométrica usando la fórmula:

$$S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r-1} \quad \text{o} \quad S_n = \frac{u_1(1 - r^n)}{1-r}, \text{ donde } r \neq 1$$

Cuando $r > 1$, puede resultar más conveniente usar la primera fórmula, evitando así trabajar con un denominador negativo.

Ejemplo 16

Calcule la suma de los 12 primeros términos de la serie $1 + 3 + 9 + \cdots$

Respuesta $u_1 = 1$ y $r = 3$ $S_{12} = \frac{1(3^{12} - 1)}{3-1}$ $= \frac{531\,440}{2}$ $= 265\,720$	*Reemplazar los valores de u_1, r y n en la fórmula* $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r-1}$

Ejemplo 17

a Halle el número de términos de la serie
$8192 + 6144 + 4608 + \cdots + 1458$.
b Calcule la suma de los términos.

Respuestas

a $u_1 = 8192$ y $r = \frac{6144}{8192} = \frac{3}{4}$ — *Hallar r dividiendo u_2 por u_1*

$1458 = 8192\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ — *Reemplazar los valores conocidos en la fórmula $u_n = u_1(r^{n-1})$*

$\frac{1458}{8192} = \frac{729}{4096} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{729}{4096} = \frac{3^6}{4^6} = \left(\frac{3}{4}\right)^6$ — *$3^6 = 729$ y $4^6 = 4096$*
También podemos resolver esta ecuación usando logaritmos. (Véase el ejemplo 19.)

$n - 1 = 6$
$n = 7$

b $S_7 = \dfrac{8192\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^7\right)}{1-\frac{3}{4}}$ — *Reemplazar los valores de u_1, r y n en la fórmula $S_n = \dfrac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$*

$= \dfrac{8192\left(\frac{14197}{16384}\right)}{\frac{1}{4}}$

$= 28\,394$

*También podemos calcular sumas usando las funciones **seq** (secuencia) y **sum** (suma) de la CPG.*

Las series geométricas se ven a menudo en el estudio de los fractales, tal como el copo de nieve de Koch.

▲ Copo de nieve de Koch

Ejercitación 6I

1 Calcule el valor de S_{12} para cada serie geométrica.
a $0{,}5 + 1{,}5 + 4{,}5 + \cdots$ **b** $0{,}3 + 0{,}6 + 1{,}2 + \cdots$
c $64 - 32 + 16 - 8 + \cdots$ **d** $(x+1)+(2x+2)+(4x+4)+\cdots$

2 Calcule el valor de S_{20} para cada serie.
a $0{,}25 + 0{,}75 + 2{,}25 + \cdots$ **b** $\frac{16}{9} + \frac{8}{3} + 4 + \cdots$
c $3 - 6 + 12 - 24 + \cdots$ **d** $\log a + \log(a^2) + \log(a^4) + \log(a^8) + \cdots$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Para cada serie geométrica:
i Halle el número de términos.
ii Calcule la suma.
a $1024 + 1536 + 2304 + \cdots + 26\,244$
b $2{,}7 + 10{,}8 + 43{,}2 + \cdots + 2764{,}8$
c $\frac{125}{128} + \frac{25}{64} + \frac{5}{32} + \ldots + \frac{1}{625}$
d $590{,}49 + 196{,}83 + 65{,}61 + \cdots + 0{,}01$

Hasta el momento hemos visto progresiones y series aritméticas y geométricas. ¿Existen otros tipos de progresiones y series matemáticas? ¿Cómo se usan?

Ejemplo 18

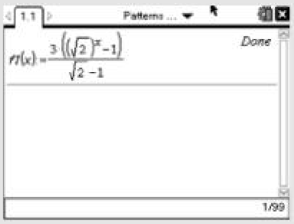
Para la serie geométrica $3+3\sqrt{2}+6+6\sqrt{2}+\ldots$, determine el menor valor de n para el cual $S_n > 500$.

Respuesta

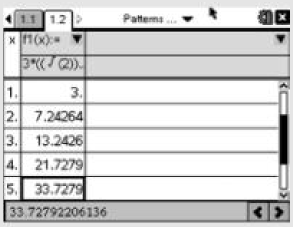
$u_1 = 3$ y $r = \sqrt{2}$

$$S_n = \frac{3\left(\sqrt{2}^n - 1\right)}{\sqrt{2}-1} > 500$$

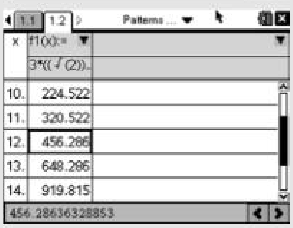
Reemplazar los valores conocidos en la fórmula de S_n
Ingresar la ecuación de S_n en la CPG



Recordemos:
En la CPG, la X representa "n", el número de términos, y f1(x) representa S_n.



Observar la tabla para ver las sumas de los primeros n términos



La suma de los 12 primeros términos es aproximadamente 456,29; y la suma de los 13 primeros términos es aproximadamente 648,29.

$n = 13$, dado que $S_{13} > 500$ y $S_{12} < 500$

Cuando la suma de una serie geométrica incluye un exponente n podemos usar logaritmos.

Una vieja fábula hindú cuenta que un príncipe quedó tan fascinado con un nuevo juego de ajedrez que pidió a su inventor que eligiera su recompensa. El hombre dijo que quería un grano de arroz en el primer cuadrado del tablero de ajedrez, dos granos en el segundo, cuatro en el tercero, y así, duplicando el número de granos cada vez. Esto le pareció tan sencillo al príncipe que accedió sin meditarlo. Los sirvientes comenzaron a traer el arroz y, para la enorme sorpresa del príncipe, los granos rápidamente rebalsaron el tablero para llenar todo el palacio. ¿Cuántos granos de arroz debió darle el príncipe al hombre?

Ejemplo 19

Una progresión geométrica tiene primer término 0,4 y razón 2. Halle el valor de n para el cual $S_n = 26\,214$.

Respuesta

$$S_n = \frac{0{,}4\left(2^n - 1\right)}{2-1} = 26\,214$$

$$0{,}4\left(2^n - 1\right) = 26\,214$$

$$2^n - 1 = 65\,535$$

$$2^n = 65\,536$$

$$n = \log_2(65\,536)$$ *Expresar esto en forma logarítmica*

$$n = \frac{\log 65\,536}{\log 2}$$ *Utilizar la fórmula del cambio de base y la CPG para hallar este valor*

$$n = 16$$

Ejercitación 6J

1 Para cada serie, determinar el menor valor de n tal que $S_n > 400$.

a $25{,}6 + 38{,}4 + 57{,}6 + \cdots$ **b** $14 - 42 + 126 - 378 + \cdots$

c $\frac{2}{3}+\frac{8}{9}+\frac{32}{27}+\cdots$ **d** $0{,}02 + 0{,}2 + 2 + \cdots$

2 Una serie geométrica tiene tercer término 1,2 y octavo término 291,6.
Halle la razón y el valor de S_{10}.

3 En una serie geométrica, $S_4 = 20$ y $S_7 = 546{,}5$.
Halle la razón si $r > 1$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 **a** Halle la razón para la serie geométrica $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\cdots$

b A partir de lo anterior, halle el mínimo valor de n para el cual $S_n > 800$.

"A partir de lo anterior" nos advierte que debemos usar nuestra respuesta previa para resolver este apartado.

5 En una serie geométrica, la suma de los 3 primeros términos es 304, y la suma de los 6 primeros términos es 1330. Halle la suma de los 11 primeros términos.

6 En una serie geométrica, la suma de los 4 primeros términos es 10 veces la suma de los 2 primeros términos.
Si $r > 1$, halle la razón.

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 6: Finanzas*

6.7 Series convergentes y sumas de infinitos términos

Investigación: series convergentes

He aquí tres series geométricas:

a $2 + 1 + 0{,}5 + \cdots$ **b** $75 + 30 + 12 + \cdots$

c $240 - 60 + 15 - 3{,}75 + \cdots$

1 Para cada una de estas series:

i Halle la razón, r.

ii Use su CPG para calcular los valores de S_{10}, S_{15}, S_{20}.
Escriba los valores completos que observa en la pantalla de su calculadora.

2 ¿Observa algún patrón? ¿Por qué cree que sucede esto?

3 Ahora use la CPG para calcular el valor de S_{50} para cada serie.
¿Cree usted que el resultado de su calculadora es correcto? Explique por qué o por qué no.

Para cada una de las series de la investigación deberíamos haber notado que los valores de S_{10}, S_{15} y S_{20} están muy próximos. Esto se debe a que cuando una serie geométrica tiene una razón r tal que $|r| < 1$, la diferencia entre cada término decrece (se hace cercana a cero) a medida que n aumenta. Esto significa que, a medida que sumamos más términos, el valor final de la suma cambia muy poco. La suma se acerca a un valor constante a medida que n toma valores mayores. Estas series geométricas reciben el nombre de **series convergentes**.

En la serie $2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + \cdots$, podríamos sospechar que la suma se acerca a 4 a medida que n toma valores cada vez más grandes.

Paradoja

Supongamos que caminamos por un pasillo de 30 m. Cada diez segundos, recorremos la mitad de la distancia que queda hasta el final del pasillo. ¿Cuánto tiempo nos llevará llegar al final del pasillo? ¿Lo alcanzaremos alguna vez?

Si intentemos hallar S_{50} en la CPG, obtendremos

$$S_{50} = \frac{2\left(1 - 0,5^{50}\right)}{0,5} = 4(1 - 0,5^{50}) = 4$$

¿Es la suma exactamente 4? ¡No! La calculadora redondea el último dígito de expresiones decimales largas como 3,99999999999 para que quepan en la pantalla; por ende, lo único que vemos es el valor redondeado a 4.

Series convergentes

La suma de los términos de una serie geométrica es $S_n = \frac{u_1\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$

Cuando n toma valores cada vez más grandes, podemos decir que n "tiende a infinito" o $n \to \infty$.

Si $|r| < 1$, a medida que $n \to \infty$, $r^n \to 0$, por lo tanto $S_n \to \frac{u_1(1-0)}{1-r} = \frac{u_1}{1-r}$

Podemos escribir esto así:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_1\left(1-r^n\right)}{1-r}\right) = \frac{u_1}{1-r}, \quad \text{o } S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$$

Esto significa que a medida que n toma valores cada vez más grandes (se acerca a infinito), el valor de la serie se aproxima a $\frac{u_1}{1-r}$. La serie **converge** al valor $\frac{u_1}{1-r}$. Escribimos esto como S_∞, y la llamamos suma de infinitos términos.

> Esto es únicamente válido para series **geométricas** y solo cuando $|r| < 1$. (Recordemos: si $|r| < 1$, entonces $-1 < r < 1$.)

> Decimos "el límite de $\frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$ a medida que n tiende a infinito es igual a $\frac{u_1}{1-r}$".

➔ Para una serie geométrica con $|r| < 1$, $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$.

Ejemplo 20

Para la serie 18 + 6 + 2 + ⋯, halle S_{10}, S_{15} y S_∞.

Respuesta	
$u_1 = 18$ y $r = \frac{1}{3}$	
$S_{10} = \frac{18\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{3}}$	*Reemplazar $u_1 = 18$ y $r = \frac{1}{3}$*
$\approx 26{,}999\,542\,75$	*en las fórmulas $S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$ y*
$S_{15} = \frac{18\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{15}\right)}{1-\frac{1}{3}}$	$S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$
$\approx 26{,}999\,998\,12$	*Escribir todos los dígitos que se observan en la pantalla de la CPG*
$S_\infty = \frac{18}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 27$	

Ejemplo 21

La suma de los 3 primeros términos de una serie geométrica es 148, y la suma de los infinitos términos es 256.
Halle el primer término y la razón de la serie.

Respuesta

$S_3 = \frac{u_1(1-r^3)}{1-r} = 148$	*Esta es la expresión para S_3.*
$S_\infty = \frac{u_1}{1-r} = 256$	*Multiplicar ambos miembros de la igualdad por $(1 - r^3)$*
$\frac{u_1(1-r^3)}{1-r} = 256(1-r^3)$	*El miembro izquierdo de esta igualdad es ahora idéntico al miembro izquierdo de la expresión para S_3.*
$256(1-r^3) = 148$	*Igualar los miembros derechos de estas expresiones*
$1-r^3 = \frac{148}{256} = \frac{37}{64}$	*Resolver en r*
$r^3 = 1 - \frac{37}{64} = \frac{27}{64}$	
$r = \frac{3}{4}$	
$\frac{u_1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)} = 256$	*Reemplazar $r = \frac{3}{4}$ en la fórmula $S_\infty = \frac{u_1}{1-r} = 256$*
$\frac{u_1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 256$	
$4u_1 = 256$	
$u_1 = 64$	

Ejercitación 6K

1 Explique cómo sabe si una serie geométrica será una serie convergente.

2 Halle S_4, S_7 y S_∞ para cada una de estas series.

a $144 + 48 + 16 + \cdots$ **b** $500 + 400 + 320 + \cdots$

c $80 + 8 + 0{,}8 + \cdots$ **d** $\frac{9}{2} + 3 + 2 + \cdots$

3 Una serie geométrica tiene $S_\infty = \frac{27}{2}$ y $S_3 = 13$. Halle S_5.

¿Qué situaciones de la vida real podrían modelizarse mediante series convergentes?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Para una progresión geométrica con $u_3 = 24$ y $u_6 = 3$, halle S_∞.

5 Para una progresión geométrica, $u_2 = 12$ y $S_\infty = 64$. Halle u_1.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 Una serie geométrica tiene una razón de 0,4 y la suma de los infinitos términos es 250. Halle el primer término.

7 La suma de los 5 primeros términos de una serie geométrica es 3798, y la suma de los infinitos términos es 4374. Halle la suma de los 7 primeros términos.

6.8 Aplicaciones de patrones aritméticos y geométricos

En muchas situaciones de la vida cotidiana vemos ejemplos de patrones geométricos, tales como el interés compuesto y el crecimiento demográfico.

Si una persona deposita \$1000 en una caja de ahorros que paga intereses a una razón del 4% anual y no hace extracciones ni depósitos, ¿cuánto tendrá la cuenta después de diez años?

Cuando el interés se capitaliza anualmente (una vez al año), el monto en la cuenta al final de cada año será el 104% del monto al inicio del año. (Se multiplica la suma depositada por 1,04.) El monto total en la cuenta después de 10 años sería de $1000(1{,}04)^{10} \approx \$1480{,}24$.

Podemos pensar en el monto que habrá en la cuenta al final de cada año como una progresión geométrica con $u_1 = 1000$ y $r = 1{,}04$:

$u_1 = \$1000$
$u_2 = \$1000(1{,}04) = \$1040$
$u_3 = \$1040(1{,}04) = \$1081{,}60$
$u_4 = \$1081{,}60(1{,}04) \approx \$1124{,}86$
y así sucesivamente.

Ahora consideremos qué sucede cuando el interés se capitaliza más de una vez en el año.

Sea:

M = el monto de dinero en la cuenta
i = la tasa de interés (un porcentaje, escrito como decimal)
n = el número de veces al año que se capitaliza la inversión
t = el número de años
c = el capital inicial (monto inicial de dinero)

Podemos hallar el monto de dinero en la cuenta usando la fórmula:

$$M = c\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Ejemplo 22

Una persona deposita \$1000 en una cuenta que paga un interés del 4% TNA con capitalización trimestral. Suponiendo que la persona no realiza extracciones ni depósitos adicionales, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de diez años?

Respuesta

$$M = 1000\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{4(10)}$$
$$= 1000(1{,}01)^{40}$$
$$\approx \$1488{,}86$$

Reemplazar los valores conocidos en la fórmula $M = c\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$

Esta fórmula funciona porque la tasa de interés nominal anual del 4% se divide en cuatro partes, una por cada trimestre, y por lo tanto, el interés trimestral es del 1%. Si el interés se capitaliza cuatro veces al año (trimestralmente) por un período de 10 años, esta tasa trimestral se aplicará 40 veces.

TNA significa "tasa nominal anual".
4% TNA es lo mismo que el 4% por año.

¿Qué otros tipos de matemáticas se usan en las finanzas?

Crecimiento demográfico

Ejemplo 23

La población de un pueblo pequeño crece un 2% por año. Si la población al inicio de 1980 era de 12 500 habitantes, ¿cuál es la población esperada para el inicio del año 2020?

Respuesta

$12\,500(1{,}02)^{40} \approx 27\,600{,}496$

Al comienzo de cada año, la población será el 102% de la población inicial del año anterior. Desde 1980 hasta 2020, habrán pasado 40 años.

La población del pueblo será de aproximadamente 27 600.

En preguntas como la del ejemplo 23, debemos pensar que n es el número de años más que el número de orden del término.

Ejercitación 6L

1 En una progresión aritmética, $u_6 = 3u_4$.
Halle u_1 si $u_8 = 50$.

2 Un vaso plástico tiene 12 cm de alto.
Cuando se apilan 5 vasos, la altura de la pila alcanza 15 cm.

a ¿Qué altura alcanzarían 20 vasos apilados?

b ¿Cuántos vasos habría que apilar para alcanzar una altura de al menos 1 m?

3 Jorge deposita \$2500 en una cuenta que paga interés del 6% TNA. Suponiendo que no realiza extracciones ni depósitos, ¿cuánto tendrá en la cuenta después de 8 años si ocurre lo siguiente?

a El interés se capitaliza anualmente.

b El interés se capitaliza trimestralmente.

c El interés se capitaliza mensualmente.

4 Una progresión aritmética se define mediante $u_n = 12n - 7$ y una progresión geométrica se define mediante $v_n = 0{,}3(1{,}2)^{n-1}$. Halle el menor número de términos para el cual $v_n > u_n$.

Esta pregunta usa v_n, en lugar de u_n, para representar el enésimo término de una progresión geométrica.

5 En una progresión geométrica, el primer término es 6 y la razón es 1,5. En una progresión aritmética, el primer término es 75 y la diferencia es 100. ¿Después de cuántos términos la suma de los términos de la progresión geométrica superará la suma de los términos de la progresión aritmética?

6 A comienzos de 2012, un lago contiene 200 peces. Se espera que el número de peces en el lago crezca un 5% por año. ¿Cuál será el número de peces en el lago a comienzos de 2015?

7 La población de una ciudad es de 275 000 habitantes. La población crece a una tasa del 3,1% por año. Suponiendo que la población continúa creciendo a esta tasa, ¿cuánto tiempo pasará hasta que la población alcance los 500 000 habitantes?

8 Una serie está definida por la fórmula $S_n = 3n^2 - 2n$.

a Halle el valor de S_1, S_2 y S_3.

b Halle los valores de u_1, u_2 y u_3.

c Escriba una expresión para u_n.

9 Una serie se define por la fórmula $S_n = 2^{n+2} - 4$.

a Halle el valor de S_1, S_2 y S_3.

b Halle los valores de u_1, u_2 y u_3.

c Escriba una expresión para u_n.

10 En una isla remota habitan dos especies de arañas. La población de la especie A es 12 000 y crece a una tasa del 1,25% por mes. La población de la especie B es de 50 000 y decrece a una tasa de 175 arañas cada mes. ¿Cuándo será mayor la población de la especie A que la población de la especie B?

11 Moira invierte \$3000 en una cuenta que paga el 3% de interés anual, con capitalización anual. Raúl invierte \$3000 en una cuenta que también paga el 3% de interés anual, pero con capitalización mensual. Suponiendo que ninguna de las dos personas realiza depósitos ni extracciones adicionales, ¿cuánto más dinero tendrá Raúl en su cuenta que Moira en la suya después de diez años?

6.9 El triángulo de Pascal y el desarrollo del binomio

El triángulo de Pascal le debe el nombre a Blaise Pascal (francés, 1623–1662).

Ahora veremos un famoso patrón matemático conocido como triángulo de Pascal. He aquí las filas 1 a 7 del triángulo de Pascal.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Cualquier número del triángulo de Pascal es la suma de los dos números ubicados inmediatamente encima de él.

¿Podemos predecir cuáles serán los números de la fila 8?

Los números del triángulo se generan comenzando en lo alto y sumando pares de números para obtener la fila siguiente. ¿Pero qué sucede si queremos hallar los números de la fila 15? ¿O de la fila 27? ¡Tomaría muchísimo tiempo hacer un triángulo de esas dimensiones!

He aquí los números en la cuarta fila del triángulo: 1, 4, 6, 4, 1. Estos números también pueden hallarse usando **combinaciones,** o la función ${}_nC_r$ en la CPG.

$${}_4C_0 = 1 \qquad {}_4C_1 = 4 \qquad {}_4C_2 = 6 \qquad {}_4C_3 = 4 \qquad {}_4C_4 = 1$$

${}_nC_r$ se escribe comúnmente como $\binom{n}{r}$, o incluso algunas veces como C_r^n.

$\binom{n}{r}$, o C_r^n, representa el número de formas en que se pueden tomar grupos de r elementos, de un conjunto de n elementos. Por ejemplo, supongamos que una bolsa contiene 5 bolillas etiquetadas con A, B, C, D, y E. Si tomamos dos bolillas de la bolsa, hay $\binom{5}{2} = 10$ formas diferentes de elegirlas. Estas combinaciones son AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE o DE.

Debemos asegurarnos de saber cómo usar la función nCr de la CPG.

Podemos hallar los valores de expresiones como $\binom{5}{2}$ sin usar una calculadora.

➔ El número de combinaciones de n elementos tomados de a r por vez se halla mediante:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \text{ donde } n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

! es el signo **factorial**. La expresión $n!$ se denomina “factorial de n”.

Ejemplo 24

Halle el valor de $\binom{7}{5}$ usando la fórmula y verifique con la CPG.

Respuesta

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!}$$

Reemplazar n = 7 y r = 5 en la fórmula

$$= \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(5\times4\times3\times2\times1)(2\times1)}$$

Simplificar los factores comunes del numerador y el denominador

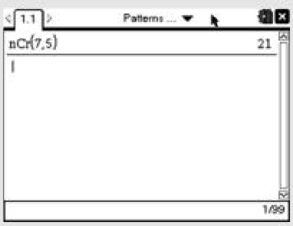
$$= \frac{7\times6}{2\times1} = \frac{42}{2}$$

$$= 21$$

$$\binom{7}{5} = 21$$

Recordemos que se puede hallar el valor usando el triángulo de Pascal.

Usando la calculadora:



En la calculadora TI Nspire, nCr está en el menú de ***Probability***, ***Combinations*** *(probabilidad, combinaciones).*

Puede que aparezcan puntos en lugar de signos de multiplicación. Por ejemplo:
3 · 2 · 1 en lugar de 3 × 2 × 1.

Ejercitación 6M

Halle cada valor usando la fórmula y luego verifique con su CPG.

1 $\binom{5}{3}$ **2** $\binom{8}{2}$ **3** ${}_7C_3$

4 ${}_9C_6$ **5** $\binom{6}{4}$ **6** $\binom{10}{3}$

Investigación: patrones en polinomios

Desarrolle cada una de las siguientes expresiones (escriba cada expresión como un polinomio).
Registre el tiempo que le lleva realizar cada desarrollo.

1 $(a + b)^1$ **2** $(a + b)^2$ **3** $(a + b)^3$
4 $(a + b)^4$ **5** $(a + b)^5$ **6** $(a + b)^6$

Observe sus respuestas y tome nota de los patrones que observe.
¿Observa alguna similitud con el triángulo de Pascal?
Basándose en estos patrones, prediga cuál podría ser el desarrollo de $(a + b)^7$.

Desarrollo binomial

Veremos qué sucede cuando desarrollamos una expresión como $(a + b)^n$, donde n es un número entero positivo.

En la investigación de la página 185, se desarrollaron estas expresiones:

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Si observamos con detenimiento cada desarrollo, veremos algunos patrones:

1 El número de términos es uno más que el valor de n.

2 Las potencias de a comienzan con a^n, y las potencias de a decrecen en 1 unidad hasta llegar a a^0 ($a^0 = 1$) en el último término.

3 Las potencias de b comienzan con b^0($b^0 = 1$), y las potencias de b crecen en 1 unidad hasta llegar a b^n en el último término.

4 ¡Los coeficientes son todos números del triángulo de Pascal!

Los coeficientes de $(a + b)^n$ son los números de la enésima fila del triángulo de Pascal. Podemos hallarlos usando el triángulo o la fórmula de combinaciones, o la función nCr en la CPG.

5 La suma de los exponentes de cada término coincide con el exponente del binomio.

Por ejemplo, en el desarrollo de $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, los exponentes de cada término suman 3.

Por ejemplo, cuando $n = 4$, el desarrollo tiene 5 términos.

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Los coeficientes 1, 4, 6, 4, 1 son los de la cuarta fila del triángulo de Pascal.

En $(a + b)^5$ los coeficientes 1, 5, 10, 10, 5, 1 son los de la quinta fila del triángulo de Pascal.

Podemos usar estos patrones para desarrollar la expresión $(a + b)^6$.
El desarrollo tendrá 7 términos.
Las potencias de a decrecerán, las potencias de b crecerán.
Los coeficientes serán los de la sexta fila del triángulo de Pascal (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1).

Por consiguiente, $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Estos patrones y observaciones nos pueden ayudar a comprender el teorema general del binomio para desarrollar potencias de binomios.

Además del teorema del binomio, las combinaciones se usan en muchas otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, las probabilidades. ¡Hasta podemos usar combinaciones para calcular la probabilidad de ganar la lotería!

➔ El teorema del binomio establece que para cualquier potencia de un binomio donde $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

➔ Podemos incluso escribir el desarrollo del binomio usando notación de sumatoria.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\left(\binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r\right)$$

Ejemplo 25

Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(x + 3)^5$. Escriba la respuesta en su forma más sencilla.

Respuesta

$$(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 3^0 + \binom{5}{1}x^4 3^1 + \binom{5}{2}x^3 3^2 + \binom{5}{3}x^2 3^3 + \binom{5}{4}x^1 3^4 + \binom{5}{5}x^0 3^5$$

$= (1)(x^5)(1) + (5)(x^4)(3) + (10)(x^3)(9) + (10)(x^2)(27) + (5)(x^1)(81) + (1)(1)(243)$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

Reemplazar valores en el teorema del binomio Es importante saber hallar estos valores con calculadora o sin ella.

Ejemplo 26

Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(2x - 5y)^3$. Escriba la respuesta en su forma más sencilla.

Respuesta

$$(2x-5y)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3(-5y)^0 + \binom{3}{1}(2x)^2(-5y)^1 + \binom{3}{2}(2x)^1(-5y)^2 + \binom{3}{3}(2x)^0(-5y)^3$$

$= (1)(8x^3)(1) + (3)(4x^2)(-5y) + (3)(2x)(25y^2) + (1)(1)(-125y^3)$

$= 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$

Una expresión como $(2x)^3$ requiere de especial cuidado: ¡el exponente debe aplicarse tanto a la variable como al coeficiente!
$(2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3$

Ejercitación 6N

Utilice el teorema del binomio para desarrollar cada expresión.

1 $(y + 3)^5$ **2** $(2b - 1)^4$ **3** $(3a + 2)^6$ **4** $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^3$

5 $(x + y)^8$ **6** $(3a - 2b)^4$ **7** $\left(3c + \frac{2}{d}\right)^5$ **8** $\left(4x^2 + \frac{1}{2y}\right)^3$

A veces, no hará falta obtener el desarrollo completo de la potencia del binomio. Quizás solo necesitemos hallar un término en particular.

Ejemplo 27

Halle el término en x^3 en el desarrollo de $(4x - 1)^9$.

Respuesta

$\binom{9}{6}(4x)^3(-1)^6$

$=(84)(64x^3)(1)$

$= 5376x^3$

Para obtener x^3, elevar el primer término al cubo. Entonces, el segundo término del binomio, -1, irá elevado a la sexta potencia. Se podría usar $\binom{9}{3}$ en lugar de $\binom{9}{6}$, porque tienen el mismo valor.

Ejemplo 28

En el desarrollo de $(2x + 1)^n$, el coeficiente del término en x^3 es 80. Halle el valor de n.

Respuesta

$\binom{n}{3}(2x)^3 1^{n-3} = 80x^3$	*Se pudo haber usado* $\binom{n}{n-3}$ *en lugar de* $\binom{n}{3}$, *ya que estos valores son iguales.*
$\left(\dfrac{n!}{(3)!(n-3)!}\right)(8x^3)(1) = 80x^3$	*Usar la fórmula* $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
$\left(\dfrac{n!}{(3)!(n-3)!}\right)(8) = 80$	*Ya que solo se debe hallar el coeficiente, se puede prescindir de* x^3.
$\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times(n-4)\times\ldots}{(3\times2\times1)\times[(n-3)\times(n-4)\times\ldots]}(8) = 80$	*Dividir ambos miembros por 8*
$\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times(n-4)\times\ldots}{(3\times2\times1)\times[(n-3)\times(n-4)\times\ldots]} = 10$	*Simplificar los factores repetidos en el numerador y el denominador*
$\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{6} = 10$	*Se pueden resolver ecuaciones polinómicas como estas usando la CPG.*
$n\times(n-1)\times(n-2) = 60$	
$n^3 - 3n^2 + 2n - 60 = 0$	
$n = 5$	

Ejercitación 60

1 Halle el término en x^5 del desarrollo de $(x - 4)^7$.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 Halle el término en y^4 del desarrollo de $(4y - 1)^5$.

3 Halle el término en a^2b^4 del desarrollo de $(2a - 3b)^6$.

4 Halle el término constante en el desarrollo de $(x - 2)^9$.

5 En el desarrollo de $(px + 1)^6$, el coeficiente de x^3 es 160. Halle el valor de p.

El "término constante" es el término numérico que no tiene variables.

6 En el desarrollo de $(3x + q)^7$, el coeficiente de x^5 es 81 648. Halle el valor de q.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

7 Halle el término constante en el desarrollo de $\left(4x + \dfrac{1}{x}\right)^8$.

8 Halle el término constante en el desarrollo de $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^6$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

9 En el desarrollo de $(x + 1)^n$, el coeficiente del término en x^3 es el doble del coeficiente en x^2. Halle el valor de n.

10 En el desarrollo de $(x + 2)^n$, el coeficiente del término en x^3 es dos veces el coeficiente del término en x^4. Halle el valor de n.

Ejercicios de revisión

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 Considere la progresión aritmética 3, 7, 11, 15, ...

a Escriba la diferencia.

b Halle u_{71}. **c** Halle el valor de n tal que $u_n = 99$.

2 Los 3 primeros términos de una progresión geométrica infinita son 64, 16 y 4.

a Escriba el valor de r. **b** Halle u_4.

c Halle la suma de los infinitos términos de esta progresión.

3 En una progresión aritmética, $u_6 = 25$ y $u_{12} = 49$.

a Halle la diferencia.

b Halle el primer término de la progresión.

4 Considere la progresión aritmética 22, x, 38, ...

a Determine el valor de x. **b** Halle u_{31}.

5 Evalúe la expresión $\sum_{a=1}^{4}\left(3^a\right)$.

6 Considere la serie geométrica $800 + 200 + 50 + \cdots$

a Halle la razón. **b** Halle la suma de los infinitos términos.

7 Halle todos los posibles valores de x para los cuales esta progresión resulta geométrica: x, 12, $9x$, ...

PREGUNTA TIPO EXAMEN

8 Halle el término en x^3 del desarrollo de $(2x + 3)^5$.

9 Un almacén tiene un exhibidor de sopas en lata apiladas en forma piramidal. La fila superior tiene tres latas y cada fila tiene dos latas más que la fila anterior.

a Si hay 35 latas en la fila inferior ¿cuántas filas tiene el exhibidor?

b ¿Cuántas latas hay en el exhibidor en total?

Ejercicios de revisión

1 En una serie aritmética, el primer término es 4 y la suma de los 25 primeros términos es 1000.

a Halle la diferencia. **b** Calcule el valor del 17.° término.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Considere la progresión aritmética 3; 4,5; 6; 7,5; ...

a Halle u_{63}. **b** Halle el valor de n tal que $S_n = 840$.

3 En una serie aritmética, el décimo término es 25 y la suma de los 10 primeros términos es 160.

a Halle el primer término y la diferencia.

b Halle la suma de los 24 primeros términos.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 En una progresión geométrica, el primer término es 3 y el sexto término es 96.

a Halle la razón.

b Halle el menor valor de n para el cual $u_n > 3000$.

5 En una progresión aritmética, el primer término es 28 y la diferencia es 50. En una progresión geométrica, el primer término es 1 y la razón es 1,5. Halle el menor valor de n para el cual el enésimo término de la progresión geométrica es mayor que el enésimo término de la progresión aritmética.

6 En una serie geométrica, el tercer término es 45 y la suma de los 7 primeros términos es 2735.
Halle el primer término y la razón r, si $r \in \mathbb{Z}$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

7 Halle el término en x^4 del desarrollo de $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^7$.

8 En el desarrollo de $(ax + 2)^8$, el término en x^5 tiene coeficiente $\frac{7}{16}$.
Halle el valor de a.

9 A comienzos de 2010, la población de un país era de 3,4 millones.

a Si la población crece a una tasa del 1,6% anual, estime la población del país a comienzos de 2040.

b Si la población sigue creciendo a esta tasa, ¿en qué año la población del país excederá los 7 millones?

RESUMEN DEL CAPÍTULO 6

Patrones y progresiones

- Una **progresión numérica** es un patrón de números dispuestos en un orden particular de acuerdo con una regla.
- Cada número o elemento de la progresión se denomina **término**.

Progresiones aritméticas

- En una progresión aritmética, los términos crecen o decrecen en un valor constante. Este valor recibe el nombre de **diferencia** o d. La diferencia puede ser un valor positivo o negativo.
- Podemos calcular el término enésimo de una progresión aritmética usando la fórmula: $u_n = u_1 + (n - 1)d$

Continúa en la página siguiente.

Progresiones geométricas

- En una **progresión geométrica**, cada término puede obtenerse multiplicando al término anterior por un valor constante. Este valor constante se denomina **razón** o r.
- Se puede hallar el enésimo término de una progresión geométrica usando la fórmula:
  $u_n = u_1(r^{n-1})$

La notación de sumatoria (Σ)

- $\sum_{i=1}^{n} u_i$ significa la suma de los primeros n términos de una progresión.
  Esto se lee "la suma de todos los términos u_i desde $i = 1$ hasta $i = n$".

Series aritméticas

- Se puede hallar la suma de los n primeros términos de una serie aritmética usando la fórmula:
  $$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \text{ o } S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$$

Series geométricas

- Se puede hallar la suma de los n primeros términos de una serie geométrica usando la fórmula:
  $$S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r-1} \text{ o } S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}, \text{ donde } r \neq 1.$$

Series convergentes y suma de infinitos términos

- Para una serie geométrica con $|r| < 1$, $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$.

Triángulo de Pascal y desarrollo del binomio

- El número de combinaciones de n elementos tomados de a r por vez se halla mediante:
  $$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)}, \text{ donde } n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$
- El teorema del binomio establece que para cualquier potencia de un binomio, donde $n \in \mathbb{N}$,
  $$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$
- Se puede incluso escribir el desarrollo binomial usando notación de sumatoria:
  $$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\left(\binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r\right)$$

¿De quién fue la idea después de todo?

El triángulo de Pascal debe su nombre al francés Blas Pascal, quien hacia 1654 se refirió a él en su *Tratado del triángulo aritmético*.

Sin embargo, las propiedades de este patrón eran conocidas y fueron estudiadas por matemáticos en la India, China y otras partes del mundo siglos antes de la época de Pascal.

En China, el triángulo de Pascal se conoce como “Triángulo de Yang Hui”, en honor a un matemático del siglo XIII, aunque era conocido mucho antes de esta fecha.

En el siglo XI, el matemático y poeta persa Omar Khayyám se refirió al patrón que se observa en el triángulo de Pascal.

- ¿Qué es el triángulo de Tartaglia?
- ¿Cómo se usa el triángulo de Pascal?

Esta no es la primera vez que una idea matemática de larga data se atribuye a una persona en particular. Ha ocurrido frecuentemente, cuando un matemático de renombre ha publicado un resultado importante y presentado la idea matemática al público.

A lo largo de los años, se les ha dado crédito a los matemáticos por sus descubrimientos o invenciones.

- ¿Cree que muchas de estas ideas se han atribuido a personas equivocadas?

Triángulo de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

▲ Blas Pascal (1623–1662)

▼ Omar Khayyám (*c.* 1048–*c.* 1131)

Fibonacci: patrones en la naturaleza

El matemático italiano Fibonacci, Leonardo de Pisa, presentó la progresión de Fibonacci en su libro *Liber abaci*, publicado en 1202.

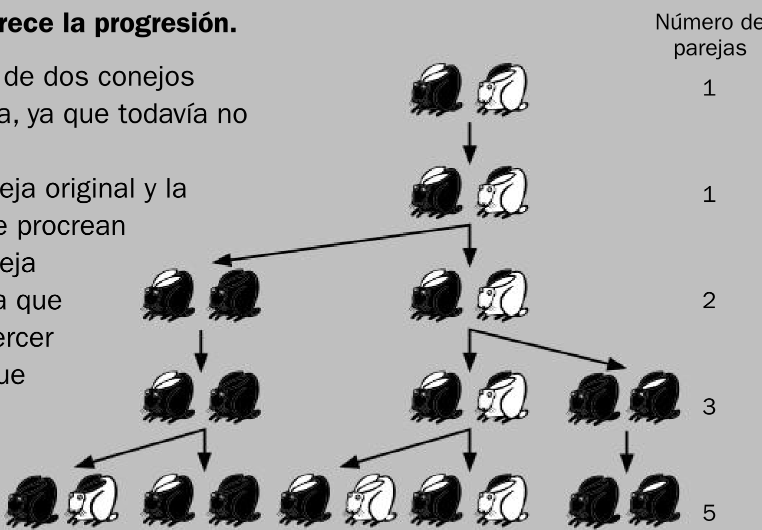
En él plasmó este problema:

Si comenzamos con una sola pareja de conejos y cada mes cada pareja produce una nueva pareja que se vuelve fértil a partir del segundo mes, ¿cuántas parejas de conejos habrá en un año?

Fibonacci no fue el único matemático que trabajó con este patrón.

El diagrama muestra cómo crece la progresión.

1.^er^ mes: 1 pareja original de dos conejos
2.° mes: continúa 1 pareja, ya que todavía no son fértiles
3.^er^ mes: 2 parejas: la pareja original y la nueva pareja que procrean
4.° mes: 3 parejas: la pareja original, la pareja que procrean en el tercer mes, la pareja que procrean en el cuarto mes



El número de parejas genera la progresión de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

donde cada término es la suma de los dos términos anteriores.

Los números de la progresión de Fibonacci se ven frecuentemente en la naturaleza. El número de espirales en la corteza de las piñas o en las corolas de las flores son, a menudo, números de la progresión de Fibonacci.

- ¿Es simplemente un accidente que una progresión matemática tan conocida aparezca en la naturaleza?
- ¿Podría ser que haya una relación entre matemática y naturaleza?
- ¿Qué es la sección áurea?¿Dónde aparece en la naturaleza?

- ¿Cómo se relacionan el triángulo de Pascal y la progresión de Fibonacci? **Pista:** observe las sumas de las diagonales en el triángulo.

▶ Fibonacci (*c*. 1170–*c*. 1250)

7 Límites y derivadas

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

6.1 Idea informal de límite y convergencia; notación de límite; definición de derivadas, a partir del concepto, como $f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$.

Interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva y como medida de la razón de cambio entre dos variables; tangentes, normales, y sus ecuaciones.

6.2 Derivada de x^n $(n \in \mathbb{R})$; derivada de la suma y del producto por un escalar de estas funciones; derivada de e^x y $\ln x$; regla de la cadena para la composición de funciones; regla del producto y regla del cociente; derivada segunda; usos de las dos formas de notación, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $f''(x)$.

6.3 Puntos máximos y mínimos locales; puntos de inflexión con pendiente nula y no nula; comportamiento de los gráficos de las funciones, incluida la relación entre los gráficos de f, f' y f''; optimización y aplicaciones.

6.6 Problemas de cinemática relativos al desplazamiento s, la velocidad v y la aceleración a

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Factorizar una expresión
Por ejemplo:
$2x^3 + 4x^2 + 2x = 2x(x^2 + 2x + 1)$

2 Desarrollar binomios
Por ejemplo: Desarrollar $(2x - 1)^4$

$$\begin{aligned}&(2x-1)^4\\ &= 1(2x)^4(-1)^0 + 4(2x)^3(-1)^1\\ &\quad + 6(2x)^2(-1)^2 + 4(2x)^1(-1)^3\\ &\quad + 1(2x)^0(-1)^4\\ &= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

3 Utilizar exponentes racionales para reescribir expresiones en la forma cx^n
Por ejemplo: $\frac{2}{x^5} = 2x^{-5}$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Comprobemos nuestras habilidades

1 Factorice:
a $9x^4 - 15x^3 + 3x$ **b** $4x^2 - 9$
c $x^2 - 5x + 6$ **d** $2x^2 - 9x - 5$

2 Desarrolle cada binomio:
a $(x + 2)^3$ **b** $(3x - 1)^4$ **c** $(2x + 3y)^3$

3 Use exponentes racionales para reescribir cada expresión en la forma cx^n:
a $\frac{1}{x^6}$ **b** $\frac{4}{x^3}$ **c** $5\sqrt{x}$
d $\sqrt[7]{x^5}$ **e** $\frac{7}{\sqrt{x^3}}$

Si pulsamos la cuerda de una guitarra y la dejamos vibrar, el sonido se aplaca a medida que pasa el tiempo. Esto se puede modelizar mediante la función $f(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}$, donde t representa tiempo. A medida que t crece más y más, $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ se acerca más a cero: este es el valor límite de la función.

Escribimos esto como $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}=0$. El concepto de límite es fundamental en el cálculo o análisis matemático. En un próximo capítulo aprenderemos más acerca de la función seno, cuyo gráfico es una onda sinusoidal.

El análisis es la rama de las matemáticas que toma el álgebra y la geometría, junto con el proceso de límite, y contempla dos tipos de problemas. El cálculo diferencial usa límites para hallar la razón a la que cambia una cantidad variable. El cálculo integral usa límites para resolver problemas que involucren cambios reiterados. En este capítulo aprenderemos a evaluar límites básicos y luego trataremos más en detalle el cálculo diferencial.

7.1 Límites y convergencia

En esta sección investigaremos los conceptos de límites y convergencia y utilizaremos la notación de límite. El concepto de límite es la base del cálculo.

Investigación: creación de una progresión

Trabaje con un compañero. Necesitará un pedazo de papel rectangular, un par de tijeras y una copia de esta tabla.

Número de vuelta	Porción de papel que tiene al final de la vuelta	
	Fracción	Decimal (3 cs)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Vuelta 1: corte el rectángulo de papel en tres trozos de aproximadamente el mismo tamaño. Cada alumno toma un trozo y se deja uno sobre la mesa. Anoten la porción del rectángulo original que ahora tienen, como fracción y como decimal (con tres cifras significativas).

Vuelta 2: corte el trozo que quedó sobre la mesa en tres trozos de igual tamaño. Cada uno añade uno de estos trozos a su porción del rectángulo original. Anoten la fracción total del rectángulo original que ahora tienen, de la misma forma que lo hicieron antes.

Repitan el mismo proceso cuatro veces más.

1 A medida que repitan más y más veces esta actividad, ¿qué pueden decir acerca de la porción del rectángulo original que cada uno tiene?

2 Si repiten este proceso indefinidamente, ¿qué pueden decir acerca de la porción del rectángulo original que tienen?

Al cortar el papel en tres trozos iguales, basta con hacerlo de manera aproximada.

A medida que complete más y más vueltas de esta actividad, se podría decir que el número de vueltas tiende a infinito. ¿Puede dar un ejemplo de la vida real que crezca o se desarrolle como este?

Límites de progresiones

Los datos que se obtuvieron en la investigación forman una progresión donde u es la porción del rectángulo original que cada uno tiene después de la vuelta 1, u_2 la que tiene después de la vuelta 2, y así sucesivamente.

A las progresiones como estas se las llama **convergentes** porque a medida que el número de término en la progresión crece, los términos de la progresión se aproximan a un valor fijo, conocido como el **límite**, L, de la progresión. Podemos escribir esto como: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$.

Las progresiones que no son convergentes son **divergentes**.

¿Cuál es el límite de la progresión que se generó en la investigación?

La notación $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ se lee "el límite cuando n tiende a infinito de u_n es igual a L".

Los antiguos griegos usaron la idea de límite para calcular áreas usando el método de exhaución. Este podría ser un tema interesante para investigar.

Ejemplo 1

Determine si cada progresión es convergente o divergente.
Si una progresión es convergente, indique el límite de la misma.

a 0,3; 0,33; 0,3333; …

b 2, 4, 8, 16, …

c $\frac{1}{5}, \frac{6}{25}, \frac{31}{125}, \frac{156}{625}, \frac{781}{3125}, \ldots$

d 1, −1, 1, −1, …

Respuestas

a Convergente; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{3}$

El patrón indica que la progresión se aproxima a 0,3333…, o $0,\dot{3}$, que es la forma decimal de $\frac{1}{3}$.

Otras notaciones para indicar decimales periódicos incluyen $0{\cdot}\overline{3}$.

b Divergente

Cada término en la progresión es mayor que el anterior, por lo que no se acercan a un límite.

c Convergente; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{4}$

Para comparar fracciones con diferentes denominadores, usar una calculadora de pantalla gráfica (CPG) para convertirlas en decimales: 0,2; 0,24; 0,248; 0,2496; 0,24992; …
Los valores se acercan a 0,25 o $\frac{1}{4}$.

d Divergente

Los términos en la progresión oscilan entre dos valores y no se acercan a un valor fijo.

Ejercitación 7A

Determine si cada progresión es convergente o divergente.
Si una progresión es convergente, dé el límite de la misma.

1 1, 3, 5, 7, …

2 3,49; 3,499; 3,499; 3,4999; …

3 $\frac{1}{10}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, -\frac{1}{10\,000}, \ldots$

4 $\frac{20}{27}, \frac{121}{162}, \frac{182}{243}, \frac{1093}{1458}, \frac{1640}{2187}, \ldots$

5 3, 4, 3, 4, 3, 4, …

Limites de funciones

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ significa que a medida que el valor de x se acerca lo suficiente a c (desde cualquier lado), la función $f(x)$ se acerca a un valor fijo L. Si $f(x)$ no se acerca a un valor fijo L, decimos que el límite no existe.

Se puede usar la CPG para hallar el límite de una función.
Gráficamente: se representa gráficamente la función y se examinan los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a c.
Numéricamente: se hace una tabla de valores y se examinan los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a c.

Ejemplo 2

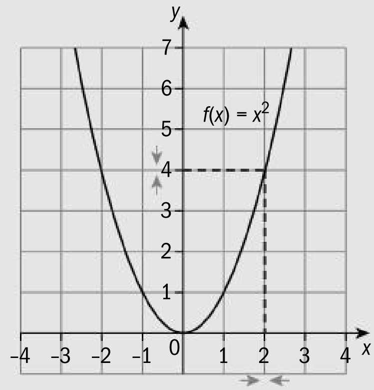
Use una CPG para examinar cada función gráficamente y numéricamente.
Halle el límite o indique que no existe.

a $\lim_{x\to 2} x^2$ **b** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ **c** $\lim_{x\to 0} f(x)$; donde $f(x)=\begin{cases}1 & \text{para } x\geq 0\\ -1 & \text{para } x<0\end{cases}$

Respuestas

a $\lim_{x\to 2} x^2$

Obtenga el gráfico de f(x) = x^2 usando una CPG, y observe el valor de f(x) a medida que x se acerca a 2 por la derecha y por la izquierda.



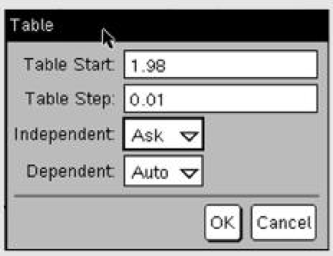
Gráficamente, f(x) se acerca a 4 a medida que x se acerca a 2.
Numéricamente, cuando x se acerca a 2 por cualquiera de los dos lados, f(x) se acerca a 4.

$\rightarrow 2 \leftarrow$

x	1,8	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,2
f1(x)	3,24	3,61	3,960	3,996	4,004	4,040	4,41	4,84

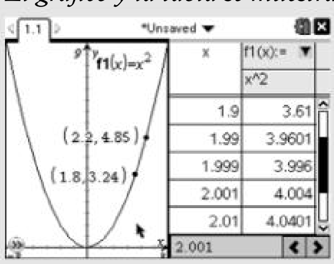
$\rightarrow 4 \leftarrow$

Para construir la tabla anterior usando una CPG, ingrese f1(x) = x^2. Luego configure la variable independiente en **Ask** *(preguntar). Ingrese los valores de x.*



Por lo tanto,
$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

El gráfico y la tabla se muestran en la misma pantalla.

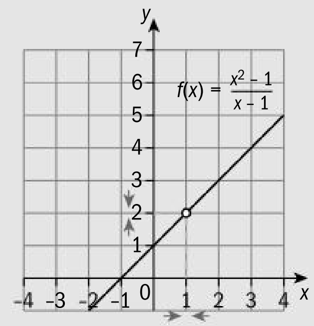


Para f(x) = x^2 podemos sustituir y hallar que $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$

▶ Continúa en la página siguiente.

b $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

f(x) se acerca a 2 a medida que x se acerca a 1:



Dado que la división por cero no está definida, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ *no está definida cuando* $x - 1 = 0$ *o* $x = 1$. *En consecuencia, hay una* **discontinuidad** *en el gráfico cuando* $x = 1$. *Tenga en cuenta que*

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1$, *cuando* $x \neq 1$.

Si bien $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ *no está definida cuando* $x = 1$, *el límite existe, ya que a medida que x se acerca a 1 por ambos lados, f (x) se acerca a 2.*

$\rightarrow 1 \leftarrow$

x	0,8	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1	1,2
f(x)	1,8	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	2,2

$\rightarrow 2 \leftarrow$

Por lo tanto,
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

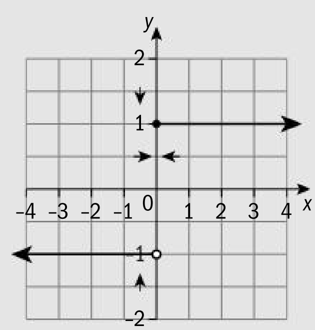
Observe que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$

c $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ donde

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

f(x) no se acerca al mismo valor a medida que x se acerca a 0 por la izquierda y por la derecha:



$\rightarrow 0 \leftarrow$

x	−0,2	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1	0,2
f(x)	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1

Por lo tanto,
$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Observe que f(0) = 1, pero $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *no existe.*

Esto es porque f(x) se acerca a 1 para valores de x a la derecha de x = 0 y f(x) se acerca a −1 para valores de x a la izquierda de x = 0.

Ejercitación 7B

Use una CPG para examinar cada función gráficamente y numéricamente. Halle el límite o indique que no existe.

Material de ampliación disponible en línea:
Hoja de ejercicios 7: Una mirada algebraica a los límites

1 $\lim_{x\to 3}(x^2+1)$ **2** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x^2+x}{x}$

3 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ **4** $\lim_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4}$

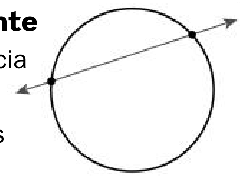
5 $\lim_{x\to 1} f(x)$; donde $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{para } x\geq 1 \\ -x+5 & \text{para } x<1 \end{cases}$

6 $\lim_{x\to 2} f(x)$; donde $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{para } x\geq 2 \\ x & \text{para } x<2 \end{cases}$

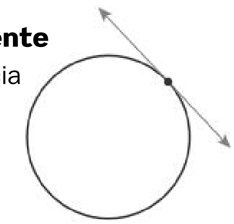
7.2 La recta tangente y la derivada de x^n

En esta sección trabajaremos con rectas secantes, tangentes y normales. Definiremos la derivada de una función y aprenderemos algunas reglas para hallar las derivadas de ciertas funciones.

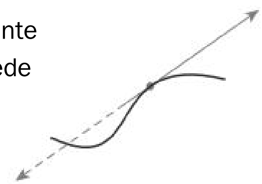
Una **recta secante** a una circunferencia corta a la circunferencia dos veces.



Una **recta tangente** a una circunferencia corta una sola vez a la circunferencia.

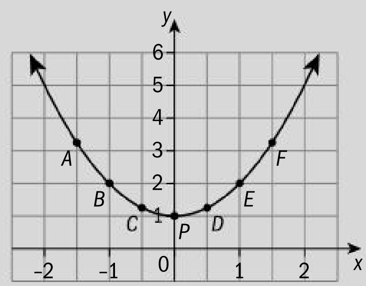


Una recta tangente a una curva puede cortar a la curva más de una vez.



Investigación: rectas secantes y tangentes

Aquí está el gráfico de $f(x) = x^2 + 1$.



1 Copie el gráfico al papel y dibuje las rectas *AP*, *BP*, *CP*, *DP*, *EP* y *FP*. A estas rectas se las llama **rectas secantes** al gráfico de $f(x) = x^2 + 1$.

2 Copie y complete la tabla.

Punto	Coordenadas	Recta	Pendiente
P		—	—
A		*AP*	
B		*BP*	
C		*CP*	
D		*DP*	
E		*EP*	
F		*FP*	

Recuerde que la pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

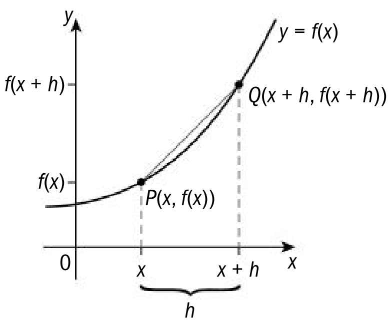
3 A medida que los puntos en la curva se acercan más y más al punto *P*, ¿a qué valor pareciera que se aproximan las pendientes de las rectas secantes?

4 Dibuje la recta en el punto *P* que tiene la pendiente que halló en la pregunta 3. Esta recta se llama **recta tangente** al gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ en *P*.

Las rectas tienen pendiente constante, pero otras curvas no. La pendiente de una curva en un punto dado es la pendiente de la recta tangente a la curva en el ese punto. Con este concepto trabajó Sir Isaac Newton cuando quiso hallar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento cuya velocidad iba variando continuamente.

▲ Sir Isaac Newton, 1642–1727, matemático inglés, es uno de los matemáticos a los que se atribuye el desarrollo del cálculo.

Pendiente de una recta secante



La pendiente de la recta secante *PQ* se escribe como:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se conoce como **cociente incremental**.

Ejemplo 3

Escriba una expresión para la pendiente de una recta secante para $f(x) = x^2 + 1$. Simplifique su expresión.

Respuesta

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left[(x+h)^2+1\right]-\left(x^2+1\right)}{h}$$

Reemplazar la x en $x^2 + 1$ por $x + h$, para obtener una expresión para $f(x + h)$

$$=\frac{\left(x^2+2xh+h^2+1\right)-\left(x^2+1\right)}{h}$$

Desarrollar $(x + h)^2$

$$=\frac{2xh+h^2}{h}$$

Agrupar los términos semejantes

$$=\frac{h(2x+h)}{h}$$

Factorizar

$$= 2x + h$$

Simplificar

Ejercitación 7C

Escriba una expresión para la pendiente de una recta secante para cada función. Simplifique su expresión.

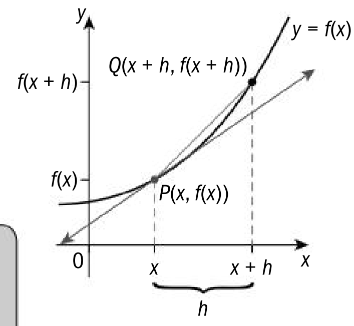
1 $f(x) = 3x + 4$

2 $f(x) = 2x^2 - 1$

3 $f(x) = x^2 + 2x + 3$

Pendiente de una recta tangente y la derivada

Suponga que el punto Q se desliza hacia abajo por la curva y se acerca al punto P. La recta secante PQ se acercará a la recta tangente en el punto P. A medida que Q se acerca a P, h se acerca a 0. Podemos tomar el límite cuando h tiende a 0 de la pendiente de la recta secante, para obtener la pendiente de la recta tangente:



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ no es una constante. Es una función que da la pendiente de f en x.

➔ La función definida por el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se conoce como la **derivada** de f. La derivada es definida por $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ o $\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$f'(x)$ se lee "derivada de f", o "f prima de x". $\frac{dy}{dx}$ se lee "derivada de y con respecto a x". Recordemos que la pendiente es $\frac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x}$. Esto se expresa como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ejemplo 4

Halle la derivada de $f(x) = x^2 + 1$ y a partir de lo anterior, halle la pendiente de la recta tangente cuando $x = 3$.

Respuesta

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2+1\right]-\left(x^2+1\right)}{h}$$

Simplificar el cociente como se muestra en el ejemplo 3

$$=\lim_{h\to 0}\left(2x+h\right)=2x+0$$

Evaluar el límite reemplazando h por 0

$$f'(x)=2x$$

$$f'(3)=2(3)=6$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente cuando $x = 3$ es 6.

La derivada, $f'(x) = 2x$, es una función que da la pendiente de la curva $f(x) = x^2 + 1$ para cualquier valor de x.

Ejercitación 7D

Use la definición de derivada para hallar la derivada de f y a partir de ahí, halle la pendiente de la recta tangente en el valor de x dado.

1 $f(x) = 2x - 3$; $x = 2$

2 $f(x) = 3x^2 + 2x$; $x = -3$

3 $f(x) = x^2 - x + 2$; $x = 1$

Algunas reglas de derivación

Investigación: la derivada de $f(x) = x^n$

1 Use la definición de derivada para hallar las derivadas de $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$.

2 Realice una conjetura acerca de la derivada de $f(x) = x^n$. Exprese su conjetura en forma coloquial y como función.

3 Use su conjetura para predecir la derivada de $f(x) = x^5$. Use la definición de derivada para verificar si su predicción fue correcta.

Recuerde que la definición de derivada es: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Hemos investigado solo valores enteros positivos de n, pero la siguiente regla es válida para cualquier número real n.

→ **Regla de la potencia**
Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$, donde $n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5

Use la regla de la potencia para hallar la derivada de cada función:

a $f(x) = x^{12}$ **b** $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ **c** $f(x) = \sqrt{x}$

Respuestas

a $f(x) = x^{12}$ — *Usar la regla de la potencia*

$f'(x) = 12x^{12-1} = 12x^{11}$

b $f(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$ — *Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional*

Usar la regla de la potencia

$f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$ — *Simplificar*

c $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ — *Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional*

$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ — *Usar la regla de la potencia*

$= \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$ o $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ — *Simplificar*

Ejercitación 7E

Halle la derivada de cada función:

1 $f(x) = x^5$ **2** $f(x) = x^8$ **3** $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

4 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **5** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **6** $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$

Usando la regla de la potencia y las siguientes dos reglas podemos hallar las derivadas de muchas funciones. El proceso de hallar la derivada de una función se llama **derivación**.

→ **Regla de la constante**
Si $f(x) = c$, donde c es cualquier número real, entonces $f'(x) = 0$.

Regla de la constante
La derivada de cualquier constante es 0. El gráfico de la función constante $f(x) = c$ es una recta horizontal, que tiene pendiente 0.

→ **Regla de la multiplicación por una constante**
Si $y = cf(x)$, donde c es cualquier número real, entonces $y' = cf'(x)$.

Regla de la multiplicación por una constante
La derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.

→ **Regla de la adición o la sustracción**
Si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, entonces $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Regla de la adición o la sustracción
La derivada de una función que es la suma (o diferencia) de dos o más términos es la suma (o diferencia) de las derivadas de los términos.

Ejemplo 6

Halle la derivada de cada función:

a $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$ **b** $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + 8$

c $f(x) = (x - 2)(x + 4)$ **d** $f(x) = \dfrac{4x^3 + 2x^2 - 3}{x}$

Respuestas

a $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$

$f'(x) = 4\left(3x^{3-1}\right) + 2\left(2x^{2-1}\right) - 0$

$= 12x^2 + 4x$

Hallar la derivada de cada término. Observe que la derivada del término constante es 0.

b $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + 8 = 3x^{\frac{1}{5}} + 8$

Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional

$f'(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} + 0 = \dfrac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

Hallar la derivada de cada término. Observe que la derivada del término constante es 0.

$= \dfrac{3}{5x^{\frac{4}{5}}}$ o $\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$

Simplificar

c $f(x) = (x - 2)(x + 4) = x^2 + 2x - 8$

$f'(x) = 2x^{2-1} + 2 \cdot 1x^{1-1} - 0 = 2x + 2$

Primero desarrollar, para que la función sea una suma o diferencia de términos de la forma ax^n

▶ Continúa en la página siguiente.

d $f(x)=\dfrac{4x^3+2x^2-3}{x}=\dfrac{4x^3}{x}+\dfrac{2x^2}{x}-\dfrac{3}{x}$

$=4x^2+2x-3x^{-1}$

$f'(x)=4\cdot 2x^{2-1}+2\cdot x^{1-1}-3\cdot(-1)\cdot x^{-1-1}$

$=8x+2+3x^{-2}=8x+2+\dfrac{3}{x^2}$

o $\dfrac{8x^3+2x^2+3}{x^2}$

Reescribir, para que la función sea una suma o diferencia de términos de la forma ax^n

Ejercitación 7F

Derive cada función:

1 $f(x)=\dfrac{2}{x^8}$ **2** $f(x)=5$ **3** $f(x)=x^3-\dfrac{3}{x^2}$

4 $f(x)=\pi x^5$ **5** $f(x)=(x-4)^2$ **6** $f(x)=\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}$

7 $f(x)=\dfrac{3}{4x^2}$ **8** $f(x)=\dfrac{3}{(4x)^2}$ **9** $f(x)=12-x^4$

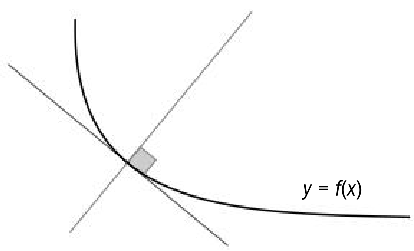
10 $f(x)=\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)$ **11** $f(x)=3x^4-2x^2+5$ **12** $f(x)=2x^2+3x+7$

13 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1$ **14** $f(x)=2x(x^2-3x)$ **15** $f(x)=(x^2+3x)(x-1)$

Ecuaciones de rectas tangentes y normales

La **recta normal** a un punto de una curva es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Recta normal a la curva



Recta tangente a la curva

▲ Las chispas que crea una piedra de pulir son **tangentes** a la rueda.

▲ Los rayos de una rueda de bicicleta son **normales** a la llanta.

Ejemplo 7

Escriba una ecuación para cada recta.

a La recta tangente a la curva $f(x)=x^2+1$ en el punto $(1, 2)$.

b La recta normal a la curva $f(x)=2\sqrt{x}$ cuando $x=9$.

c Las rectas normal y tangente a la curva $f(x)=x+\dfrac{27}{2x^2}$ cuando $x=3$.

d La tangente a $f(x)=x^3-3x^2-13x+15$ que es paralela a la tangente en $(4, -21)$.

▶ Continúa en la página siguiente.

Respuestas	
a $f(x) = x^2 + 1$ $f'(x) = 2x$	*Para hallar la pendiente de la recta tangente, halle la derivada de f y evalúe para x = 1.*
$m_{\text{tangente}} = f'(1)$ $= 2(1)$ $= 2$	
$\therefore y - 2 = 2(x - 1)$	*Use el punto (1, 2) y m = 2 para escribir la ecuación de la recta tangente.*
b $f(x) = 2\sqrt{x}$ $= 2x^{\frac{1}{2}}$	*Escriba de la forma $y = x^n$, con n racional.*
$f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ o $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$m_{\text{tangente}} = f'(9)$ $= \dfrac{1}{\sqrt{9}}$ $= \dfrac{1}{3}$	*Para hallar la pendiente de la recta tangente, halle la derivada de f y evalúe para x = 9.*
$m_{\text{normal}} = -3$	*Puesto que la recta normal es perpendicular a la tangente, halle la pendiente tomando el simétrico del recíproco de la pendiente de la tangente.*
$f(9) = 2\sqrt{9} = 6$	*Halle un punto en la recta normal, hallando el valor de f para x = 9.*
$\therefore y - 6 = -3(x - 9)$	*Use el punto (9, 6) y m = −3 para escribir la ecuación de la tangente.*
c $f(x) = x + \dfrac{27}{2x^2}$ $= x + \dfrac{27}{2}x^{-2}$	*Escriba de la forma $y = x^n$, con n racional.*
$f'(x) = 1 - \dfrac{27}{x^3}$	
$m_{\text{tangente}} = f'(3)$ $= 1 - \dfrac{27}{3^3}$ $= 0$	*Para hallar la pendiente de la tangente, halle la derivada de f y evalúe para x = 3.*
	Dado que la pendiente es 0, la tangente es horizontal, entonces la recta normal debe ser vertical.
$f(3) = 3 + \dfrac{27}{2(3^2)}$ $= \dfrac{9}{2}$	*Halle un punto perteneciente a las rectas, hallando el valor de f para x = 3.*
$\therefore$ La recta normal es $x = 3$ y la recta tangente es $y = \dfrac{9}{2}$.	

El símbolo $\therefore$ significa "por lo tanto".

La ecuación de una recta a la que pertenece el punto (x_1, y_1) con pendiente m es $y - y_1 = m(x - x_1)$. (Véase la sección 3.11 en el capítulo 18.)

Si una recta tiene pendiente m, la pendiente de la recta perpendicular será $\frac{-1}{m}$. (Véase la sección 3.11 en el capítulo 18.)

▶ Continúa en la página siguiente.

d $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$	
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 13$	
$f'(4) = 3(4)^2 - 6(4) - 13$ $= 11$	*Halle la pendiente de la recta tangente cuando x = 4.*
$3x^2 - 6x - 13 = 11$ $3x^2 - 6x - 24 = 0$ $3(x^2 - 2x - 8) = 0$ $3(x-4)(x+2) = 0$ $x = 4, -2$	*Iguale la derivada a 11 para hallar la coordenada x de los puntos con rectas tangentes paralelas.*
	Tenga en cuenta que uno de los valores, x = 4, es la coordenada x del punto de tangencia (4, −21).
	La coordenada x del punto de tangencia para la recta paralela es x = −2.
$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 13(-2)$ $+15$ $= 21$	*Evalúe f en x = −2 para hallar la coordenada y del punto de tangencia.*
$\therefore\ y - 21 = 11(x+2)$	*Use el punto (−2, 21) y m = 11 para escribir la ecuación de la recta tangente.*

Recordemos que las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Ejercitación 7G

1 Halle las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal al gráfico de $f(x) = x^2 - 4x$ en el punto $(3, -3)$. Represente gráficamente la función y las rectas a mano.

2 Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

a $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en $(-3, 4)$ **b** $f(x) = 2\sqrt{x} + 4$ en $x = 1$

c $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x}$ en $(3, 5)$ **d** $f(x) = \sqrt[4]{x} + \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ en $x = 1$

3 Halle la ecuación de la recta normal a la curva en el punto dado.

a $f(x) = 2x^2 - x - 3$ en $(2, 3)$ **b** $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ en $x = -1$

c $f(x) = (2x + 1)^2$ en $(2, 25)$ **d** $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{4}{x^2}$ en $x = 1$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

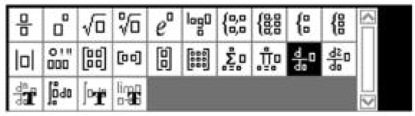
4 Halle las ecuaciones de todas la rectas normales verticales al gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$.

5 La pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x) = 2x^2 + kx - 3$ en $x = -1$ es 1. Halle el valor de k.

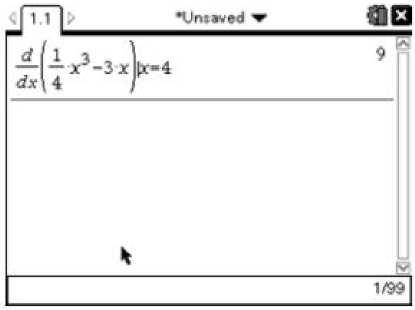
7.3 Más reglas de derivación

Podemos usar una CPG para evaluar una derivada de una función en un valor dado. Sabemos que la derivada de $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ es $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3$ y en consecuencia, $f'(4)=\frac{3}{4}(4)^2-3=9$.

Hacer clic en para ver las plantillas.

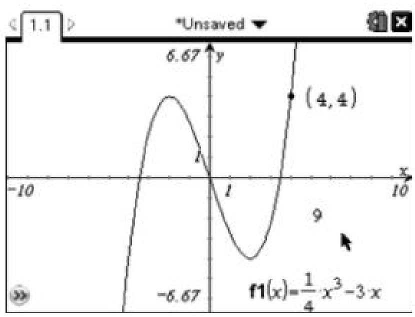


Elegir la plantilla de la derivada primera e ingresar la función, la variable y el valor de x.



Dado que la calculadora usa una recta secante para aproximar el valor de la derivada, este valor no siempre será exacto.

Podemos obtener el gráfico de la función y hallar su derivada presionando menu:

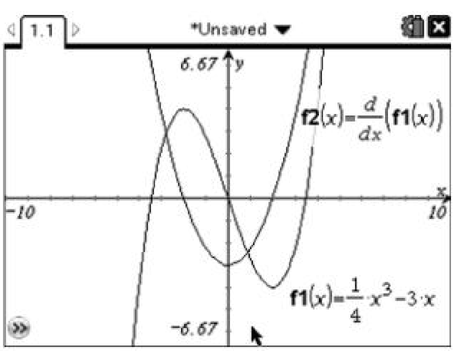


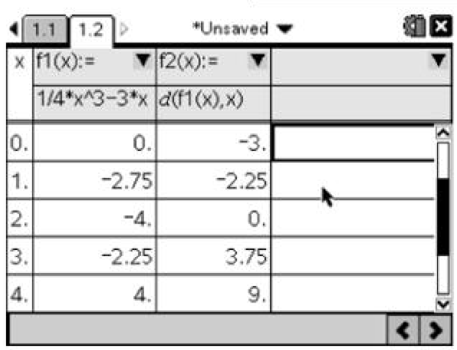
Para hallar la derivada en un valor específico de x, use el menú de contexto del punto para mostrar sus coordenadas, y luego edite la coordenada x.

Analyze Graph (analizar gráfico) | 5:$\frac{dy}{dx}$, y eligiendo el punto en el gráfico.

Se pueden observar los gráficos y las tablas de valores para la función y su derivada. Para obtener el gráfico de f y f', usamos la plantilla de la derivada primera para escribir la función.

En este caso no habrá lugar para ingresar un valor de x. Puede ahorrar tiempo ingresando $f1(x)$ en lugar de reescribir la ecuación.





Investigación: las derivadas de e^x y $\ln x$

1 Use una CPG para obtener el gráfico de $f(x) = e^x$ y la derivada de $f(x) = e^x$. Examine los gráficos y la tabla de valores de las funciones para elaborar una conjetura acerca de la derivada de $f(x) = e^x$.

2 Use una CPG para obtener el gráfico de $f(x) = \ln x$ y la derivada de $f(x) = \ln x$. Examine los gráficos y la tabla de valores de las funciones para elaborar una conjetura acerca de la derivada de $f(x) = \ln x$.

→ **Derivada de e^x**

Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.

→ **Derivada de $\ln x$**

Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Recuerde que $y = e^x$ e $y = \ln x$ son inversas.
$e^{\ln x} = x$
$\ln e^x = x$

Ejemplo 8

Halle la derivada de cada función:

a $f(x) = 3e^x$ **b** $f(x) = x^2 + \ln x$ **c** $f(x) = \ln e^{3x}$

Respuestas

a $f(x) = 3e^x$ $f'(x) = 3 \cdot e^x = 3e^x$	*Usar la regla de la multiplicación por una constante y el dato de que la derivada de e^x es e^x*
b $f(x) = x^2 + \ln x$	*Hallar la derivada de cada término*
$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ o $\frac{2x^2+1}{x}$	*Usar el dato de que la derivada de $\ln x$ es $\frac{1}{x}$*
c $f(x) = \ln e^{3x} = 3x$ $f'(x) = 3$	*Usar el dato de que las funciones son inversas para poder simplificar* *A continuación, buscar la derivada*

La letra e se usa como base de la función exponencial $f(x) = e^x$, en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783).

Ejercitación 7H

Halle la derivada de cada función:

1 $f(x) = 4\ln x$

2 $f(x) = e^x + \sqrt{x}$

3 $f(x) = \ln e^{3x^4} + \ln x$

4 $f(x) = e^{\ln 4x^2} + 3x + 1$

5 $f(x) = 2e^x + \ln x$

6 $f(x) = 5e^x + 4\ln e^x$

Escriba una ecuación para cada recta en las preguntas 7 a 10.

7 La recta tangente a la curva $f(x) = 4e^x - 7$ en $x = \ln 3$

8 La recta normal a la curva $f(x) = \ln\left(e^{x^2}\right)$ en el punto $(-3, 9)$

9 La recta tangente a la curva $f(x) = \ln x$ en $x = e$

10 La recta normal a la curva $f(x) = 2x^2 + e^{\ln x} - 3$ en $x = 2$

¿Cómo se usan las funciones exponenciales en la determinación de la concentración de una droga en el organismo de un paciente?

Halle el valor exacto de la derivada en el valor dado de x en las preguntas **11** y **12** y luego use la CPG para hallar un valor aproximado para controlar su trabajo.

11 Halle $f'(3)$ si $f(x) = 2e^x - 5$.

12 Halle $f'(8)$ si $f(x) = \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Investigación: la derivada del producto de dos funciones

Para los pasos 1–4 sean $u(x) = x^4$, $v(x) = x^7$ y $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

1 La función f puede escribirse como $f(x) = x^n$. Halle n.

2 Halle $f'(x)$.

3 Halle $u'(x)$ y $v'(x)$.

4 Halle $u'(x) \cdot v'(x)$.

5 ¿Es $f'(x)$ igual a $u'(x) \cdot v'(x)$?

6 Usando las tres derivadas halladas en los pasos 2 y 3, rellene los espacios en blanco para establecer una proposición matemática verdadera.

$f'(x) = x^4 \cdot \_\_\_\_\_\_ + x^7 \cdot \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

7 Complete la conjetura.
Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ entonces
$f'(x) = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ + \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_$

8 Use la función $f(x) = (3x + 1)(x^2 - 1)$ para rechazar o confirmar su conjetura del paso 7.

La derivada de la suma de dos funciones es la suma de las derivadas de las dos funciones.
Si $f(x) = u(x) + v(x)$ entonces $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
¿Se podrá aplicar una regla similar a esta para el producto de dos funciones?

La conjetura en la investigación se conoce como la regla del producto. Muchas demostraciones son sencillas y directas, pero la demostración de esta regla requiere del uso de un paso creativo. Puede buscar y analizar la demostración, y hallar un ejemplo del paso ingenioso que se necesita para completar la demostración.

Para funciones como $f(x) = x^4 \cdot x^7$ y $f(x) = (3x + 1)(x^2 - 1)$ se puede reescribir la función y usar la regla de la potencia para tomar la derivada. Pero para otras funciones tales como $f(x) = (3x + 1)(\ln x)$ se necesitaría una regla como la desarrollada en la conjetura para hallar la derivada. Las siguientes reglas se usan para hallar la derivada del producto o del cociente de dos funciones.

Regla del producto
La derivada del producto de dos factores es el primer factor multiplicado por la derivada del segundo más el segundo factor multiplicado por la derivada del primero.
Regla del cociente
La derivada del cociente de dos factores es el denominador multiplicado por la derivada del numerador menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido por el denominador al cuadrado.

➔ **Regla del producto**
Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, entonces $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$.

➔ **Regla del cociente**
Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, entonces $f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Ejemplo 9

Halle la derivada de cada función:

a $f(x) = (3x + 1)(\ln x)$ **b** $f(x) = (x^4 + 3x^3 + 6)(2x - 1)$

c $f(x) = \frac{5x+3}{x^2+1}$ **d** $f(x) = \frac{x+2}{2e^x - 3}$

Respuestas

a $f(x) = \overbrace{(3x+1)}^{\text{primer factor}} \overbrace{(\ln x)}^{\text{segundo factor}}$

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$, donde $u(x) = 3x + 1$ es el primer factor y $v(x) = \ln x$ es el segundo factor.
Aplicar la regla del producto
$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$

$$f'(x) = \overbrace{(3x+1)}^{\substack{\text{primer}\\\text{factor}}} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}^{\substack{\text{derivada}\\\text{del segundo}}} + \overbrace{(\ln x)}^{\substack{\text{segundo}\\\text{factor}}} \cdot \overbrace{(3)}^{\substack{\text{derivada}\\\text{del primero}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{x} + 3\ln x \text{ o } \frac{3x + 1 + 3x\ln x}{x}$$

b $f(x) = \overbrace{(x^4 + 3x^3 + 6)}^{\text{primer factor}} \overbrace{(2x-1)}^{\text{segundo factor}}$

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$, donde $u(x) = x^4 + 3x^3 + 6$ es el primer factor y $v(x) = 2x - 1$ es el segundo factor.
Aplicar la regla del producto
$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$

$$f'(x) = \overbrace{(x^4 + 3x^3 + 6)}^{\substack{\text{primer}\\\text{factor}}} \cdot \overbrace{(2)}^{\substack{\text{derivada}\\\text{del segundo}}} + \overbrace{(2x-1)}^{\substack{\text{segundo}\\\text{factor}}} \cdot \overbrace{(4x^3 + 9x^2)}^{\substack{\text{derivada}\\\text{del primero}}}$$

$$= (2x^4 + 6x^3 + 12) + (8x^4 - 4x^3 + 18x^3 - 9x^2)$$

Desarrollar los paréntesis

$$= 10x^4 + 20x^3 - 9x^2 + 12$$

Simplificar

▶ Continúa en la página siguiente.

c $f(x) = \dfrac{5x+3}{x^2+1}$ $f'(x) = \dfrac{\underbrace{(x^2+1)}_{\text{denominador}} \cdot \underbrace{(5)}_{\text{derivada del numerador}} - \underbrace{(5x+3)}_{\text{numerador}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\text{derivada del denominador}}}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{\text{denominador al cuadrado}}}$	*$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, donde $u(x) = 5x + 3$ es el numerador y $v(x) = x^2 + 1$ es el denominador.* *Aplicar la regla del cociente* $f'(x) = \dfrac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
$= \dfrac{(5x^2+5)-(10x^2+6x)}{(x^2+1)^2}$	*Desarrolle el numerador de modo que pueda agrupar los términos semejantes. No desarrolle el denominador.*
$= \dfrac{-5x^2-6x+5}{(x^2+1)^2}$	*Simplificar*
d $f(x) = \dfrac{x+2}{2e^x-3}$ $f'(x) = \dfrac{\underbrace{(2e^x-3)}_{\text{denominador}} \cdot \underbrace{(1)}_{\text{derivada del numerador}} - \underbrace{(x+2)}_{\text{numerador}} \cdot \underbrace{(2e^x)}_{\text{derivada del denominador}}}{\underbrace{(2e^x-3)^2}_{\text{denominador al cuadrado}}}$	*$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, donde $u(x) = x + 2$ es el numerador y $v(x) = 2e^x - 3$ es el denominador.* *Aplicar la regla del cociente* $f'(x) = \dfrac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
$= \dfrac{(2e^x-3)-(2xe^x+4e^x)}{\left(2e^x-3\right)^2}$ $= \dfrac{-2xe^x-2e^x-3}{\left(2e^x-3\right)^2}$	*Desarrolle el numerador de modo que pueda agrupar los términos semejantes. No desarrolle el denominador.* *Simplificar*

Ejercitación 7I

Halle la derivada de cada función de las preguntas 1 a 8.

1 $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$

2 $f(x) = (2x^3 + x^2 + x)(x^2 + 1)$

3 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

4 $f(x) = e^x \ln x$

5 $f(x) = \dfrac{x-2}{x+4}$

6 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

7 $f(x) = e^x(5x^3 + 4x)$

8 $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^3+1}$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

9 La función $f(x) = xe^x$ tiene una recta tangente horizontal en $x = k$. Halle k.

10 Escriba las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ que son paralelas a la recta $x + 2y = 10$.

Las reglas del producto y del cociente no son necesarias para todos los productos y todos los cocientes. Muchas veces resulta más conveniente reescribir la función antes de derivar.

Ejemplo 10

Halle la derivada. Primero reescriba la función, si resulta más conveniente.

a $f(x) = \sqrt{x}(4x^2 - 2x)$ **b** $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2-2}$

c $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt[3]{x^4}}$ **d** $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{x^2}$

Respuestas

a $f(x) = \sqrt{x}(4x^2 - 2x)$

$= x^{\frac{1}{2}}(4x^2 - 2x)$

$= 4x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$

Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional y desarrollar

$f'(x) = 4 \cdot \dfrac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} - 2 \cdot \dfrac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1}$

$= 10x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$

Utilizar la regla de la multiplicación por una constante y la regla de la potencia para hallar la derivada y simplificar

b $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2-2}$

$f'(x) = \dfrac{(x^2-2)\cdot(3) - (3x+4)\cdot(2x)}{\left(x^2-2\right)^2}$

Utilizar la regla del cociente

$= \dfrac{(3x^2-6) - (6x^2+8x)}{\left(x^2-2\right)^2}$

$= \dfrac{-3x^2-8x-6}{\left(x^2-2\right)^2}$

c $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt[3]{x^4}} = 9x^{-\frac{4}{3}}$

Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional

$f'(x) = 9 \cdot -\dfrac{4}{3} x^{-\frac{4}{3}-1}$

$= -12x^{-\frac{7}{3}} = -\dfrac{12}{x^{\frac{7}{3}}}$

d $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{x^2}$

Reescribir, separando términos y luego escribir de la forma $y = x^n$, con n racional

$= \dfrac{3x^2}{x^2} + \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}$

$= 3 + 2x^{-1} + x^{-2}$

$f'(x) = 0 - 2x^{-2} - 2x^{-3}$

$= \dfrac{-2}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$ o $\dfrac{-2x-2}{x^3}$

Hemos estado usando la notación con primas, $f'(x)$, para denotar derivadas.

Podemos usar la notación de Leibniz, $\dfrac{dy}{dx}$ o $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$, y también podemos usar variables distintas de x e y. La notación $\dfrac{dy}{dx}$ se lee "la derivada de y con respecto a x".

La notación $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ se lee "la derivada de f con respecto a x".

▲ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 –1716), un matemático alemán, debatió con Isaac Newton sobre quién fue el primero en desarrollar el cáculo. Generalmente se acepta que Leibniz y Newton desarrollaron el cálculo simultánea-mente y de manera independiente.

Ejemplo 11

a Halle $\dfrac{d}{dx}[(\ln x)(7x-2)]$.

b Si $s(t)=(4t^2-1)^2$, halle $\dfrac{ds}{dt}$.

c Si $A = \pi r^2$, halle $\left.\dfrac{dA}{dr}\right|_{r=3}$.

Respuestas

a $\dfrac{d}{dx}[(\ln x)(7x-2)]$

$= (\ln x)(7) + (7x-2)\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{7x\ln x + 7x - 2}{x}$

Utilizar la regla del producto para hallar la derivada de (ln x)(7x − 2) con respecto a x

b $s(t)=(4t^2-1)^2$

$= 16t^4 - 8t^2 + 1$

$\dfrac{ds}{dt} = 64t^3 - 16t$

Desarrollar y usar la regla de la potencia para hallar la derivada de s con respecto a t

c $A = \pi r^2$

$\dfrac{dA}{dr} = 2\pi r$

Hallar la derivada de πr^2 con respecto a r

$\left.\dfrac{dA}{dr}\right|_{r=3} = 2\pi(3)$

$= 6\pi$

La barra indica que se evalúe la derivada para r = 3.

Ejercitación 7J

Halle la derivada de cada función en las preguntas 1 a 12. Primero reescriba la función, si resulta más conveniente.

1 $f(x)=\dfrac{2x^3-5x}{3}$

2 $f(x)=(x^2-5)(x^2+5)$

3 $f(x)=2e^x(x^2)$

4 $f(x)=\dfrac{2e^x}{x^2}$

5 $f(x)=e^{\ln x^3}+\dfrac{4}{\sqrt[5]{x^4}}$

6 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

7 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

8 $f(x) = 3x \ln x$

9 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$

10 $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 1)$

11 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$

12 $f(x) = (x^3 - 3x)(2x^2 + 3x + 5)$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

13 Escriba la ecuación de la recta normal al gráfico de $f(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$ en $x = 1$.

14 Escriba la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 \ln x$ en $x = 1$.

15 Si $c(n) = -4{,}5n^2 + 3{,}5n - 2$, halle $\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}n}$.

16 Si $A = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, halle $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}$.

17 Si $v(t) = 2t^2 - t + 1$, halle $\left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

18 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\mathrm{e}^t)(t+3)\right]$ puede escribirse como $\mathrm{e}^t(t + k)$. Halle k.

7.4 La regla de la cadena y derivadas de orden superior

La regla de la potencia sola no dará la derivada correcta de $f(x) = (2 - x)^3$. Esto es porque la función no es una potencia de x, sino más bien una potencia de otra función, $v(x) = 2 - x$. La función f es una función compuesta, $(u \circ v)(x)$ o $u(v(x))$, donde $u(x) = x^3$ y $v(x) = 2 - x$.

El símbolo se utiliza para indicar una función compuesta. Si $u(x) = x^3$ y $v(x) = 2 - x$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= (u \circ v)(x) \\ &= u(v(x)) \\ &= u(2 - x) \\ &= (2 - x)^3 \end{aligned}$$

Investigación: cálculo de la derivada de una función compuesta

1 Sea $f(x) = (2 - x)^3$.

a Desarrolle $f(x) = (2 - x)^3$. Derive cada término para hallar la derivada de f.

b También puede hallar la derivada de $f(x) = (2 - x)^3$ mediante la aplicación de la regla de la potencia a $(2 - x)^3$ y multiplicando por otro factor.
Compare lo siguiente con su respuesta al punto **a** y halle el factor faltante: $f'(x) = 3(2 - x)^2$._____

2 Repita el proceso para $f(x) = (2x + 1)^2$.

a Desarrolle f y halle la derivada.

b Aplique la regla de la potencia a $(2x + 1)^2$ para hallar el factor faltante: $f'(x) = 2(2x + 1)$._____

3 Repita el proceso para $f(x) = (3x^2 + 1)^2$.

a Desarrolle f y halle la derivada.

b Aplique la regla de la potencia a $(3x^2 + 1)^2$ para hallar el factor faltante: $f'(x) = 2(3x^2 + 1)$._____

4 Elabore una conjetura sobre cómo hallar la derivada de una función compuesta.

5 Verifique que su conjetura es válida para $f(x) = (x^4 + x^2)^3$.

Si $u(x) = x^2$ y
$v(x) = 2x + 1$, entonces
$$f(x) = u(v(x)) = u(2x+1) = (2x+1)^2$$

Si $u(x) = x^2$ y
$v(x) = 3x^2 + 1$, entonces
$$f(x) = u(v(x)) = u(3x^2+1) = (3x^2+1)^2$$

Para hallar la derivada de una función compuesta usamos la regla de la cadena.

➔ **Regla de la cadena**
Si $f(x) = u(v(x))$, entonces $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

➔ La regla de la cadena también puede escribirse como:
Si $y = f(u)$, $u = g(x)$ e $y = f(g(x))$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Regla de la cadena
La derivada de una función compuesta es la derivada de la función exterior con respecto a la función interior (la función interior no se modifica) multiplicada por la derivada de la función interior respecto de x.

Ejemplo 12

Cada función está dada en la forma $f(x) = u(v(x))$.
Identifique $u(x)$ y $v(x)$, luego halle la derivada de f.

a $f(x) = 4(5x^3 + 2)^6$ **b** $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$ **c** $f(x) = e^{x^2}$

Respuestas

a $f(x) = 4(5x^3 + 2)^6$

$u(x) = 4x^6$ — *u es la función exterior.*

$v(x) = 5x^3 + 2$ — *v es la función interior.*

$f'(x) = \underbrace{24(5x^3+2)^5}_{\text{derivada de la función exterior respecto de la interior}} \cdot \underbrace{(15x^2)}_{\text{derivada de la función interior respecto de } x}$ — *Aplicar la regla de la cadena*

$= 360x^2(5x^3 + 2)^5$ — *Simplificar*

▶ Continúa en la página siguiente.

b $f(x)=\sqrt{4x^2+1}$	*Escribir de la forma* $y = x^n$, *con n racional*
$=(4x^2+1)^{\frac{1}{2}}$	
$u(x)=x^{\frac{1}{2}}$	*u es la función exterior.*
$v(x)=4x^2+1$	*v es la función interior.*
$f'(x)=\underbrace{\frac{1}{2}(4x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{derivada de la función exterior respecto de la función interior}}\cdot\underbrace{(8x)}_{\text{derivada de la función interior respecto de } x}$	*Aplicar la regla de la cadena*
$=\frac{4x}{(4x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ o $\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$	*Simplificar*
c $f(x)=e^{x^2}$	
$=e^{(x^2)}$	
$u(x)=e^x$	*u es la función exterior.*
$v(x)=x^2$	*v es la función interior.*
$f'(x)=\underbrace{e^{(x^2)}}_{\text{derivada de la función exterior respecto de la función interior}}\cdot\underbrace{(2x)}_{\text{derivada de la función interior respecto de } x}$	*Aplicar la regla de la cadena*
$=2xe^{x^2}$	*Simplificar*

Ejercitación 7K

Cada función está dada en la forma $f(x)=u(v(x))$.
Identifique $u(x)$ y $v(x)$, luego halle la derivada de f.

1 $f(x)=(3x^4+2x)^5$

2 $f(x)=4(2x^2+3x+1)^3$

3 $f(x)=\ln(3x^5)$

4 $f(x)=\sqrt[3]{2x+3}$

5 $f(x)=e^{4x}$

6 $f(x)=(\ln x)^3$

7 $f(x)=(9x+2)^{\frac{2}{3}}$

8 $f(x)=\sqrt[4]{2x^2+3}$

9 $f(x)=5(x^3+3x)^4$

10 $f(x)=e^{4x^3}$

Podemos hallar la derivada de algunas funciones con mayor eficacia volviendo a escribir la función de forma tal que se pueda aplicar la regla de la cadena.

María Agnesi (1718–1799), una matemática italiana, publicó un texto de cálculo que incluía los métodos de cálculo de Isaac Newton and Gottfried Leibniz.
María también estudió curvas de la forma $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$, cuyos gráficos son conocidos como las brujas de Agnesi.
La función $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ en el ejemplo 13 es un ejemplo de ese gráfico.

Ejemplo 13

Use la regla de la cadena para hallar la derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Respuesta

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad =(x^2+1)^{-1}$	*Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional*
$f'(x)=-1(x^2+1)^{-2}\cdot 2x$	*Aplicar la regla de la cadena*
$\quad =-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$	*Simplificar*

Para algunas funciones se debe combinar la regla de la cadena con la regla del producto o del cociente, o puede resultar necesario repetirla.

Ejemplo 14

a $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ **b** $f(x)=e^{2(3x-1)^4}$ **c** $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

Respuestas

a $f(x)=x\sqrt{1-x^2}=x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	*Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional*
$f'(x)=\underbrace{x}_{\text{primer factor}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}_{\text{derivada del segundo factor usando regla de la cadena}}+\underbrace{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{\text{segundo factor}}\cdot\underbrace{1}_{\text{derivada del primer factor}}$	*Aplicar la regla del producto y usar la regla de la cadena para hallar la derivada del segundo factor*
$=\dfrac{-x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	*Simplificar*
$=\dfrac{-x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$	*Hallar el denominador común*
$=\dfrac{-x^2+(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$	
$=\dfrac{1-2x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ o $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$	*Simplificar*
b $f(x)=e^{2(3x-1)^4}$	
$u(x)=e^x$ $\quad v(x)=2(3x-1)^4$	*Se muestran las funciones interior y exterior. Téngase en cuenta que la función interior $v(x) = 2(3x - 1)^4$ es la composición de $2x^4$ y $3x - 1$.*
$f'(x)=\underbrace{e^{2(3x-1)^4}}_{\text{derivada de la función exterior respecto de la funcion interior}}\cdot\underbrace{8(3x-1)^3(3)}_{\text{derivada de la función interior respecto de } x}$ $=24(3x-1)^3e^{2(3x-1)^4}$	*Aplicar la regla de la cadena a f y volver a aplicarla cuando se halla la derivada de la función interior*

▶ Continúa en la página siguiente.

c $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$	
$f'(x)=\underbrace{\dfrac{1}{\dfrac{x}{x^2+1}}}_{\substack{\text{derivada de la}\\ \text{función exterior}\\ \text{con respecto la}\\ \text{función interior}}}\cdot\underbrace{\dfrac{(x^2+1)\cdot 1-x\cdot(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}}_{\substack{\text{derivada de la}\\ \text{función interior}\\ \text{respecto de } x}}$	*Aplicar la regla de la cadena y usar la regla del cociente para hallar la derivada de la función interior*
$=\dfrac{x^2+1}{x}\cdot\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ $=\dfrac{1-x^2}{x(x^2+1)}$	*Simplificar*

Ejercitación 7L

Halle la derivada de cada función en las preguntas 1 a 10.

1 $f(x)=x^2(2x-3)^4$

2 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$

3 $f(x)=\dfrac{4}{x^2+3}$

4 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$

5 $f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}$

6 $f(x)=\ln(1-2x^3)$

7 $f(x)=\ln(\ln x^2)$

8 $f(x)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$

9 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-2}$

10 $f(x)=x^4\sqrt{x^2+3}$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

11 Para la curva $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-2x}$:

a Halle $f'(x)$. **b** Halle $f'(2)$.

c A partir de lo anterior, halle la ecuación de recta tangente a f cuando $x = 2$.

12 Halle la coordenada x del (de los) punto(s) en el gráfico de $f(x)=x^3\ln x$ donde la recta tangente es horizontal.

13 Sean $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $g(x)=1-2x$ y $h(x)=(f\circ g)(x)$.

Halle $h(x)$ y muestre que la pendiente de $h(x)$ es siempre positiva.

14

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
3	1	4	−3	2
4	2	−1	3	4

En la tabla anterior, se muestran los valores de f y g y sus derivadas en $x = 3$ y $x = 4$.

a Halle la pendiente de $(f\circ g)(x)$ cuando $x = 3$.

b Halle la pendiente de $\dfrac{1}{[g(x)]^2}$ cuando $x = 4$.

Derivadas de orden superior

La derivada $f'(x)$ o $\frac{dy}{dx}$ se denomina **derivada primera** de y respecto de x. A veces estamos interesados en la pendiente de la primera derivada. A esto se lo denomina **derivada segunda** de y respecto de x y puede escribirse como $f''(x)$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$. La derivada tercera de y respecto de x puede escribirse como $f'''(x)$ o $\frac{d^3y}{dx^3}$. La derivada segunda y la derivada tercera son ejemplos de **derivadas de orden superior**.

La derivada segunda es la derivada de la derivada primera. Escribir esto como $\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$ nos ayuda a comprender de dónde proviene la notación $\frac{d^2y}{dx^2}$.

La notación con "primas" no resulta útil para derivadas de orden superior al tres. Para esas derivadas escribimos $f^{(n)}(x)$. Por ejemplo, en lugar de escribir $f''''(x)$, anotamos $f^{(4)}(x)$.

Ejemplo 15

a Halle las primeras tres derivadas de $f(x) = x^4 + 3x^2 + x$.

b Si $f'(x) = \sqrt{x^2+4}$, halle $f''(x)$.

c Si $y = 4e^{2x}$, halle $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=1}$.

d Si $s(t) = -16t^2 + 16t + 32$, halle $\frac{d^2s}{dt^2}$.

Respuestas

a

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + x$$
$$f'(x) = 4x^3 + 6x + 1$$
$$f''(x) = 12x^2 + 6$$
$$f'''(x) = 24x$$

Las tres primeras derivadas son: $f'(x)$, $f''(x)$ y $f''(x)$.

b

$$f'(x) = \sqrt{x^2+4}$$
$$= (x^2+4)^{\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Observe que se da la primera derivada, por lo tanto solo necesita derivar una vez para obtener la segunda derivada.

c

$$y = 4e^{2x}$$
$$\frac{dy}{dx} = 4e^{2x} \cdot 2 = 8e^{2x}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8e^{2x} \cdot 2 = 16e^{2x}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 16e^{2x} \cdot 2 = 32e^{2x}$$

Hallar las primeras tres derivadas usando la regla de la cadena

$$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=1} = 32e^{2(1)} = 32e^2$$

Luego evaluar la derivada tercera en $x = 1$

d

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$
$$\frac{ds}{dt} = -32t + 16$$
$$\frac{d^2s}{dt^2} = -32$$

Hallar la primera y la segunda derivada de s respecto de t

Ejercitación 7M

1 Halle la segunda derivada de $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$.

2 Si $f(x) = 3x^5 + x^4 + 2x + 1$, halle $f'''(x)$.

3 Si $C(n) = (3 + 2n)e^{-3n}$, halle $\frac{d^2C}{dn^2}$.

4 Si $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}$, halle $\frac{d^3y}{dx^3}$.

5 Si $\frac{d^4y}{dx^4} = \ln(4x^3)$, halle $\frac{d^6y}{dx^6}$.

6 Si $R(t) = \frac{1}{2}t\ln(t^2)$, halle $\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=-1}$.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

7 ¿Qué puede afirmarse acerca de la enésima derivada de $y = x^3 + 3x^2 + 2x + 4$, para $n \geq 4$?

8 Halle las primeras cuatro derivadas de $y = e^x + e^{-x}$ y luego escriba una generalización para hallar $\frac{d^ny}{dx^n}$ para esta función.

9 Halle las primeras cuatro derivadas de $y = \frac{1}{x}$ y luego escriba una generalización para hallar $\frac{d^ny}{dx^n}$ para esta función.

10 Halle las pendientes de las rectas tangentes a la función $f(x) = 3\sqrt[5]{x^2}$.

7.5 Razones de cambio y movimientos sobre una recta

La derivada nos da la pendiente de una recta tangente a una función. También nos da la razón de variación de una variable respecto de otra variable. En esta sección estudiaremos la **razón de cambio media** y **la razón de cambio instantánea** y los **movimientos sobre una recta**.

Ejemplo 16

Un buzo salta desde un trampolín en el segundo $t = 0$. La distancia del buzo a la superficie del agua en un tiempo t está dada por $s(t) = -4{,}9t^2 + 4{,}9t + 10$, donde s se mide en metros.

a Halle la **velocidad media** del buzo para cada uno de los siguientes intervalos de tiempo.

i $[1, 2]$ **ii** $[1{,}5; 1]$ **iii** $[1{,}1; 1]$ **iv** $[1{,}01; 1]$

b Halle la **velocidad instantánea** del buzo en el segundo $t = 1$.

▶ Continúa en la página siguiente.

Respuestas

a La velocidad media es

$\dfrac{\text{variación de distancia}}{\text{variación de tiempo}}\ \dfrac{\text{(metros)}}{\text{(segundos)}}$

Las unidades para la velocidad son m s^{-1}.

i $\dfrac{s(2)-s(1)}{2-1} = -9{,}8\ \text{ms}^{-1}$

ii $\dfrac{s(1{,}5)-s(1)}{1{,}5-1} = -7{,}35\ \text{ms}^{-1}$

iii $\dfrac{s(1{,}1)-s(1)}{1{,}1-1} = -5{,}39\ \text{ms}^{-1}$

iv $\dfrac{s(1{,}01)-s(1)}{1{,}01-1} = -4{,}949\ \text{ms}^{-1}$

Hallar las pendientes de las rectas secantes $\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ *para cada intervalo. Usar una CPG para evaluar las pendientes.*

b Velocidad instantánea

$v(t) = s'(t)$

$s'(t) = -9{,}8t + 4{,}9$

$s'(1) = -9{,}8 + 4{,}9 = -4{,}9\ \text{ms}^{-1}$

Hallar la pendiente de la recta tangente a s en t = 1

Observe que las pendientes de las rectas secantes del apartado ***a*** *se acercan a la pendiente de la recta tangente del apartado* ***b****.*

La razón de cambio media de s, o la velocidad media, es la pendiente de la recta secante:

$\dfrac{s(t+h)-s(t)}{(t+h)-t} = \dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}$

La razón de cambio instantánea de s, o la velocidad instantánea, es la pendiente de la recta tangente:

$v(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{s(t+h)-s(t)}{h} = s'(t)$

Ejemplo 17

Durante un mes, la temperatura del agua de un estanque se modeliza mediante la función $C(t) = 20 + 9te^{-\frac{t}{3}}$, donde t se mide en días y C se mide en grados Celsius.

a Halle la razón de cambio media de la temperatura en los primeros 15 días del mes.

b Halle la razón de cambio de la temperatura en el día 15.

Respuestas

a Razón de cambio media:

$= \dfrac{C(15)-C(0)}{15-0} \approx 0{,}0606\,°\text{C/día}$

Determinar la pendiente de la recta secante en el intervalo [0, 15]. Las unidades para $\dfrac{\textit{variación de temperatura}}{\textit{variación de tiempo}}$ *son °C/día.*

b Razón de cambio instantánea:

$C'(t) = 9t\left(e^{-\frac{t}{3}} \cdot -\dfrac{1}{3}\right) + e^{-\frac{t}{3}} \cdot 9$

$= -3te^{-\frac{t}{3}} + 9e^{-\frac{t}{3}}$

$C'(15) = -3 \cdot 15e^{-5} + 9e^{-5}$

$= -36e^{-5}$

$\approx -0{,}243\,°\text{C/día}$

En el día 15 la temperatura está descendiendo a razón de 0,243 grados Celsius por día.

Hallar la pendiente de la recta tangente a C en t = 15

Ejercitación 7N

Use una CPG para evaluar los valores de las funciones.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba. Su altura en metros sobre la tierra t segundos después de ser lanzada se modeliza mediante la función $h(t) = -4{,}9t^2 + 19{,}6t + 1{,}4$.

a Halle la altura de la pelota cuando $t = 0$ segundos y cuando $t = 2$ segundos.

b Halle la razón de cambio media de la pelota entre $t = 0$ segundos y $t = 2$ segundos.

c Halle la razón de cambio instantánea de la altura de la pelota cuando $t = 1$ segundo, $t = 2$ segundos y $t = 3$ segundos. Explique qué le dicen estos valores sobre el movimiento de la pelota.

2 La cantidad de agua en un tanque después de t minutos se modeliza mediante la función $V(t) = 4000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2$, donde V se mide en litros.

Responda las siguientes preguntas, aproximando al entero más próximo.

a Halle la cantidad de agua en el tanque cuando $t = 0$ minutos y cuando $t = 20$ minutos.

b Halle la razón de cambio media de la cantidad de agua en el tanque entre $t = 0$ minutos y $t = 20$ minutos. Explique el significado de su respuesta.

c Halle la razón de cambio instantánea de la cantidad de agua en el tanque cuando $t = 20$ minutos. Explique el significado de su respuesta.

d Muestre que la cantidad de agua en el tanque nunca aumenta entre $t = 0$ minutos y $t = 40$ minutos.

3 El número de bacterias en un experimento de ciencias en un día t se modeliza mediante la función $P(t) = 100e^{0{,}25t}$.

a Halle la razón de cambio media del número de bacterias en el intervalo entre los días 0 y 10 del experimento.

b Halle la razón de cambio instantánea del número de bacterias en cualquier tiempo t.

c Halle la razón de cambio instantánea del número de bacterias en el día 10. Explique el significado de su respuesta.

4 El costo (en dólares) de producir n unidades de un producto se modeliza mediante la función $C(n) = 0{,}05n^2 + 10n + 5000$.

a Halle la razón de cambio media de C respecto de n cuando los niveles de producción varían de $n = 100$ unidades a $n = 105$ unidades y cuando los niveles de producción varían de $n = 100$ unidades a $n = 101$ unidades.

b Halle la razón de cambio instantánea de C respecto de n para cualquier número de unidades n.

c Halle la razón de cambio instantánea de C respecto de n cuando $n = 100$ unidades. Explique el significado de su respuesta.

Movimiento sobre una recta

Si un objeto se mueve sobre una recta, su posición respecto del origen en cualquier tiempo t puede modelizarse mediante una **función desplazamiento**, $s(t)$. La función $s(t) = -4{,}9t^2 + 4{,}9t + 10$ del ejemplo 16 es una ejemplo de función desplazamiento. La **posición inicial** del buzo es la posición cuando $t = 0$, o $s(0) = 10$ metros. El origen está a nivel del agua, por lo tanto el buzo está inicialmente en una plataforma a 10 metros por encima del agua.

Podemos usar una recta horizontal o vertical para modelizar el movimiento sobre una recta. Para $s(t) > 0$, el objeto se encuentra a la derecha del origen o por encima del origen. Para $s(t) < 0$, el objeto se encuentra a la izquierda del origen o debajo del origen. La posición inicial es $s(0)$.

➔ La razón de cambio instantánea del desplazamiento es la **función velocidad**, $v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = s'(t)$.

Para $v(t) > 0$, el objeto se mueve a la derecha o hacia arriba. Para $v(t) < 0$, el objeto se mueve hacia la izquierda o hacia abajo. Para $v(t) = 0$, el objeto está en reposo. La **velocidad inicial** es $v(0)$.

Ejemplo 18

Una partícula se desplaza sobre una recta con un desplazamiento de s metros t segundos después de haber dejado un punto fijo. La función desplazamiento está dada por $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$, para $t \geq 0$.

a Halle la velocidad de la partícula para cualquier tiempo t.
b Halle la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula.
c Halle cuándo la partícula está en reposo.
d Halle cuándo la partícula se mueve hacia la izquierda y cuándo la partícula se mueve hacia la derecha.
e Dibuje un diagrama del movimiento de la partícula.

Esta es el área de la Matemática conocida como **cinemática**, que trata sobre el movimiento de objetos.

Respuestas

a $v(t) = s'(t)$

$v(t) = 6t^2 - 42t + 60,\ t \geq 0$

La velocidad es la derivada del desplazamiento.

b $s(0) = 2(0)^3 - 21(0)^2 + 60(0) + 3 = 3\,\text{m}$

La posición inicial es el desplazamiento cuando t = 0.

$v(0) = 6(0)^2 - 42(0) + 60 = 60\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

La velocidad inicial es la velocidad cuando t = 0.

c $6t^2 - 42t + 60 = 0$

$6(t^2 - 7t + 10) = 0$

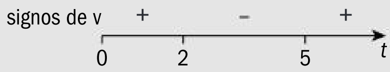
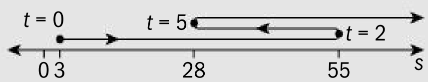
$6(t-2)(t-5) = 0$

$t = 2, 5$

La partícula está en reposo a los 2 segundos y a los 5 segundos.

La partícula está en reposo cuando la velocidad es 0.
Iguale la función velocidad a 0 y resuelva en t.

▶ Continúa en la página siguiente.

d  La partícula se mueve a la derecha para (0,2) y $(5, \infty)$ segundos porque $v(t) > 0$. La partícula se mueve a la izquierda para (2,5) segundos porque $v(t) < 0$.	*Dibuje un diagrama de signos para la velocidad. Marque en el diagrama los valores en los que la partícula está en reposo. Elija un valor de cada intervalo y halle el signo de v(t).* $(0, 2)$ $t = 1$ $v(1) = 6(1-2)(1-5) = (+)(-)(-) = +$ $(2, 5)$ $t = 3$ $v(3) = 6(3-2)(3-5) = (+)(+)(-) = -$ $(5, \infty)$ $t = 6$ $v(6) = 6(6-2)(6-5) = (+)(+)(+) = +$
e $s(2) = 2(2)^3 - 21(2)^2 + 60(2) + 3 = 55\,\text{m}$ $s(5) = 2(5)^3 - 21(5)^2 + 60(5) + 3 = 28\,\text{m}$ 	*Halle el desplazamiento o posición de la partícula cuando la partícula cambia de dirección.* *Use estas posiciones y la posición inicial para trazar el movimiento. Aunque el movimiento es en realidad sobre una recta, lo dibujamos por encima de la recta.*

Ejercitación 70

1 Una partícula se mueve sobre una recta con función desplazamiento $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ centímetros para $t \geq 0$ segundos.

a Halle la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula.

b Halle cuándo la partícula está en reposo.

c Dibuje un diagrama del movimiento de la partícula.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba. La altura de la pelota en pies, t segundos luego de haber sido lanzada, está dada por $s(t) = -16t^2 + 40t + 4$ para $t \geq 0$ segundos.

a Halle la altura inicial de la pelota.

b Muestre que la altura de la pelota 2 segundos luego de haber sido lanzada es de 20 pies.

c Hay un segundo instante en que la altura de la pelota es de 20 pies.

i Escriba una ecuación que debe satisfacer t cuando la altura de la pelota es de 20 pies.

ii Resuelva la ecuación algebraicamente.

d **i** Halle $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

ii Halle la velocidad inicial de la pelota.

iii Halle en qué instante la velocidad de la pelota es 0.

iv Halle la altura máxima de la pelota.

3 Una partícula se mueve sobre una recta con una función desplazamiento $s(t) = \frac{t}{e^t}$, donde s está en metros y t en segundos.

a Muestre que $v(t) = \frac{1-t}{e^t}$.

b A partir de lo anterior, halle el instante en que la partícula está en reposo.

➔ La razón de cambio instantánea de la velocidad es la **función aceleración**, $a(t)=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=v'(t)=s''(t)$.

Para $a(t) > 0$, la velocidad del objeto está aumentando.
Para $a(t) < 0$, la velocidad del objeto está disminuyendo.
Para $a(t) = 0$, la velocidad del objeto es constante.

Ejemplo 19

Para la función desplazamiento del ejemplo 18,
$s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$, con s en metros y $t \geq 0$ segundos,
encontramos que $v(t) = 6t^2 - 42t + 60$.

a Halle la **aceleración media** de la partícula entre $t = 1$ segundos y $t = 4$ segundos.

b Halle la **aceleración instantánea** de la partícula en $t = 3$ segundos. Explique el significado de su respuesta.

Respuestas

a La aceleración media es

$$\frac{\text{variación de velocidad}\ (\mathrm{ms}^{-1})}{\text{variación de tiempo}\ (\text{segundos})}$$

Las unidades para la aceleración son ms^{-2}.

$$\frac{v(4)-v(1)}{4-1}=-12\ \mathrm{m\,s}^{-2}$$

Usar una CPG

b Aceleración instantánea

$a(t) = v'(t)$

$a(t)=v'(t)=12t-42$

$a(3)=-6\,\mathrm{m\,s}^{-2}$

Esto significa que la velocidad decrece 6 metros por segundo por cada segundo en el tiempo 3 segundos.

Observe que una aceleración negativa no significa que un objeto en movimiento está aminorando la marcha. Significa que la velocidad está decreciendo.

La **celeridad** es el valor absoluto de la velocidad. La velocidad nos dice cuán rápido se mueve un objeto **y** la dirección en la que se mueve. La celeridad nos dice solo cuán rápido se mueve. Para determinar si un objeto en movimiento está acelerando o aminorando la marcha, podemos comparar los signos de la velocidad y la aceleración.

Para más información sobre el valor absoluto, véase la sección 2.7 en el capítulo 18.

Investigación: velocidad, aceleración y celeridad

1 Copie y complete las tablas. Recuerde que la aceleración es la variación de velocidad. La celeridad es el valor absoluto de la velocidad.

a La velocidad y la aceleración son ambas positivas.
Sea una aceleración de $2\,m\,s^{-2}$.

Tiempo (segundos)	Velocidad ($m\,s^{-1}$)	Celeridad ($m\,s^{-1}$)
0	10	10
1	12	
2		
3		
4		

b La velocidad es positiva y la aceleración es negativa.
Sea una aceleración de $-2\,m\,s^{-2}$.

Tiempo (segundos)	Velocidad ($m\,s^{-1}$)	Celeridad ($m\,s^{-1}$)
0	10	10
1	8	
2		
3		
4		

c La velocidad y la aceleración son ambas negativas.
Sea una aceleración de $-2\,m\,s^{-2}$.

Tiempo (segundos)	Velocidad ($m\,s^{-1}$)	Celeridad ($m\,s^{-1}$)
0	−10	10
1	−12	
2		
3		
4		

d La velocidad es negativa y la aceleración es positiva.
Sea una aceleración de $2\,m\,s^{-2}$.

Tiempo (segundos)	Velocidad ($m\,s^{-1}$)	Celeridad ($m\,s^{-1}$)
0	−10	10
1	−8	
2		
3		
4		

2 Indique si el objeto está acelerando o aminorando la marcha.

a La velocidad y la aceleración son ambas positivas.
b La velocidad es positiva y la aceleración es negativa.
c La velocidad y la aceleración son ambas negativas.
d La velocidad es negativa y la aceleración es positiva.

3 Complete estas afirmaciones:

a Si la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo, entonces el objeto está _____________.
b Si la velocidad y la aceleración tienen signo opuesto, entonces el objeto está _____________.

> Si la celeridad de un objeto está aumentando, entonces el objeto está acelerando la marcha. Si la celeridad de un objeto está dismimuyendo, entonces el objeto está aminorando la marcha.

Cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo, el objeto está acelerando la marcha.
Cuando la velocidad y la aceleración tienen distinto signo, el objeto está aminorando la marcha.

Ejemplo 20

Para la función desplazamiento del ejemplo 18,
$s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 3$, con s metros y $t \geq 0$ segundos, encontramos que $v(t) = 6t^2 - 42t + 60$ y $a(t) = 12t - 42$.

a Halle la celeridad de la partícula en $t = 3$ segundos y determine si la partícula está acelerando o aminorando la marcha cuando $t = 3$.

b Durante $0 \leq t \leq 10$ segundos, halle los intervalos en los que la partícula está acelerando la marcha y los intervalos en los que la está aminorando.

Respuestas

a $v(3) = 6(3)^2 - 42(3) + 60$
$= -12\,\text{m s}^{-1}$

celeridad $= |-12| = 12\,\text{m s}^{-1}$

$a(3) = 12(3) - 42 = -6\,\text{m s}^{-2}$

La partícula está acelerando la marcha en $t = 3$ segundos dado que $v(t) < 0$ y $a(t) < 0$.

Para hallar la celeridad de la partícula en un instante dado, hallar la velocidad y tomar su valor absoluto

La partícula acelera la marcha en $t = 3$, dado que la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo.

b Compare los signos de la velocidad y la aceleración.

Usar el diagrama de signos de la velocidad del ejemplo 18
Alinear debajo un diagrama de signos para a(t)
Hallar cuándo $a(t)=0$
$12t - 42 = 0 \Rightarrow t = 3{,}5$

signos de v +++++--------+++++++++++
t 0 2 5 10

signos de a ----------++++++++++++++
t 0 3,5 10

Colocar este valor en el intervalo $0 \leq t \leq 10$
Tomar un valor en cada intervalo:
$(0; 3{,}5)$ $t = 1$
$a(1) = 12(1) - 42 = -30$ $(-)$

$(3{,}5; 10)$ $t = 4$
$a(4) = 12(4) - 42 = 6$ $(+)$

La partícula acelera la marcha en el intervalo de $(2; 3{,}5)$ segundos porque $v(t) < 0$ y $a(t) < 0$, y en el intervalo $(5, 10)$ segundos porque $v(t) > 0$ y $a(t) > 0$.
La partícula aminora la marcha en el intervalo $(0, 2)$ segundos porque $v(t) > 0$ y $a(t) < 0$, y en el interval $(3{,}5; 5)$ segundos porque $v(t) < 0$ y $a(t) > 0$.

Ejercitación 7P

Use su CPG para evaluar los valores de las funciones.

1 Una partícula se mueve sobre una recta con una función desplazamiento $s(t) = 2t^4 - 6t^2$, en centímetros, para $t \geq 0$ segundos.

- **a** Escriba las expresiones para la velocidad y la aceleración de la partícula en el tiempo t.
- **b** Halle la aceleración en el tiempo $t = 2$ segundos y explique el significado de su respuesta.
- **c** Halle en qué instante la velocidad y la aceleración son nulas. Luego, halle cuándo la partícula acelera y aminora la marcha.

2 Una partícula se mueve a lo largo de una recta con una función desplazamiento $s(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 20$, en metros, para $0 \leq t \leq 8$ segundos.

- **a** Escriba una expresión para la velocidad y la aceleración de la partícula.
- **b** Halle la posición inicial, la velocidad y la aceleración de la partícula.
- **c** Halle cuándo la particula cambia de dirección, en el intervalo $0 \leq t \leq 8$ segundos. Luego halle los intervalos en los que la partícula se mueve hacia la izquierda y hacia la derecha.
- **d** Halle cuándo la aceleración es 0 para $0 \leq t \leq 8$. Luego halle los intervalos en los cuales la particula acelera y aminora la marcha.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Un buzo salta desde una plataforma en el tiempo $t = 0$ segundos. La distancia del buzo sobre el nivel del agua en el tiempo t está dada por $s(t) = -4{,}9t^2 + 4{,}9t + 10$, donde s está en metros.

Vuelva al caso del buzo del ejemplo 16.

- **a** Escriba una expresión para la velocidad y la aceleración del buzo en el tiempo t.
- **b** Halle el instante en el que el buzo alcanza el agua.
- **c** Halle el instante en que la velocidad se anula. A partir de lo anterior, halle la altura máxima que alcanza el buzo.
- **d** Muestre que el buzo está aminorando la marcha en $t = 0{,}3$ segundos.

4 Una partícula se mueve a lo largo de una recta con una función desplazamiento $s(t) = \frac{1}{4}t^2 - \ln(t+1)$, $t \geq 0$, donde s está en metros y t en segundos.

- **a** **i** Escriba una expresión para la velocidad de la partícula en el tiempo t.
  - **ii** A partir de lo anterior, halle en qué instante la partícula está en reposo.
- **b** **i** Escriba una expresión para la aceleración de la partícula en el tiempo t.
  - **ii** A partir de lo anterior, muestre que la velocidad nunca es decreciente.

7.6 La derivada y sus gráficos

Una de las mayores utilidades de las derivadas es el análisis de los gráficos de las funciones. En esta sección veremos cómo relacionar f' y f'' con el gráfico de f.

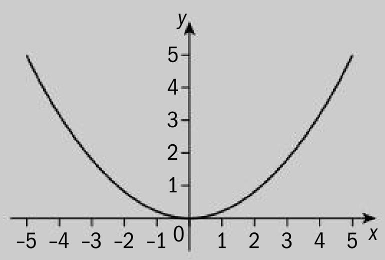
Una función es **creciente** en un intervalo si a medida que aumenta x, también aumenta y. Una función es **decreciente** en un intervalo si a medida que aumenta x, disminuye y.

Aunque el plano cartesiano debe su nombre a René Descartes (matemático francés, 1556–1650), este usó únicamente números positivos y el eje x. A Isaac Newton (matemático inglés, 1642–1727) se le atribuye haber usado por primera vez coordenadas negativas. En su libro *Enumeratio liniearum tertii ordinis* (Enumeración de las curvas de tercer grado), Newton usó ambos ejes, el x y el y, con coordenadas positivas y negativas.

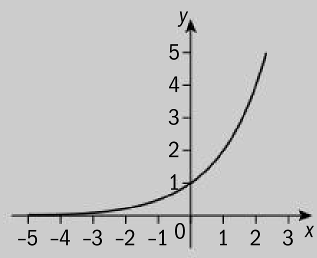
Ejemplo 21

Escriba los intervalos en donde la función es creciente o decreciente.

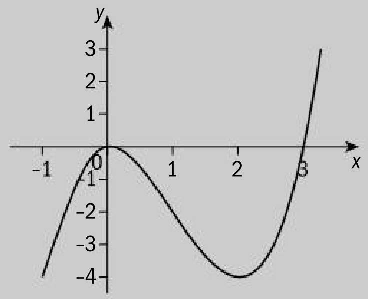
a



b

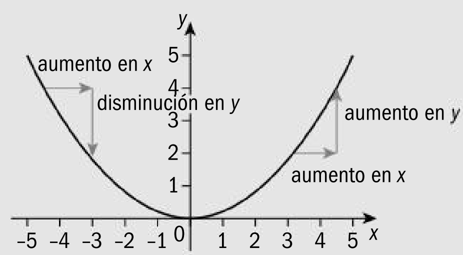


c

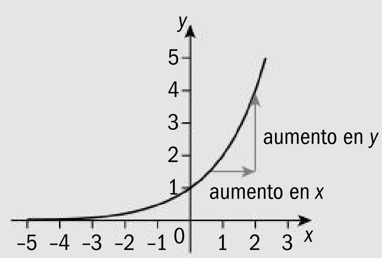


Respuestas

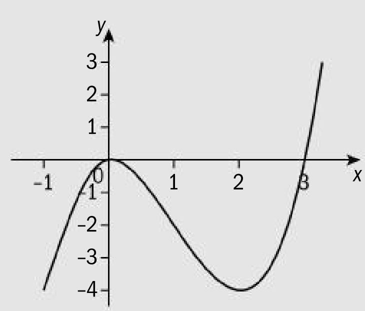
a Decreciente para $x < 0$
Creciente para $x > 0$



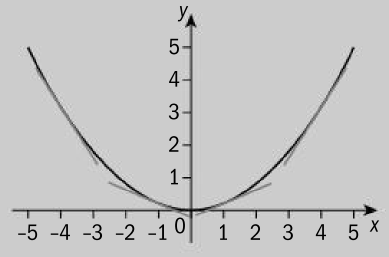
b Creciente para todo número real



c Creciente para $x < 0$ y $x > 2$
Decreciente para $0 < x < 2$



➔ Cuando una función es decreciente, las rectas tangentes a la curva tienen pendientes negativas. Cuando una función es creciente, las rectas tangentes a la curva tienen pendiente positiva. Se deduce que:
Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en (a, b).
Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).



Ejemplo 22

Un **punto estacionario** es un punto donde $f'(x) = 0$. Un **punto crítico** de f es un punto donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida.

Use la derivada de f para hallar los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.

a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **b** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ **c** $f(x) = x^3$

Respuestas

a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

Hallar la derivada de f

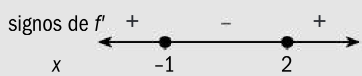
$6x^2 - 6x - 12 = 0$

$6(x^2 - x - 2) = 0$

$6(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2, -1$

Hallar los puntos críticos, igualando f ′(x) a cero y resolviendo en x



Dibujar un diagrama de signos para f ′(x)

f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$, dado que $f'(x) > 0$.
f es decreciente en $(-1, 2)$, dado que $f'(x) < 0$.

Podemos usar notación de intervalos para describir los intervalos.

b $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(2x) - (x^2 - 4)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

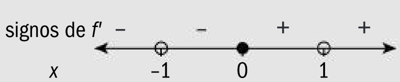
$$= \frac{6x}{(x^2 - 1)^2}$$

Hallar la derivada de f

$f'(x) = 0$: $6x = 0$, $x = 0$

$f'(x)$ no definida: $(x^2 - 1)^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$

Hallar los puntos críticos, igualando f ′ a 0, resolviendo en x, y hallando dónde f ′ no está definida



Dibujar un diagrama de signos para f ′. Observe que f y f ′ no están definidas para x = ±1. Utilizar círculos vacíos en el diagrama de signos para recordar esto.

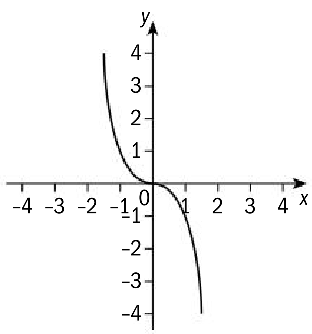
▶ Continúa en la página siguiente.

f es creciente en $(-\infty,-1)$ y $(-1,0)$, dado que $f'(x)>0$. f es decreciente en $(0,1)$ y $(1,\infty)$, dado que $f'(x)<0$.	*No podemos decir que f es creciente en $(-\infty, 0)$ o decreciente en $(0,\infty)$, dado que f no está definida en $x=-1$ ni en $x=1$.*
c $f(x)=x^3$	
$f'(x)=3x^2$	*Hallar la derivada de f*
$3x^2=0$ $x=0$	*Calcular los puntos críticos, igualando f′ a 0 y resolviendo en x*
	*Realizar un diagrama de signos para f′*
f es creciente en $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$.	*Aunque f está definida en $x=0$, no podemos incluir el 0 en el intervalo porque la pendiente es 0 en $x=0$, por lo tanto f(x) no es creciente en $x=0$.*

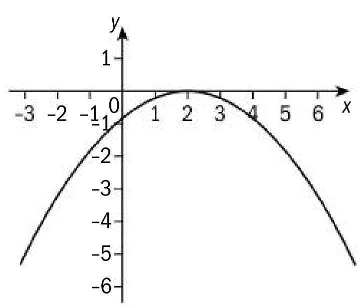
Ejercitación 7Q

Escriba los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.

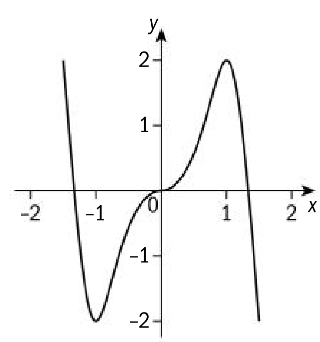
1



2



3



En las preguntas 4 a 9, use la derivada de f para hallar todos los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.

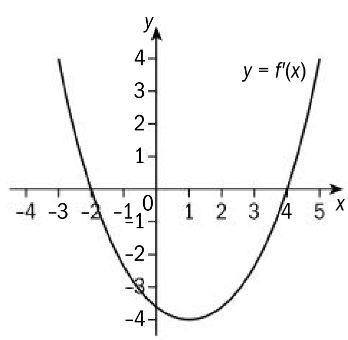
4 $f(x)=x^4$ **5** $f(x)=x^4-2x^2$ **6** $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$

7 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **8** $f(x)=x^3e^x$ **9** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Use una CPG para ver el gráfico de la función y verificar sus resultados.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

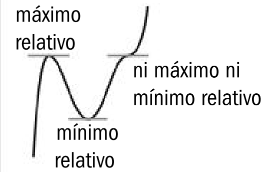
10 Se muestra el gráfico de la *derivada* de f. Escriba los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.



Una función tiene un **punto máximo relativo** (o máximo local) cuando la función pasa de creciente a decreciente.
Una función tiene un **punto mínimo relativo** (o mínimo local) cuando la función pasa de decreciente a creciente.
Los puntos máximos y mínimos relativos se denominan **extremos relativos** de una función.

➔ La **comprobación** (o el criterio) **de la derivada primera** se usa para localizar extremos relativos de f.
Si f está definida en un punto crítico c, entonces:
1 Si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa en $x = c$, f posee un punto máximo relativo en $(c, f(c))$.
2 Si $f'(x)$ pasa de negativa a positiva en $x = c$, f posee un punto mínimo relativo en $(c, f(c))$.

Observe que si $f'(x)$ no cambia de signo en un punto crítico $x = c$, entonces el punto $(c, f(c))$ no es ni máximo ni mínimo relativo.



Ejemplo 23

Use la comprobación de la derivada primera para hallar los extremos relativos para las funciones del ejemplo 22.

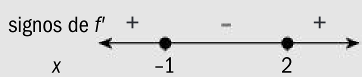
a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **b** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ **c** $f(x) = x^3$

Respuestas

a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x-2)(x+1)$



Usar el diagrama de signos para f′ del ejemplo 22

Dado que $f'(x)$ pasa de positiva a negativa en $x = -1$, hay un máximo relativo en $x = -1$. Dado que $f'(x)$ pasa de negativa a positiva en $x = 2$, hay un mínimo relativo en $x = 2$.

Localizar los extremos relativos observando los cambios de signo de f′

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1)$

$= 7$

$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2)$

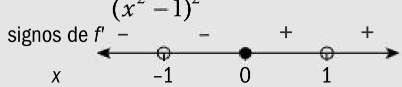
$= -20$

Evaluar f en x = −1 y x = 2 para hallar los valores máximo y mínimo

Por lo tanto, el punto máximo relativo es $(-1, 7)$ y el punto mínimo relativo es $(2, -20)$.

b $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

$f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2-1)^2}$



Dado que $f'(x)$ pasa de negativa a positiva en $x = 0$, hay un mínimo relativo en $x = 0$. $f(0) = \dfrac{0^2-4}{0^2-1} = 4$

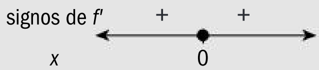
Por lo tanto, el punto mínimo relativo es $(0, 4)$.

No habría extremos relativos en x = −1 y x = 1 incluso si el signo de f′(x) hubiera cambiado, dado que f no está definida en x = −1 ni en x = 1.

▶ Continúa en la página siguiente.

c $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$



f no posee extremos relativos, dado que la derivada no cambia de signo en $x = 0$.

Observe que $f'(x) = 0$ no es condición suficiente para tener un extremo relativo en $x = 0$. Debe además ser cierto que $f'(x)$ cambia de signo en $x = 0$.

Ejercitación 7R

En las preguntas 1 a 8, use la comprobación de la derivada primera para hallar los extremos relativos de cada función.

1 $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$

2 $f(x) = x^3 - 12x - 5$

3 $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$

4 $f(x) = x^4 - 2x^2$

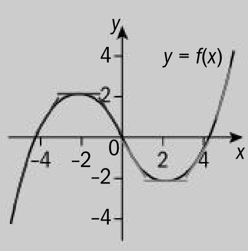
5 $f(x) = x(x + 3)^3$

6 $f(x) = x^2e^{-x}$

7 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

➔ Si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es **cóncava hacia arriba** en (a, b).
Si $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es **cóncava hacia abajo** en (a, b).
Los puntos del gráfico donde cambia la concavidad se llaman **puntos de inflexión**. Un punto en el gráfico de f es un punto de inflexión si $f''(x) = 0$ *y además* $f''(x)$ cambia de signo.



El gráfico es cóncavo hacia abajo para $(-\infty, 0)$. Las pendientes de las rectas tangentes que se muestran a la izquierda del eje y van disminuyendo. Esto significa que f' es decreciente, por lo tanto la derivada f'' es negativa.

El gráfico es cóncavo hacia arriba para $(0, \infty)$. Las pendientes de las rectas tangentes que se muestran a la derecha del eje y van aumentando. Esto significa que f' es creciente, por lo tanto la derivada f'' es positiva.

El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión, dado que f cambia de concavidad en $x = 0$.

Ejemplo 24

Para las funciones del ejemplo 22, use la derivada segunda para hallar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Halle los puntos de inflexión.

a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **b** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ **c** $f(x) = x^3$

Respuestas

a

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f''(x) = 12x - 6$$

Hallar la derivada segunda de f

$$12x - 6 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Hallar dónde f″(x) = 0

signos de f'': $-$ | $+$

x: $\frac{1}{2}$

Realizar un diagrama de signos para f″

f es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ dado que $f''(x) < 0$ y f es cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ dado que $f''(x) > 0$.

Dado que $f''(x)$ cambia de signo en $x = \frac{1}{2}$, hay un punto de inflexion allí.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{2}$$

Evaluar f en $x = \frac{1}{2}$ para hallar la coordenada y del punto de inflexión

Por lo tanto, el punto de inflexión es $\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\right)$.

b

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$
$$f'(x) = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2(6) - (6x)[2(x^2 - 1)(2x)]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

Hallar la derivada segunda de f

$$f''(x) = 0$$
$$\frac{-6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} = 0$$
$$-6(3x^2 + 1) = 0$$
$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

No hay soluciones reales.

$f''(x)$ no está definida:

$$(x^2 - 1)^3 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x = \pm 1$$

Para hacer un diagrama de signos para f″, se debe hallar dónde f″(x) = 0 **y** *dónde f″(x) no está definida.*

signos de f'': $-$ | $+$ | $-$

x: -1, 1

f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, dado que $f''(x) < 0$, y f es cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$, dado que $f''(x) > 0$.

Aunque f″(x) cambia de signo en x = ±1, no hay puntos de inflexión. Esto se debe a que f(x) no está definida para x = ±1. En este caso la concavidad cambia hacia ambos lados de una asíntota vertical.

▶ Continúa en la página siguiente.

c $f(x) = x^3$

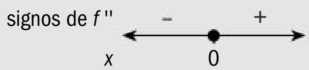
$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$6x = 0$

$x = 0$

Hallar la derivada segunda de f
Hallar dónde $f''(x) = 0$



Realizar un diagrama de signos para f''

f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ dado que $f''(x) < 0$, y f es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ dado que $f''(x) > 0$. Como $f''(x)$ cambia de signo en $x = 0$, existe un punto de inflexión allí.

$f(0) = (0)^3 = 0$

Por ende, el punto de inflexión es $(0, 0)$.

Evaluar f en $x = 0$ para hallar la coordenada y del punto de inflexión

Ejercitación 7S

En las preguntas 1 a 6, use la derivada segunda para hallar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

1 $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$

2 $f(x) = -x^4 + 4x^3$

3 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

4 $f(x) = x^4$

5 $f(x) = 2xe^x$

6 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

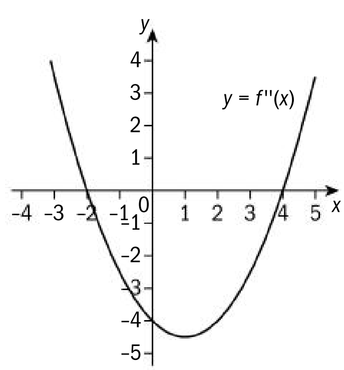
7 Sea $f(x) = \dfrac{24}{x^2 + 12}$.

a Use el dato de que $f'(x) = \dfrac{-48x}{(x^2 + 12)^2}$ para mostrar que la derivada segunda es $f''(x) = \dfrac{144(x^2 - 4)}{(x^2 + 12)^3}$.

b **i** Halle los extremos relativos del gráfico de f.

ii Halle los puntos de inflexión del gráfico de f.

8 Se muestra el gráfico de la *derivada segunda* de f. Escriba los intervalos en los cuales f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Dé las coordenadas x de los puntos de inflexión.



La derivada primera y la derivada segunda de una función nos dan mucha información acerca del gráfico de la función. Podemos incluso usar las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes y las asíntotas para completar el gráfico.

Ejemplo 25

Dibuje aproximadamente el gráfico de cada función. Use la información que encontró en los ejemplos 22 a 24, y las intersecciones con los ejes y las asíntotas como ayuda.

a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **b** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ **c** $f(x) = x^3$

Respuestas

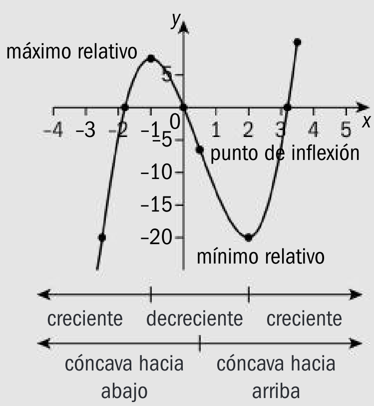
a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

creciente en: $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$
decreciente en: $(-1, 2)$
máximo relativo: $(-1, 7)$
mínimo relativo: $(2, -20)$
cóncava hacia abajo: $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$
cóncava hacia arriba: $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$
punto de inflexión: $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{13}{2}\right)$
raíces: $(0, 0)$, $(-1{,}81; 0)$, $(3{,}31; 0)$
intersección con el eje y: $(0, 0)$

Para hallar las intersecciones con el eje x, igualar la función a 0 y resolver:

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = 0$$
$$x(2x^2 - 3x - 12) = 0$$
$$x = 0 \text{ o } x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-12)}}{2(2)}$$
$$x = 0 \text{ o } x \approx -1{,}81; 3{,}31$$

Para hallar la intersección con el eje y, evaluar f (0)



b $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

creciente en: $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$
decreciente en: $(0, 1)$ y $(1, \infty)$
máximo relativo: $(0, 4)$
cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$
cóncava hacia arriba: $(-1, 1)$
puntos de inflexión: no posee
intersecciones con el eje x: $(2, 0)$, $(-2, 0)$
intersección con el eje y: $(0, 4)$

Para hallar las intersecciones con el eje x, igualar la función a 0 y resolver:

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Para hallar la intersección con el eje y, evaluar f(0)

▶ Continúa en la página siguiente.

asíntotas verticales: $x = \pm 1$

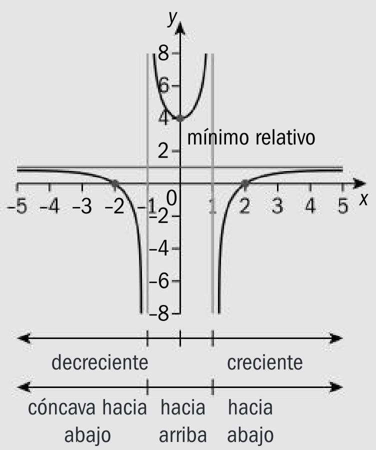
Para hallar las asíntotas, hallar dónde se anula el denominador (verificar que el numerador no es 0 para ese mismo valor):

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

asíntota horizontal: $y = 1$

Aprendimos que la asíntota horizontal de una función de la forma $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *se determina usando los coeficientes principales,* $y = \dfrac{a}{c}$*. Este método funciona para cualquier función racional donde el grado del numerador es igual al grado del denominador.*

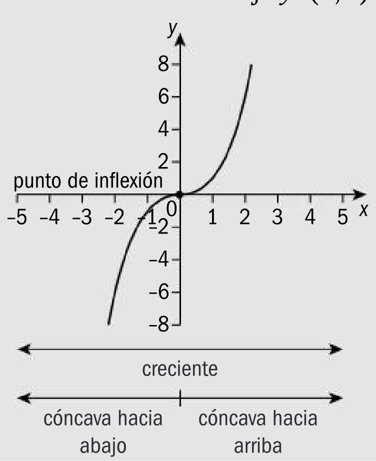
$y = \dfrac{1}{1} \Rightarrow y = 1$



Se puede usar notación de límites para describir las asíntotas. La asíntota horizontal $y = 1$ nos muestra que para valores grandes de x, y se aproxima a 1, y que para valores negativos pequeños de x, y se aproxima a 1. Usando la notación de límite para decir esto, podemos escribir: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
Para la asíntota vertical $x = 1$, a medida que x se aproxima a 1 por la izquierda, y crece rápida e indefinidamente en la dirección positiva de y, y a medida que x se aproxima a 1 por la derecha, y crece rápida e indefinidamente en la dirección negativa de y. Usando límites para expresar esto escribimos: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.
De manera similar, para $x = -1$ escribimos $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$.

c $f(x) = x^3$

creciente en: $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$
extremos relativos: no posee
cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$
cóncava hacia arriba: $(0, \infty)$
punto de inflexión: $(0, 0)$
intersección con el eje x: $(0, 0)$
intersección con el eje y: $(0, 0)$



Ejercitación 7T

En las preguntas 1 a 6 dibuje el gráfico de la función. Use la derivada primera y la derivada segunda para analizar las características claves del gráfico. Halle las intersecciones con los ejes y las asíntotas.

1 $f(x) = 3x^2 + 10x - 8$

2 $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

3 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

4 $f(x) = (3 - x)^4$

5 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

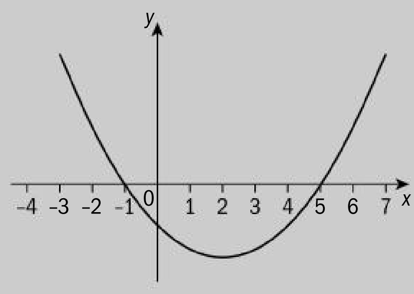
6 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Dado el gráfico de cualquiera de las tres funciones f, f' o f'', se puede dibujar el gráfico de las otras dos funciones.

Ejemplo 26

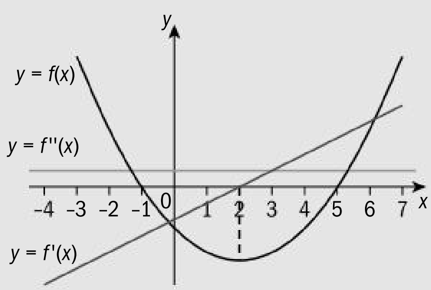
a Sabiendo que el gráfico que se muestra es el gráfico de f, dibuje aproximadamente los gráficos de f' y f''.

b Sabiendo que el gráfico que se muestra es el gráfico de f', dibuje aproximadamente los gráficos de f y f''.



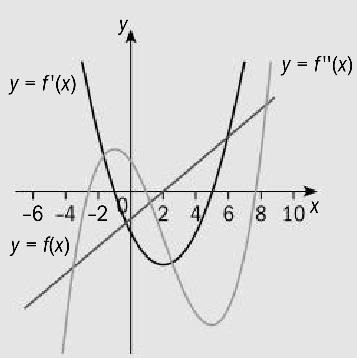
Respuestas

a



El gráfico de f pasa de decreciente a creciente y tiene un mínimo relativo en $x = 2$. Esto significa que $f'(x)$ se anula en $x = 2$ y pasa de negativa a positiva.
El gráfico de f es siempre cóncavo hacia arriba. Esto significa que $f''(x)$ es siempre positiva. Dado que $f''(x)$ es la derivada de $f'(x)$, una función lineal, $f''(x)$ debe ser una constante positiva.

b

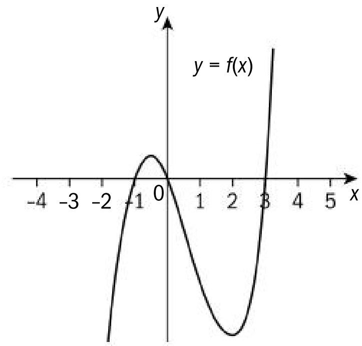


Dado que $f'(x)$ se anula cuando $x = -1$ y pasa de positiva a negativa, el gráfico de f tiene un punto máximo relativo en $x = -1$.
Dado que $f'(x)$ se anula cuando $x = 5$ y pasa de negativa a positiva, el gráfico de f tiene un punto mínimo relativo en $x = 5$.
Dado que $f'(x)$ tiene un mínimo relativo cuando $x = 2$, el gráfico de $f''(x)$ se anula cuando $x = 2$. Como f es cóncava hacia abajo para $x < 2$, $f''(x)$ es negativa para $x < 2$. Como f es cóncava hacia arriba para $x > 2$, $f''(x)$ es positiva para $x > 2$.

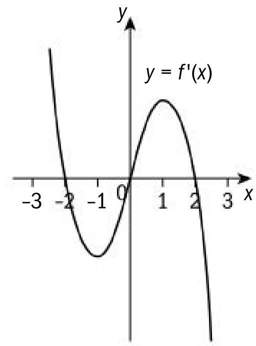
Ejercitación 7U

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

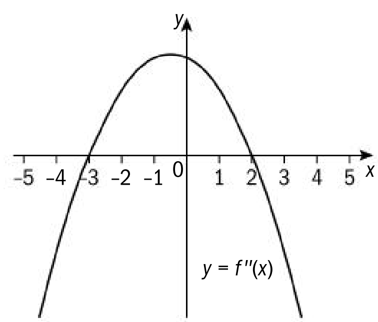
1 Se da el gráfico de $y = f(x)$.
Dibuje aproximadamente los gráficos de $y = f'(x)$ e $y = f''(x)$.



2 Se da el gráfico de la derivada de f, $y = f'(x)$.
Dibuje aproximadamente los gráficos de $y = f(x)$ e $y = f''(x)$.



3 Se presenta el gráfico de la derivada segunda de f, $y = f''(x)$. Dibuje aproximadamente los gráficos de $y = f(x)$ e $y = f'(x)$.

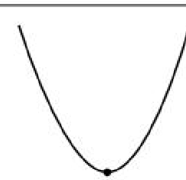


7.7 Más sobre extremos y problemas de optimización

Hemos visto cómo usar la derivada segunda para determinar la concavidad y los puntos de inflexión del gráfico de una función. La derivada segunda de una función puede también usarse para hallar extremos relativos. A este proceso se lo denomina **comprobación** (o criterio) **de la derivada segunda**.

Véase la sección 2.6 en el capítulo 17.

Si $f''(c) > 0$ cerca de c, entonces f es cóncava hacia arriba cerca de c. Por ende, f posee un mínimo relativo.



Si $f''(c) < 0$ cerca de c, entonces f es cóncava hacia abajo cerca de c. Por ende, f posee un máximo relativo.

Comprobación de la derivada segunda

Si $f'(c) = 0$ y la segunda derivada de f existe cerca de c, entonces:

1 Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$.
2 Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.
3 Si $f''(c) = 0$, la comprobación de la derivada segunda falla y se debe usar la comprobación de la derivada primera para localizar los extremos relativos.

Ejemplo 27

Halle los puntos extremos relativos de cada función. Si es posible, use la comprobación de la derivada segunda.

a $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ **b** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

Respuestas

a $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

Hallar la derivada primera y la derivada segunda de f

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$x = 0, 2$

Hallar los valores de x donde la primera derivada se anula

$f''(0) = -6 < 0 \rightarrow$ máximo relativo

$f''(2) = 6 > 0 \rightarrow$ mínimo relativo

Evaluar la derivada segunda en cada cero de la derivada primera

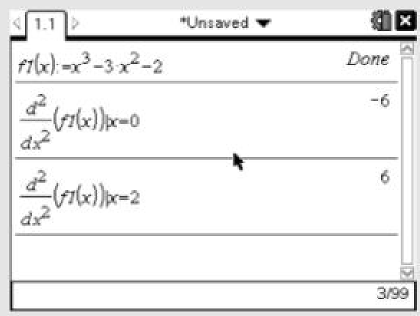
$f'' < 0$ implica un máximo relativo y

$f'' > 0$ implica un mínimo relativo.

$f(0) = -2 \Rightarrow (0,-2)$ es un máximo relativo

$f(2) = -6 \Rightarrow (0,-6)$ es un mínimo relativo

Evaluar dónde ocurren los extremos de la función para hallar los valores de los máximos y mínimos relativos



b $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x+1)(x-1)$

$f''(x) = 60x^3 - 30x$

Hallar la derivada primera y la derivada segunda de f

$15x^4 - 15x^2 = 0$

$15x^2(x+1)(x-1) = 0$

$x = 0, \pm 1$

Hallar los valores de x donde la derivada primera se anula

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ falla la comprobación de la derivada segunda

$f''(-1) = -30 < 0 \rightarrow$ máximo relativo

$f''(1) = 30 > 0 \rightarrow$ mínimo relativo

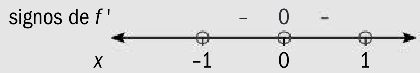
Evaluar la derivada segunda en cada cero de la derivada primera

$f'' = 0$ implica que la comprobación de la derivada segunda falla.

$f'' < 0$ implica un máximo relativo, y

$f'' > 0$ implica un mínimo relativo.

▶ Continúa en la página siguiente.



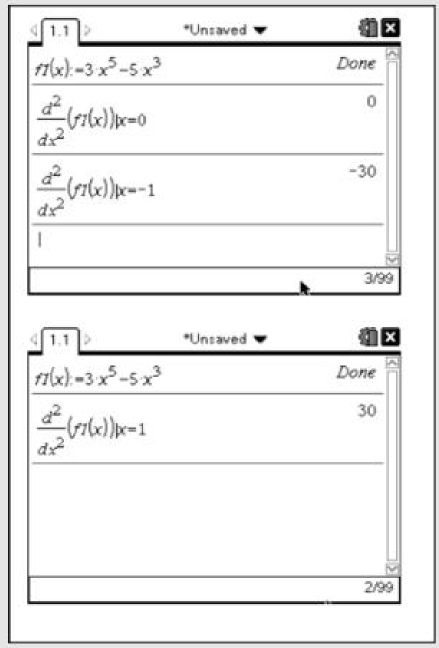
Dado que no hay cambio de signo en f' en $x = 0$, no existe mínimo o máximo relativo en ese punto.

Dado que la comprobación de la derivada segunda falla en x = 0, usar la comprobación de la derivada primera para ver si el signo de f ′ cambia en x = 0

$f(-1) = 2 \Rightarrow$ $(-1, 2)$ es un máximo relativo

$f(1) = -2 \Rightarrow$ $(1, -2)$ es un mínimo relativo

Evaluar la función en los extremos relativos para hallar los valores máximos y mínimos relativos



Ejercitación 7V

Halle los puntos extremos relativos de cada función. Use la comprobación de la derivada segunda cada vez que sea posible.

1 $f(x) = 3x^2 - 18x - 48$ **2** $f(x) = (x^2 - 1)^2$

3 $f(x) = x^4 - 4x^3$ **4** $f(x) = xe^x$

5 $f(x) = (x - 1)^4$ **6** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

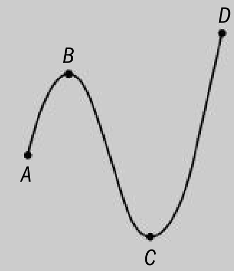
Hemos estado hallando los extremos relativos o locales de funciones. También podemos hallar los **extremos absolutos o globales** de una función. Los extremos absolutos son el valor máximo y el mínimo de la función a lo largo de todo su dominio. Los extremos absolutos de una función se producen ya sea en alguno de los extremos relativos o bien en alguno de los extremos de la función.

Los extremos relativos de una función son el valor máximo y el mínimo de una función en un intervalo cercano al punto crítico. Los extremos relativos nunca ocurren en los extremos de una función.

Ejemplo 28

a Identifique cada punto rotulado como un máximo o mínimo absoluto, un máximo o mínimo relativo, o ninguno de ellos.

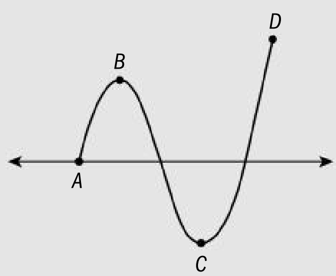
b Halle el máximo y el mínimo absoluto para $f(x) = x^2 - 2x$ en $-1 \le x \le 2$.



Respuestas

a *A* no es un punto extremo de ningún tipo.

Los puntos del gráfico por encima de la recta horizontal tienen valores mayores que el valor de la función en A y aquellos que están por debajo del eje tienen valores inferiores a los de la función en A. Por lo tanto, A no es ni máximo absoluto ni mínimo absoluto.
A no puede ser extremo relativo puesto que es un extremo de la función.



B es un máximo relativo.

B no puede ser un máximo absoluto ya que hay valores de la función que son mayores que el valor de la función en B.

C es un mínimo absoluto y un mínimo relativo.

C es un mínimo absoluto dado que el valor de la función en C es el menor valor de la función en todo su dominio.

D es un máximo absoluto.

El valor de la función en D es el mayor valor de la función en todo su dominio.

b $f(x) = x^2 - 2x$ en $-1 \le x \le 2$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

Hallar los puntos críticos donde $f'(x) = 0$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$$f(2) = (2)^2 - 2(2) = 0$$

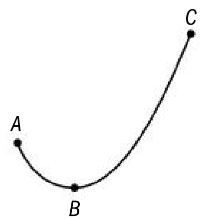
Evaluar la función en los extremos y en los puntos críticos del intervalo. El mayor valor es el máximo y el menor es el mínimo.

El máximo absoluto de $f(x) = x^2 - 2x$ en $-1 \le x \le 2$ es 3 y el mínimo absoluto es -1.

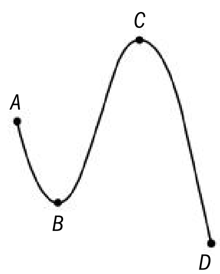
Ejercitación 7W

Identifique cada punto rotulado en las preguntas 1 y 2 como un máximo o mínimo absoluto, un máximo o mínimo relativo, o ninguna de las dos cosas.

1



2



Halle el máximo y el mínimo absoluto de la función en el intervalo dado.

3 $f(x) = (x - 2)^3$ en $0 \leq x \leq 4$

4 $f(x) = 8x - x^2$ en $-1 \leq x \leq 7$

5 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ en $-1 \leq x \leq 2$

Muchos problemas prácticos requieren que hallemos valores máximos o mínimos. Por ejemplo, quizás querramos maximizar un área o minimizar un costo. Tales problemas se denominan **problemas de optimización**.

➔ Para los problemas de optimización:

1. Asigne variables a las cantidades dadas y a las cantidades que deben determinarse. Cuando sea posible, dibuje un diagrama.
2. Escriba una fórmula de la función que va a ser **optimizada** (minimizada o maximizada), en función de dos variables.
3. Halle los valores que resulten sensatos o factibles dentro del contexto del problema donde la derivada de la función que va a ser optimizada se anule (sea igual a 0).
4. Verifique que realmente sea un máximo o un mínimo usando la comprobación de la derivada primera o de la derivada segunda. Si el dominio es tal que $a \leq x \leq b$, recuerde que deben verificarse los extremos, dado que el máximo o el mínimo en un intervalo cerrado pueden ocurrir cuando $f'(x) = 0$ o en un extremo del intervalo.

Ejemplo 29

El producto de dos números positivos es 48. Halle los dos números tales que la suma del primero más el triple del segundo sea mínima.

Respuesta

x = el primer entero positivo
y = el segundo entero positivo

Asignar variables a las cantidades que se van a determinar

$S = x + 3y$

Escribir una función para la suma, la cantidad que va a ser minimizada

$$xy = 48 \Rightarrow y = \frac{48}{x}$$

$$S = x + 3\left(\frac{48}{x}\right) = x + \frac{144}{x}$$

Usar la otra información dada para reescribir la función para la suma usando solamente dos variables

$$S'(x) = 1 - \frac{144}{x^2}$$

$$1 - \frac{144}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12$$

Hallar la derivada de la función que va a ser minimizada y luego determinar los puntos críticos, donde la derivada se anula

Dado que los números son positivos, consideramos únicamente $x = 12$.

$$S''(x) = \frac{288}{x^3}$$

$$S''(12) = \frac{288}{12^3} > 0 \rightarrow \text{mínimo relativo}$$

Usar la comprobación de la derivada segunda para verificar que el valor crítico 12 da un mínimo
Observe que se podría usar también la comprobación de la derivada primera.

$$y = \frac{48}{x} \Rightarrow y = \frac{48}{12} = 4$$

Hallar el segundo número

Los números son 12 y 4.

Ejemplo 30

Una parcela rectangular para tierras de cultivo está encerrada por un vallado de 180 m en tres de sus lados. El cuarto lado de la parcela es una pared de piedra. Halle las dimensiones de la parcela que encierran el área máxima. Halle el área máxima.

Respuesta

Elaborar un diagrama y asignar variables a las cantidades que se van a determinar

$A = la$

Escribir una función para el área, la cantidad que va a ser maximizada

$2a + l = 180 \Rightarrow l = 180 - 2a$
$A = (180 - 2a)a = 180a - 2a^2$

Usar la otra información dada para reescribir la función para el área usando solamente dos variables

$$A'(a) = 180 - 4a$$

$$180 - 4a = 0$$

$$a = 45$$

Hallar la derivada de la función que va a ser minimizada y luego determinar los puntos críticos, donde la derivada se anula

▶ Continúa en la página siguiente.

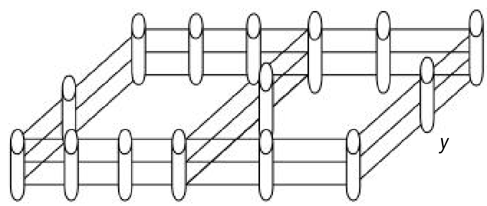
$A''(a) = -4$ $A''(45) = -4 < 0 \rightarrow$ máximo relativo	*Usar la comprobación de la derivada segunda para verificar que el valor crítico 45 da un máximo*
$l = 180 - 2a \Rightarrow$ $l = 180 - 2(45) = 90$ $A = 90(45) = 4050$ Una parcela de 45 m por 90 m tendrá el área máxima de 4050 m^2.	*Hallar la longitud y el área*

Ejercitación 7X

1 La suma de dos números positivos es 20. Halle los dos números que maximicen la suma del primero más la raíz cuadrada del segundo.

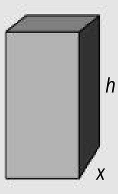
2 La suma de un número positivo y el doble de un segundo número positivo es 200. Halle los dos números tales que su producto sea máximo.

3 Un corral rectangular se parte en dos secciones y se construye utilizando 400 pies de alambrado, como se muestra en la figura. ¿Qué dimensiones deberían usarse para que el área resulte máxima?



Ejemplo 31

Halle las dimensiones de una caja sin tapa con base cuadrada y área total de 192 centímetros cuadrados que tenga el máximo volumen.

Respuesta	
	*Dibujar un diagrama y asignar variables a las cantidades que van a ser determinadas*
	Escribir una función para el volumen, la cantidad que va a ser maximizada
$V = x^2 h$ $x^2 + 4xh = 192$ $h = \dfrac{192 - x^2}{4x}$	*Dado que la caja no tiene tapa, la superficie total es la suma del área del cuadrado de la base, x^2, y el área de las cuatro caras laterales, 4xh.*
$V(x) = x^2\left(\dfrac{192 - x^2}{4x}\right)$ $= 48x - \dfrac{1}{4}x^3$	*Usar esto para reescribir la fórmula de la función empleando solamente dos variables*

▶ Continúa en la página siguiente.

$V'(x) = 48 - \frac{3}{4}x^2$ $48 - \frac{3}{4}x^2 = 0$ $\frac{3}{4}x^2 = 48$ $x^2 = 64$ $x = \pm 8$ El valor crítico factible es $x = 8$.	*Hallar la derivada de la función que va a ser maximizada y luego hallar los puntos críticos donde la derivada se anula*
$V''(x) = -\frac{3}{2}x$ $V''(8) = -\frac{3}{2}(8) = -12 < 0$ $\rightarrow$ máximo relativo	*Usar la comprobación de la derivada segunda para verificar que el valor crítico 8 da un máximo*
$h = \frac{192 - x^2}{4x} \Rightarrow h = \frac{192 - 8^2}{4(8)} = 4$ Las dimensiones de la caja con área máxima son 8 cm por 8 cm por 4 cm.	*Hallar la altura de la caja*

Ejemplo 32

El costo de pedido y almacenaje de x unidades de un producto es $C(x) = x + \frac{10\,000}{x}$. Un camión de reparto puede entregar un máximo de 200 unidades por pedido. Halle qué cantidad de unidades del producto se deben pedir para minimizar el costo.

Respuesta $C(x) = x + \frac{10\,000}{x}$ donde x es el número de unidades.	*C es la función que va a ser minimizada.*
$C'(x) = 1 - \frac{10\,000}{x^2}$ $1 - \frac{10\,000}{x^2} = 0$ $\frac{10\,000}{x^2} = 1$ $x^2 = 10\,000$ $x = \pm 100$	*Hallar la derivada de la función que va a ser minimizada para determinar los valores críticos donde la derivada se anula*
El valor crítico factible es $x = 100$. Dado que el pedido debe incluir al menos una unidad pero no más de 200, necesitamos hallar el mínimo absoluto en $1 \le x \le 200$.	*Dado que la función está definida en un intervalo cerrado, los extremos y los ceros de la derivada en el intervalo deben ser tenidos en cuenta para el valor mínimo absoluto.*

▶ Continúa en la página siguiente.

$C(1) = 1 + \dfrac{10\,000}{1} = 10\,001$ $C(100) = 100 + \dfrac{10\,000}{100} = 200 \leftarrow$ costo mínimo $C(200) = 200 + \dfrac{10\,000}{200} = 250$ El costo mínimo ocurre cuando hay 100 unidades.	

Ejercitación 7Y

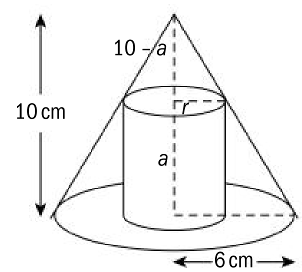
1 Una caja sin tapa con base cuadrada tiene un volumen de 32 000 cm^3.
Halle las dimensiones de la caja que minimizan el área de su superficie.

2 Suponga que el costo medio de producir x unidades de un artículo está dado por $C(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30$. Si lo máximo que se puede producir son 10 artículos por día, ¿cuántos artículos se deberían producir para minimizar el costo diario?

3 Una partícula se mueve sobre una recta horizontal de forma tal que su posición desde el origen en un tiempo t está dada por $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 10$ en $0 \le t \le 7$.
Halle la distancia máxima entre la partícula y el origen.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Se inscribe un cilindro en un cono de 6 cm de radio y 10 cm de altura.



- **a** Halle una expresión para r, el radio del cilindro, en función de a, la altura del cilindro.
- **b** Halle una expresión para el volumen, V, del cilindro, en función de a.
- **c** Halle $\dfrac{dV}{da}$ y $\dfrac{d^2V}{da^2}$.
- **d** A partir de lo anterior, halle el radio y la altura del cilindro con volumen máximo.

5 Sea x el número de miles de unidades producidas de cierto artículo. Los ingresos por vender x unidades están dados por $r(x) = 4\sqrt{x}$ y el costo de producir x unidades es $c(x) = 2x^2$.

- **a** La función ganancia $p(x) = r(x) - c(x)$. Escriba una expresión para $p(x)$ en función de x.
- **b** Halle $\dfrac{dp}{dx}$ y $\dfrac{d^2p}{dx^2}$.
- **c** A partir de lo anterior, halle el número de unidades que deberían producirse para maximizar la ganancia.

Ejercicio de revisión

1 Derive con respecto a x.

a $4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ **b** $\sqrt[3]{x^4}$ **c** $\dfrac{3}{x^4}$

d $(x^2 - 1)(2x^3 - x^2 + x)$ **e** $\dfrac{x-4}{x+7}$ **f** e^{4x}

g $(x^3+1)^4$ **h** $\ln(2x+3)$ **i** $\frac{\ln x}{x^2}$

j $\frac{4x^2-2x}{6}$ **k** $(3x^2+1)(e^x)$ **l** $\frac{2e^x}{e^x-3}$

m $3\sqrt{2x-5}$ **n** $x^2 e^{2x}$ **o** $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 Sea $f(x) = 2x^3 - 6x$.

a Desarrolle $(x+h)^3$.

b Use la fórmula $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para mostrar que la derivada de $f(x)$ es $6x - 6$.

c El gráfico de f es decreciente en $p < x < q$. Halle los valores de p y q.

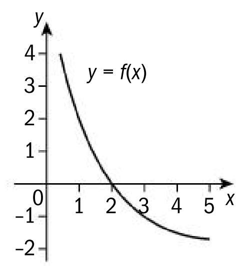
d Escriba $f''(x)$.

e Halle el intervalo en el cual f es cóncava hacia arriba.

3 Halle la ecuación de la normal a la curva $f(x) = 4xe^{x^2-1}$ en el punto $(1, 4)$.

4 Halle las coordenadas del gráfico de $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ en las cuales la recta tangente es paralela a la recta $y = 5x - 2$.

5 Dado el gráfico de $y = f(x)$:



a Escriba $f(2)$, $f'(2)$ y $f''(2)$ y ordene los valores de mayor a menor.

b Justifique su respuesta del apartado **a**.

6 La función de una curva es $y = x^3(x-4)$.

a Halle: **i** $\frac{dy}{dx}$ **ii** $\frac{d^2y}{dx^2}$

b Para esta curva halle:

i Las intersecciones con el eje x **ii** Las coordenadas del punto mínimo relativo

iii Las coordenadas de los puntos de inflexión

c Use sus respuestas de **b** para dibujar aproximadamente un gráfico de la curva, indicando claramente las características que encontró en el apartado **b**.

7 Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal tal que su desplazamiento desde el origen está dado por $s(t) = 20t - 100 \ln t$, $t \geq 1$.

a Halle la función velocidad para s.

b Halle cuándo la partícula se mueve a la izquierda.

c Muestre que la velocidad de la partícula es siempre creciente.

Ejercicio de revisión

1 Use su CPG para examinar cada función gráfica y numéricamente. Halle el límite o indique que no existe.

a $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ **b** $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-2}$ **c** $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ **d** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3}{x-1}$

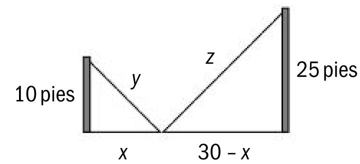
PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Un poste de 10 pies y un poste de 25 pies están separados por una distancia de 30 pies y son perpendiculares al suelo. Se atan cables de medidas y y z desde los topes de los postes hasta una única estaca clavada en la tierra, tal como se muestra en la figura.

a **i** Escriba una expresión para y en función de x.

ii Escriba una expresión para z en función de x.

iii A partir de lo anterior, escriba una expresión para $L(x)$, la longitud total de cable usado para ambos postes.



b **i** Halle $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$.

ii A partir de lo anterior, halle la distancia x a la que la estaca debiera haberse colocado desde el poste de 10 pies para minimizar la cantidad de cable usado.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 7

La recta tangente y la derivada de x^n

- La función definida por $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se conoce como la **derivada** de f. La derivada se define como $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ o $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- **Regla de la potencia**
  Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$, donde $n \in \mathbb{R}$.
- **Regla de la constante**
  Si $f(x) = c$, donde c es cualquier número real, entonces $f'(x) = 0$.
- **Regla de la multiplicación por una constante**
  Si $y = cf(x)$, donde c es cualquier número real, entonces $y' = cf'(x)$.
- **Regla de la adición o la sustracción**
  Si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, entonces $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Más reglas de derivación

- **Derivada de e^x**
  Si $f(x) = \mathrm{e}^x$, entonces $f'(x) = \mathrm{e}^x$.
- **Derivada de $\ln x$**
  Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x)=\frac{1}{x}$.
- **Regla del producto**
  Si $f(x) = u(x)\cdot v(x)$, entonces $f'(x) = u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x)$.
- **Regla del cociente**
  Si $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, entonces $f'(x)=\frac{v(x)\cdot u'(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Continúa en la página siguiente.

La regla de la cadena y derivadas de orden superior

- **La regla de la cadena**
  Si $f(x) = u(v(x))$, entonces $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.
- La regla de la cadena también se puede escribir así:
  Si $y = f(u)$, $u = g(x)$ e $y = f(g(x))$, entonces $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Razones de cambio y movimientos sobre una recta

- La razón de cambio instantánea del desplazamiento es la **función velocidad**,
  $v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = s'(t)$.
- La razón de cambio instantánea de la velocidad es la **función aceleración**,
  $a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v'(t) = s''(t)$.

Las derivadas y sus gráficos

- Cuando una función es decreciente, las rectas tangentes a la curva tienen pendientes negativas. Cuando una función es creciente, las rectas tangentes a la curva tienen pendientes positivas. Se deduce que:
  Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en (a, b).
  Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).
- La **comprobación de la derivada primera** se usa para localizar extremos relativos de f. Si f está definida en un punto crítico c, entonces:
  1. Si $f'(x)$ pasa de positiva a negativa en $x = c$, entonces f tiene un punto máximo relativo en $(c, f(c))$.
  2. Si $f'(x)$ pasa de negativa a positiva en $x = c$, entonces f tiene un punto mínimo relativo en $(c, f(c))$.
- Si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es **cóncava hacia arriba** en (a, b).
  Si $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es **cóncava hacia abajo** en (a, b).
  Los puntos del gráfico donde cambia la concavidad se llaman **puntos de inflexión.**
  Un punto en el gráfico de f es un punto de inflexión si $f''(x) = 0$ *y además* $f''(x)$ cambia de signo.

Más sobre extremos y problemas de optimización

- Para los problemas de optimización:
  1. Asigne variables a las cantidades dadas y a las cantidades que deben determinarse. Cuando sea posible, dibuje un diagrama.
  2. Escriba una fórmula de la función que va a ser **optimizada** (minimizada o maximizada), en función de dos variables.
  3. Halle los valores que resulten sensatos o factibles dentro del contexto del problema donde la derivada de la función optimizada se anule (sea igual a 0).
  4. Verifique que realmente sea un máximo o un mínimo usando la comprobación de la derivada primera o de la derivada segunda. Si el dominio es tal que $a \le x \le b$, recuerde que deben verificarse los extremos, dado que el máximo o el mínimo en un intervalo cerrado pueden ocurrir cuando $f'(x) = 0$ o en un extremo del intervalo.

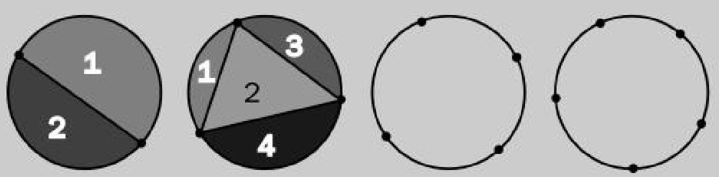
La verdad en matemáticas

El razonamiento inductivo

El **razonamiento inductivo** toma en cuenta casos particulares para llegar a una generalización. Use el razonamiento inductivo para elaborar conjeturas sobre este problema.

1. Copie los círculos y las tablas. Dibuje todas las cuerdas posibles que conecten los puntos de cada circunferencia. Cuente el número de regiones que no se superponen en el interior de cada círculo.

   Anote los resultados en la tabla.



Número de puntos sobre la circunferencia	Número de regiones formadas
2	2
3	4
4	
5	

2. Describa, en palabras, cualquier patrón que observe para el número de regiones formadas.
3. Elabore una conjetura sobre el número de regiones no superpuestas que quedan determinadas al conectar *n* puntos de la circunferencia. Escríbala en forma de expresión matemática.
4. Use su conjetura para predecir el número de regiones formadas cuando se dibujan todas las cuerdas que conectan seis puntos de la circunferencia del círculo.
5. Dibuje un círculo con seis puntos en su circunferencia. Dibuje todas las cuerdas que conectan esos puntos para verificar su conjetura de la pregunta 4.

Ya hemos completado los dos primeros círculos.

Si basa su conjetura sobre el patrón más evidente para el número de regiones formadas, encontrará que no se cumple para $n = 6$.

- ¿Cuántas veces tiene que repetirse un patrón para que sepamos que es verdadero?
- ¿Podemos realmente saber si es siempre verdadero con solo observar el patrón?
- ¿Significa esto que no deberíamos usar nunca el razonamiento inductivo?

El razonamiento deductivo

En la sección 7.1 hemos conjeturado que la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$. Confirmamos que la conjetura se cumplía para $f(x) = x^5$. Podemos emplear el **razonamiento deductivo** para probar la validez de nuestra conjetura.

En el razonamiento deductivo vamos desde lo más general a lo más específico. En matemáticas basamos el razonamiento deductivo en axiomas básicos, definiciones y teoremas.

Usamos la definición de derivada y el teorema del binomio para mostrar que si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aplicar la definición de derivada a $f(x) = x^n$ y luego usar el teorema del binomio para desarrollar $(x + h)^n$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\binom{n}{0}x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1}h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 h^n\right] - x^n}{h}$$

Simplificar donde sea posible

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} xh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} xh^{n-1} + h^n}{h}$$

Agrupar términos semejantes

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1} xh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

Factorizar

$$= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1} xh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

Simplificar

$$= nx^{n-1} + \binom{n}{2}(x^{n-2})(0) + \ldots + \binom{n}{n-1} (x)(0)^{n-2} + (0)^{n-1}$$

Evaluar el límite

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

- ¿Podemos ahora afirmar con certeza que la conjetura será válida para $n \in \mathbb{Z}^+$? ¿Por qué, o por qué no?

Una broma matemática clásica

Un astrónomo, un físico y un matemático viajaban por Gales en tren, cuando vieron una oveja negra en medio del campo.

El astrónomo dijo: "¡*Todas* las ovejas galesas son negras!".

El físico no estuvo de acuerdo: "¡No! ¡*Algunas* ovejas galesas son negras!".

Mientras que el matemático aseveró: "¡En Gales hay al menos un campo que contiene al menos una oveja *con al menos un lado que es negro*!".

- ¿Qué clase de razonamiento estaba usando el matemático?

8 Estadística descriptiva

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

5.1 Población; muestra; muestra aleatoria; datos discretos y continuos; presentación de los datos; distribuciones de frecuencias (tablas); histogramas de frecuencia con intervalos de clase de la misma amplitud; diagramas de caja y bigotes; valores no esperados; datos agrupados: uso de los valores centrales de los intervalos para los cálculos; amplitud del intervalo; límites; clase modal.

5.2 Medidas estadísticas. Medidas de posición central: media, mediana, moda; cuartiles y percentiles. Dispersión: rango, rango intercuartil, varianza, desviación típica.

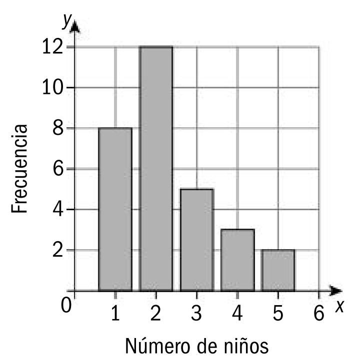
5.3 Frecuencia acumulada; gráficos de frecuencia acumulada.

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Dibujar un gráfico de barras
Por ejemplo: dibujar un gráfico de barras para el número de niños en las familias de 30 alumnos en la siguiente tabla de frecuencia

Niños	*f*
1	8
2	12
3	5
4	3
5	2



2 Hallar la media, la moda y la mediana
Por ejemplo: hallar **a**) la media, **b**) la moda y **c**) la mediana de 2, 3, 3, 5, 6, 7, 9

a Media $= \dfrac{2+3+3+5+6+7+9}{7} = \dfrac{35}{7} = 5$

b Moda = 3

c Mediana = 5

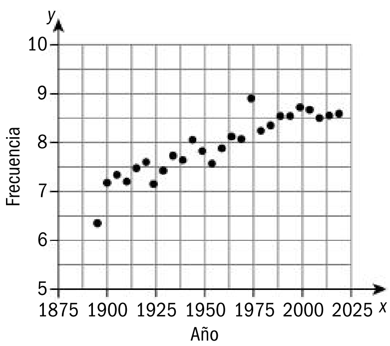
Comprobemos nuestras habilidades

1 Dibuje un gráfico de barras para la siguiente tabla de frecuencias:

Color favorito	*f*
Rojo	6
Azul	8
Rosa	10
Púrpura	9
Negro	4

2 **a** Halle la media de 4, 7, 7, 8, 6.
b Halle la moda de 5, 6, 8, 8, 9.
c Halle la mediana de:
i 6, 4, 8, 7, 11, 2, 4
ii 5, 7, 9, 11, 13, 15
iii 6, 8, 11, 11, 14, 17

Las estadísticas forman parte de la vida cotidiana. Los promedios (media, moda, mediana, etc.) y los gráficos (de barras, de líneas, de sectores, etc.) se usan en todas partes: de los negocios a los deportes, y de la moda a los medios de comunicación. Utilizamos las estadísticas sin darnos cuenta. Cada uno de nosotros probablemente ha hecho alguna afirmación estadística, con el pensamiento o en conversaciones cotidianas. Decir "Duermo en promedio unas ocho horas por noche" o "Es más probable que pase el examen si me preparo de antemano" es hacer ya una afirmación estadística por naturaleza.



La estadística es la ciencia de los datos. Es un conjunto de herramientas que se utilizan para organizar y analizar datos.

Las estadísticas tienen que ver con:

- Diseñar experimentos y otras recolecciones de datos
- Representar y analizar información para facilitar la comprensión
- Sacar conclusiones a partir de los datos
- Realizar estimaciones acerca del presente o predicciones sobre el futuro

En este capítulo se explican estas técnicas y cómo aplicarlas en situaciones reales.

En este capítulo se pueden hacer la mayoría de los cálculos con la calculadora, pero si sabemos hacerlos manualmente, nos ayudará a comprender mejor. Se pone el acento en comprender e intrepretar los resultados obtenidos, en contexto. No se permiten las tablas estadísticas en los exámenes: se deberá usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG).

Investigación: ¿qué debemos hacer con nuestras calificaciones?

Las calificaciones obtenidas por 32 estudiantes en una prueba que se puntuaba con un máximo de 10 puntos son las siguientes:
0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10.

¿Qué debería hacer el profesor con estos datos?
¿Cómo podría organizar los datos para visualizar mejor las calificaciones?
¿Cómo debería mostrar las calificaciones?
¿Debería usar un promedio?
¿Cómo se deberían convertir las calificaciones numéricas a calificaciones con letras?
¿Se puede sacar alguna conclusión a partir de las calificaciones?

8.1 Análisis unidimensional

El **análisis unidimensional** contempla una sola variable, por ejemplo, la altura de todos los estudiantes en la clase. Con estos datos se pueden dibujar gráficos, hallar los promedios y muchas más cosas. La comparación de dos variables, por ejemplo, sus alturas y pesos, se llama **análisis bidimensional**, que se verá en el capítulo 10.

➔ Los **datos** constituyen la información que se obtiene, y se los clasifica en datos **cualitativos** o datos **cuantitativos**.

Datos cualitativos	Datos cuantitativos
Los datos cualitativos determinan categorías y a veces se los llama datos categóricos. Algunas preguntas de las que surgen datos cualitativos son: ¿Cuál es el color de su lapicera preferida? ¿Cómo viaja para ir a la escuela? ¿Cuál es la marca de su computador?	Los datos cuantitativos describen información que puede ser contada o medida. Algunas preguntas de las que surgen datos cuantitativos son: ¿Cuántas lapiceras posee? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a la escuela? ¿Cuántos computadores ha tenido?

▲ Discretos
¿Cuántos pares de zapatos se ven?

Los datos cuantitativos se dividen en dos categorías: **datos discretos** y **datos continuos**.

Los datos de la prueba que vimos anteriormente, ¿son cualitativos o cuantitativos?

➔ Una variable cuantitativa discreta toma valores numéricos exactos.

Aquí trabajamos con **valores de 0, 1, 2, 3,...,** por ejemplo, la cantidad de CD que tenemos o el número de hijos que hay en nuestra familia.

➔ Una variable cuantitativa continua puede ser medida y su precisión depende de la precisión del instrumento de medición utilizado.

▲ Continuos
¿Cuál es la velocidad del tren?

Las variables continuas, tales como la longitud, el peso y el tiempo, pueden tomar valores fraccionarios o decimales.

¿Cuál es la diferencia entre una población y una muestra?

Cuando pensamos en el término **población**, generalmente pensamos en la gente de nuestra ciudad, región, estado o país.

> ➔ En estadística, el término **población** incluye a todos los miembros del grupo que estamos estudiando con el fin de tomar decisiones basadas en datos.

> ➔ Una **muestra** es una parte de la población. Es un subconjunto de la población, una selección de los individuos que la conforman.

Para que una muestra sea **aleatoria**, se deben presentar dos características:

1 Cada individuo tiene la misma posibilidad de ser elegido.

2 La muestra tiene esencialmente las mismas características que la población.

Ejercitación 8A

1 Clasifique cada uno de los siguientes datos en discretos o continuos.

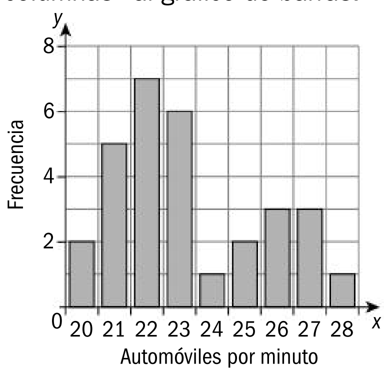
- **a** El número de peces capturado por un pescador
- **b** La longitud del pez
- **c** El tiempo que lleva atrapar un pez
- **d** El número de amigos que el pescador se llevó con él

2 Las calificaciones de los exámenes presentadas al comienzo del capítulo, ¿son datos discretos o continuos?

8.2 Presentación de los datos

Una **tabla de frecuencias** es una manera fácil de visualizar los datos rápidamente y buscar patrones. También podemos mostrar datos discretos en un **gráfico de barras**.

A veces se denomina "gráfico de columnas" al gráfico de barras.



Ejemplo 1

> Un estudiante contó cuántos automóviles pasaron por su casa en intervalos de un minuto, durante 30 minutos. Sus resultados fueron:
> 23, 22, 22, 22, 24, 22, 21, 21, 23, 23, 27, 21, 21, 22, 23, 25, 27, 26, 23, 23, 22, 27, 26, 25, 28, 26, 22, 20, 21, 20.
> Muestre estos datos en una tabla de frecuencias.
> Dibuje un gráfico de barras para estos datos.

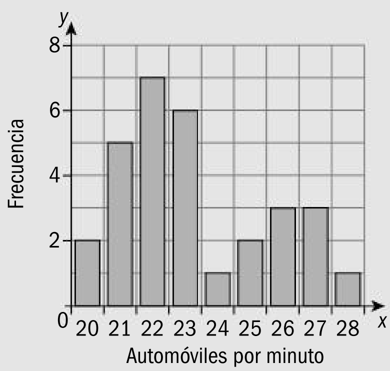
▶ Continúa en la página siguiente.

Respuesta

Número de automóviles por minuto	Conteo	Frecuencia
20	||	2
21	卌	5
22	卌 ||	7
23	卌 |	6
24	|	1
25	||	2
26	|||	3
27	|||	3
28	|	1

Contabilizar cada uno de los datos en la fila correcta
Escribir el total en la columna de frecuencia

El número 21 aparece 5 veces en los datos.



Un diagrama de barras es apropiado para los datos discretos y puede haber espacios entre las barras.

Usar la escala vertical para la frecuencia y la horizontal para el número de automóviles por minuto

→ Cuando tenemos muchos datos, podemos organizarlos en grupos en una **tabla de frecuencias agrupadas**.
Para los datos continuos, se puede dibujar un **histograma**. Es similar a un gráfico de barras, pero no tiene espacios entre las barras.

¿Por qué no hay espacios en los datos continuos?

Ejemplo 2

Las edades de 200 miembros de un club de tenis son:
20, 22, 23, 24, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 26, 28, 28, 29, 29, 29, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 32, 32, 33, 33, 33, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 35, 35, 35, 35, 36, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 46, 46, 46, 46, 46, 46, 46, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 47, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 49, 49, 49, 49, 49, 49, 49, 49, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 52, 52, 52, 52, 52, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 54, 54, 54, 54, 55, 55, 55, 55, 55, 56, 56, 56, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 58, 58, 58, 59, 59, 59, 60, 60, 60, 60, 60, 61, 61, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 63, 64, 64, 64, 64, 65, 65, 68, 69.
Dibuje una tabla de frecuencias agrupadas y el histograma de los datos.

En los exámenes se evaluarán solo los histogramas de frecuencias con intervalos de igual amplitud.

Si tuviésemos una fila para cada edad, ¡nos daría una tabla de 50 filas de datos!

▶ Continúa en la página siguiente.

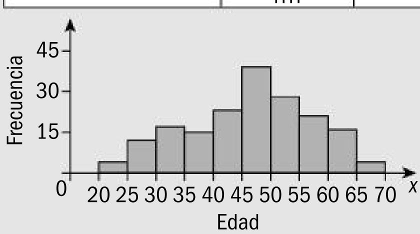
Respuesta

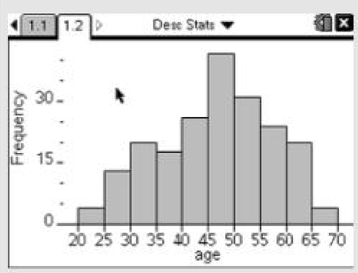
Edad	Conteo	Frecuencia
$20 \le \text{edad} < 25$	||||	4
$25 \le \text{edad} < 30$	𝍸 𝍸 ||	12
$30 \le \text{edad} < 35$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
$35 \le \text{edad} < 40$	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
$40 \le \text{edad} < 45$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26
$45 \le \text{edad} < 50$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	42
$50 \le \text{edad} < 55$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	31
$55 \le \text{edad} < 60$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	24
$60 \le \text{edad} < 65$	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19
$65 \le \text{edad} < 70$	||||	4

Intervalos de igual amplitud (5 años). 25 está en la clase $25 \le$ edad < 30.

Se ubican los números en los extremos de las barras o como escala en el eje x.

No hay espacios entre las barras.





Se puede utilizar la CPG para dibujar histogramas. Véase la sección 5.4 en el capítulo 17.

Ejercitación 8B

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Se les preguntó a todos los estudiantes del IB en una escuela cuántos minutos al día estudiaban matemáticas. Los resultados se indican en la tabla.

Tiempo dedicado a estudiar matemáticas (min)	$0 \le t < 15$	$15 \le t < 30$	$30 \le t < 45$	$45 \le t < 60$	$60 \le t < 75$	$75 \le t < 90$
Número de estudiantes	21	32	35	41	27	11

a ¿Son datos continuos o discretos?

b Utilice la CPG para dibujar un histograma claramente rotulado para representar los datos.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 La siguiente tabla muestra la distribución de las edades de los profesores de matemáticas que trabajan en la Escuela Secundaria Caring.

a ¿Son datos discretos o continuos?

b ¿Cuántos profesores de matemáticas trabajan en la Escuela Secundaria Caring?

c Utilice la CPG para dibujar un histograma claramente rotulado para representar estos datos.

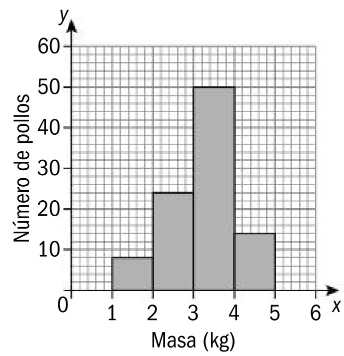
Edad	Número de Profesores
$20 \le x < 30$	5
$30 \le x < 40$	4
$40 \le x < 50$	3
$50 \le x < 60$	2
$60 \le x < 70$	3

3 El siguiente histograma muestra datos sobre pollos congelados en un supermercado. Las masas en kg se agrupan de la siguiente manera: $1 \le w < 2$, $2 \le w < 3$, y así sucesivamente.

a ¿Son las masas de los pollos datos discretos o continuos?

b Elabore la tabla de frecuencias agrupadas para este histograma.

c ¿Cuántos pollos congelados hay en el supermercado?

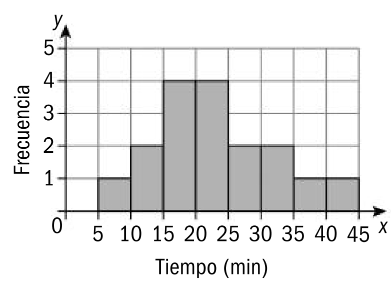


4 El histograma de la derecha muestra cuántos minutos les toma a los estudiantes regresar a casa después de la escuela.

a ¿Son datos discretos o continuos?

b Represente los datos en una tabla de frecuencias agrupadas.

c ¿Cuál es el menor tiempo que un estudiante puede tardar en llegar a casa?



8.3 Medidas de posición central

Una medida de posición central nos indica dónde yace la mitad de un conjunto de datos. Las tres medidas más comunes de posición central son la **moda**, la **media** y la **mediana**.

Otra palabra es "promedio".

La moda

➔ La moda es el valor que se presenta más frecuentemente en un conjunto de datos.

En una lista de números, la moda es el número que aparece más a menudo.

Puede haber más de una moda. Si ningún dato ocurre más de una vez en el conjunto, entonces no existe la moda para ese conjunto de números.

Ejemplo 3

Halle la moda de: 9, 3, 9, 41, 17, 17, 44, 15, 15, 15, 27, 40, 13.

Respuesta

La moda es 15 (15 aparece 3 veces: ocurre con más frecuencia que cualquier otro número).

Cuando se presenta en una tabla de frecuencias, la moda (o la clase modal) es el valor (o la clase) que tiene la mayor frecuencia.

Ejemplo 4

Halle la clase modal o la moda de estas tablas de frecuencias.

a

Goles	Frecuencia
0	4
1	7
2	3
3	3
4	1

b

Tiempo	Frecuencia
$0 \le t < 5$	1
$5 \le t < 10$	5
$10 \le t < 15$	6
$15 \le t < 20$	7
$20 \le t < 25$	6

Respuestas

a La moda es 1 gol.

b La clase modal es $15 \le t < 20$.

Errores comunes:

1 *La moda es 7.*
Error*: la frecuencia mayor es 7.*

2 *La moda es 3.*
Error*: la frecuencia más común es 3.*

A la moda de una tabla de frecuencias agrupadas se la llama clase modal.

Ejercitación 8C

Un conjunto de datos es **bimodal** si tiene dos modas.

1 Halle la moda de los siguientes conjuntos de datos.

a 7, 13, 18, 24, 9, 3, 18

b 8, 11, 9, 14, 9, 15, 18, 6, 9, 10

c 24, 15, 18, 20, 18, 22, 24, 26, 18, 26, 24

d −3, 4, 0, −2, 12, 0, 0, 3, 0, 5

e 2; 7; 4; 2; 1; 9; 3,5; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; 11

2 Halle la moda de las siguientes tablas de frecuencias.

a

Goles	Frecuencia
0	4
1	7
2	3
3	3
4	1

b

Altura	Frecuencia
$140 \le h < 150$	6
$150 \le h < 160$	6
$160 \le h < 170$	5
$170 \le h < 180$	10
$180 \le h < 190$	8

La media

La **media** aritmética se suele denominar media o **promedio** y es la medida de posición central más común.

> ➔ La media es la suma de los números dividida por el número de números en un conjunto de datos.
>
> $$\text{Media} = \frac{\text{Suma de los valores}}{\text{Número de valores}}$$

μ se pronuncia 'mu', Σ (que nos indica hallar la suma) se pronuncia 'sigma' y N es 'nu'.

La media nos da un número que indica el centro del conjunto de datos. Generalmente no es un elemento del conjunto de datos, pero es un valor representativo. Por ejemplo, un puntaje promedio de matemáticas del año puede ser 85,73%, por más que el profesor siempre dé las calificaciones en números enteros.

La letra griega minúscula μ es el símbolo para la media de la población.

Media de la población $\mu = \dfrac{\sum x}{N}$

donde Σx es la suma de los valores y N es el número de valores en la población.

A menudo hay confusión entre la media de la población y la media de la muestra. La media de la población se indica con letras griegas, mientras que para la media muestral se usan $\bar{x}$ y n. En nuestro curso solo utilizamos la media de la población.

Ejemplo 5

Halle la media de:

a 89, 73, 84, 91, 87, 77, 94

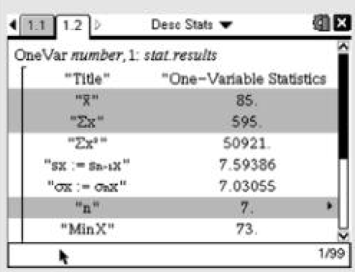
b 2, 3, 3, 4, 6, 7

Respuestas

a $\mu = \dfrac{\sum x}{N} = \dfrac{89+73+84+91+87+77+94}{7}$

$= \dfrac{595}{7} = 85$

b $\mu = \dfrac{\sum x}{N} = \dfrac{2+3+3+4+6+7}{6} = \dfrac{25}{6} = 4{,}1\dot{6}$



Se puede calcular la media en una lista de tu CPG. En la opción **One-Variable Statistics** (estadística de una variable), la media es $\bar{x}$. La CPG también calcula Σx y n.

También se puede calcular la media a partir de una tabla de frecuencias.

Ejemplo 6

Halle la media de cada conjunto de datos que se muestran a continuación.

a

Nota (n)	Frecuencia
0	11
1	10
2	19
3	10

b

Edad (t)	Frecuencia
$10 \le t < 12$	4
$12 \le t < 14$	8
$14 \le t < 16$	5
$16 \le t < 18$	3

Respuestas

a

Nota (n)	Frecuencia	fn
0	11	0
1	10	10
2	19	38
3	10	30
Total	50	78

$$\text{Media} = \frac{\sum fn}{\sum f} = \frac{78}{50} = 1{,}56$$

Añadir una tercera columna; fn significa $f \times n$

El total de la columna de fn es la suma de todas las notas.
El total de la columna f es el número de notas.

b

Edad (t)	f	Punto medio(m)	fm
$10 \le t < 12$	4	11	44
$12 \le t < 14$	8	13	104
$14 \le t < 16$	5	15	75
$16 \le t < 18$	3	17	51
Total	20		274

$$\text{Media} = \frac{\sum fm}{\sum f} = \frac{274}{20} = 13{,}7$$

Cuando los datos se agrupan, podemos calcular la media suponiendo que todos los valores se distribuyen en forma pareja alrededor del punto medio del intervalo.

Esta es la fórmula que aparece en el cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NM del IB.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Este método lleva a pequeñas imprecisiones y por eso en las preguntas de exámenes a menudo se pide "estimar la media". No significa "adivinar", sino calcular, como en este ejemplo, o con la CPG.

Ejemplo 7

Las notas de las pruebas de matemáticas de Laura son 87, 93, 89 y 85. ¿Qué puntuación debe sacar en la quinta prueba para obtener una media de 90 para el semestre?

Respuesta

$$\mu = \frac{\sum x}{N}$$ *Seleccionar la fórmula de la media*

$$90 = \frac{87 + 93 + 89 + 85 + x}{5}$$ *Sustituir la información en la fórmula*

$$450 = 354 + x$$ *Resolver en x*

$$x = 96$$

Laura debe obtener una nota de 96 en su quinta prueba. *Responder la pregunta*

Ejercitación 8D

Ronald Fisher (1890–1962) vivió en el Reino Unido y Australia, y a menudo se lo llama el "padre de la estadística". Usó estadísticas para analizar problemas prácticos en la agricultura, la astronomía, la biología y las ciencias sociales. ¿Quién más podría considerarse como el padre, o el inventor de la estadística?

1 Halle la velocidad media de 6 automóviles diferentes en el mismo camino si sus velocidades son: $66\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, $57\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, $71\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, $69\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, $58\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ y $54\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

2 El precio de compra de música de diferentes sitios es de \$1,79; \$1,61; \$1,96 y \$2,08 por pista. ¿Cuál es el precio medio?

3 Un servicio de reparación de computadores recibió el siguiente número de llamadas por día durante un período de 30 días.

6	5	6	9	7	4	2	4	7	8
3	4	9	8	2	3	5	9	7	8
9	7	5	6	7	7	4	6	2	4

a ¿Son los datos discretos o continuos?
b Elabore una tabla de frecuencias y halle el número medio de llamadas por día.

4 La siguiente tabla muestra el número de minutos de luz solar en los primeros 100 días del año, en Newtown.

Minutos (m)	f
$0 \le m < 30$	12
$30 \le m < 60$	16
$60 \le m < 90$	20
$90 \le m < 120$	36
$120 \le m < 150$	16

a ¿Son los datos discretos o continuos?
b ¿Cuál es la clase modal?
c Halle el número medio de minutos de luz solar.

En los exámenes, podrá evaluarse el cálculo de la media tanto mediante la fórmula como mediante la calculadora.

5 Las puntuaciones de Camila son 95, 82, 76 y 88. ¿Qué puntuación debe sacar en la quinta prueba para alcanzar un promedio de 84 en las cinco pruebas?

6 La masa media de once jugadores en un equipo deportivo es 80,3 kg. Un nuevo jugador se une al equipo y la media se eleva a 81,2 kg. Halle la masa del nuevo jugador.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

7 La familia López debe manejar una distancia media de 250 km por día para completar sus vacaciones a tiempo. En los primeros cinco días, viajan 220 km, 300 km, 210 km, 275 km y 240 km. ¿Cuántos km deben viajar en el sexto día para completar sus vacaciones a tiempo?

8 La media de las últimas 8 rondas de Tigger en golf es de 71 golpes. ¿Cuál es el número total de disparos que realizó en las 8 rondas?

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

9 Después de 8 partidos, la puntuación media de un jugador de baloncesto era de 27 puntos. Después de 3 partidos más, la media era de 29. ¿Cuántos puntos consiguió en los últimos tres partidos?

10 Lucas vendió 12 equipos informáticos, a un precio medio de \$310, y Carlos vendió 13 a un precio medio de \$320. Su jefe les dice que sus ventas se combinan al final de la semana. ¿Cuál será el precio medio después de que Lucas y Carlos combinen sus ventas?

La mediana

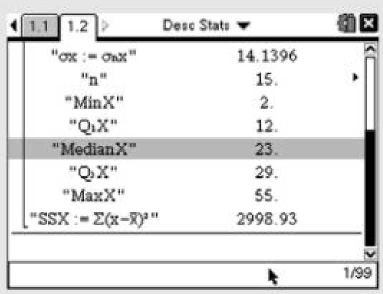
➔ La mediana es el número del medio cuando los números de un conjunto de datos se ordenan en forma creciente. Si el número de números en el conjunto de datos es par, la mediana es la media de las dos cifras del medio.

Ejemplo 8

Halle la mediana de:
2, 13, 7, 5, 19, 23, 39, 23, 42, 23, 14, 12, 55, 23, 29.

Respuesta

2, 5, 7, 12, 13, 14, 19, 23, 23, 23, 23, 29, 39, 42, 55	*Escribir los números en orden*
El valor de la mediana para este conjunto de números es **23**.	*Hay **15** números. El número del medio será el **8**.°.*



Puede calcular la mediana en su CPG.

➔ Si hay muchos números y es difícil hallar el elemento del medio, podemos usar la fórmula: Mediana = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ésimo elemento, donde n es el número de elementos en el conjunto y cuando los elementos están en orden creciente.

Error común. Esta fórmula no da la mediana. Da la posición de la mediana dentro del conjunto ordenado de datos.

Ejercitación 8E

1 Halle la mediana:

a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2, 3, 4 **b** 2, 5, 5, 2, 7, 3, 8
c 9, 3, 4, 6, 7, 2, 3, 0
d 8; 1; 2; 4; 5; 9; 12; 0; 4; 1,5; 8,4
e 12, 4, 9, 1, 20, 7, 2, 5

El psicólogo alemán del siglo XIX Gustav Fechner popularizó la mediana en el análisis formal de datos, aunque el matemático y astrónomo francés Pierre-Simon Laplace la había usado previamente.

2 Susana ha estado contando el número de pistas en los CD de su colección. Halle la mediana del número de pistas en los CD de Susana.

Número de pistas	7	8	9	10	11	12	13
Número de CD	3	2	2	1	3	5	3

3 Halle la moda, la media y la mediana de las calificaciones presentadas al inicio del capítulo.

Resumen de las medidas de posición central

	Ventajas	**Desventajas**
Moda La moda puede utilizarse para datos cualitativos o cuando se pide elegir el elemento más frecuente.	• Los valores extremos no afectan el valor de la moda.	• No utiliza a todos los elementos del conjunto de datos. • No es necesariamente única: puede haber más de una respuesta. • Cuando no hay valores repetidos en el conjunto de datos, no existe la moda. • Cuando hay más de una moda, es difícil de interpretar o comparar.
Media La media describe el centro de un conjunto de datos.	• Es la medida más ampliamente utilizada en áreas como negocios, ingeniería e informática. • Utiliza a todos los elementos del conjunto de datos. • Es única: tiene solo una respuesta. • Es útil en la comparación de conjuntos de datos.	• Los valores extremos afectan el valor de la media. En el conjunto de datos de salarios €15 000, €20 000, €22 000, €17 000, €75 000, ¿cómo afecta el valor extremo de €75 000 a la media?
Mediana La mediana describe el centro de un conjunto de datos.	• Los valores extremos no la afectan tanto como a la media. • Es útil en la comparación de conjuntos de datos. • Es única: tiene solo una respuesta. • Por tratarse del valor del medio, deja al 50% de los datos a cada lado.	• No es tan ampliamente utilizada como la media. • Es menos utilizada en cálculos avanzados.

Investigación: medidas de posición central

¿Qué pasará con las medidas de posición central si sumamos la misma cantidad a todos los valores, o multiplicamos cada valor por la misma cantidad?

Copie y complete la siguiente tabla. Debe usar la CPG para calcular la media, la moda y la mediana.

	Valores	Media	Moda	Media
Conjunto de datos	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16, 20			
Sume 4 a cada valor del conjunto.				
Multiplique cada valor del conjunto original por 2.				

Ahora copie y complete las siguientes oraciones para explicar lo que sucede con la media, la moda y la mediana del conjunto de datos original.

a Si sumamos 4 a cada valor..

b Si multiplicamos cada valor por 2......................................

8.4 Medidas de dispersión

Las medidas de posición central (media, mediana, moda) exploran el centro de un conjunto de datos. Las medidas de dispersión indican cuánto varían los datos respecto de un valor central.

> Cuando describimos datos, debemos dar al menos una medida de posición central y una de dispersión.

➔ El **rango** es la diferencia entre el mayor valor y el menor.

El rango es la medida de dispersión más sencilla de calcular pero puede verse afectada por los valores extremos. No indica cómo se distribuyen los datos restantes.

Por ejemplo, para las calificaciones presentadas al comienzo del capítulo, la más baja es 0 y la más alta es 10. Por lo tanto, el rango es $10 - 0 = 10$.

Cuartiles

La mediana de un conjunto de datos separa los datos en dos mitades: una mitad con los valores menores a la mediana, la otra mitad con los valores mayores a la mediana. Los **cuartiles** separan el conjunto original de datos en cuatro secciones iguales. Cada una de estas secciones contiene una cuarta parte (25%) de los datos.

➔

Primer cuartil	El **primer cuartil** es el valor que marca la primera sección. Una cuarta parte de los datos se halla por debajo del primer cuartil y tres cuartas partes por arriba. También se lo llama el percentil 25 y a menudo se lo denota con el símbolo Q_1.
Segundo cuartil	El **segundo cuartil** es la mediana del conjunto de datos. También se lo llama percentil 50.
Tercer cuartil	El **tercer cuartil** es el valor que marca la tercera sección. Tres cuartas partes de los datos se hallan debajo del tercer cuartil y la otra, por arriba. También se lo llama el percentil 75 y se lo denota con el símbolo Q_3.

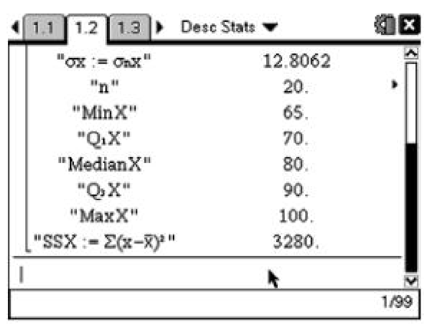
$Q_1 = \frac{1}{4}(n + 1)$-ésimo valor y $Q_3 = \frac{3}{4}(n + 1)$-ésimo valor, donde n es el número de valores en el conjunto de datos.

Para tener una idea de la distribución de los datos del conjunto, podemos analizar el **resumen de cinco números**:

1 *Mínimo*
2 *Máximo*
3 *Mediana (o segundo cuartil)*
4 *Primer cuartil*
5 *Tercer cuartil*

Esto muestra cómo se distribuyen los datos respecto de la mediana y de los extremos.
La CPG calcula estos cinco valores en la opción **One-Variable Statistics** (estadística de una variable).

A continuación se muestra el resumen de los cinco números para un conjunto de puntuaciones.



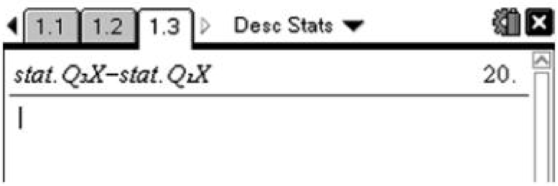
Mínimo	Primer cuartil	Mediana	Tercer cuartil	Máximo
65	70	80	90	100

No sabemos cuál es cada puntuación, pero mediana = 80 nos dice que la mitad de las puntuaciones están por debajo de 80 y la mitad están por arriba de 80. Primer cuartil = 70 y tercer cuartil = 90 indican que el 50% central de las puntuaciones están entre 70 y 90.

Se pueden hallar la mediana y cuartiles en la CPG. Véanse las secciones 5.7 y 5.8 en el capítulo 17.

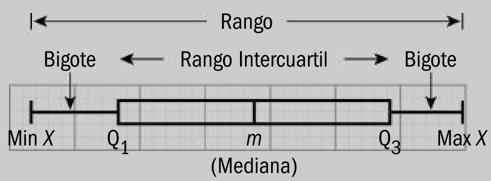
➔ La diferencia entre el tercer y el primer cuartil se llama el **rango intercuartil** (RIC) = $Q_3 - Q_1$.

A veces al RIC se le dice “la mitad del medio”. Aquí el rango intercuartil es 20.



Se puede utilizar la CPG para calcular el rango intercuartil. Véase la sección 5.9 en el capítulo 17.

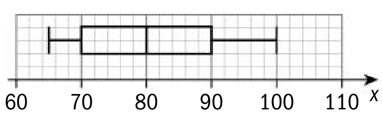
➔ Podemos representar gráficamente el resumen de los cinco números en un diagrama de **caja y bigotes**.

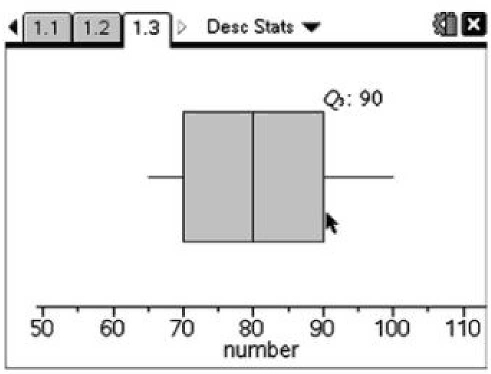


El diagrama de caja y bigotes a veces se conoce sencillamente como “diagrama de caja”.

El diagrama debe ser dibujado a escala; por ejemplo, en papel cuadriculado.

El primer y el tercer cuartil están en los extremos de la caja, la mediana se indica mediante un segmento vertical en la caja y el máximo y el mínimo están en los extremos de los bigotes. El siguiente diagrama de caja y bigotes muestra los datos de la página 268.





Se puede dibujar un diagrama de caja y bigotes en la CPG. Véanse las secciones 5.5 y 5.6 en el capítulo 17.

A los valores de datos extremos o distantes se los llama **valores no esperados**.

➔ Un **valor no esperado** es cualquier valor que se encuentra al menos 1,5 RIC por arriba de Q_3 o por debajo de Q_1.

Ejemplo 9

a Halle el rango, la mediana, el primer cuartil, el tercer cuartil y el rango intercuartil de este conjunto de puntuaciones.
18, 27, 34, 52, 54, 59, 61, 68, 78, 82, 85, 87, 91, 93, 100

b Muestre los datos en un diagrama de caja y bigotes.

c Verifique si 18 es un valor no esperado.

Quizás desee explorar algunos de los usos erróneos de las estadísticas.

Respuestas

a Rango = 100 – 18 = 82

Rango = valor mayor – valor menor

18, 27, 34, 52, 54, 59, 61, 68, 78, 82, 85, 87, 91, 93, 100

Escribir los datos en orden

Mediana

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{-ésimo} = \left(\frac{15+1}{2}\right)\text{-ésimo valor}$$

$$= 8.^\circ \text{ valor} = 68$$

Hay 15 números en el conjunto de datos. $\therefore$ $n = 15$.

$$Q_1 = \frac{1}{4}(n+1)\text{-ésimo valor}$$

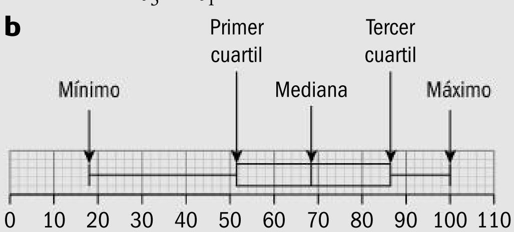
$$= \frac{1}{4}(15+1) = 4.^\circ \text{ valor} = 52$$

$$Q_3 = \frac{3}{4}(n+1)\text{-ésimo valor}$$

$$= \frac{3}{4}(15+1) = 12.^\circ \text{ valor} = 87$$

RIC = $Q_3 - Q_1$ = 87 – 52 = 35

b



c $Q_1 - 1{,}5(\text{RIC}) = 52 - 1{,}5(35) = 52 - 52{,}5$
$= -0{,}5$

$\therefore$ 18 no es un valor no esperado.

Los valores no esperados se encuentran más de 1,5 RIC por debajo de Q_1 o por arriba de Q_3.

Ejercitación 8F

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 A lo largo de 12 años, se mide la profundidad de la nieve en una estación de esquí, cada 31 de enero. Todos los datos están en centímetros:
30, 75, 125, 55, 60, 75, 65, 65, 45, 120, 70, 110.
Halle: **a)** el rango, **b)** la media, **c)** el primer cuartil, **d)** el tercer cuartil y **e)** el rango intercuartil del conjunto de datos, y represente los datos en un diagrama de caja y bigotes.

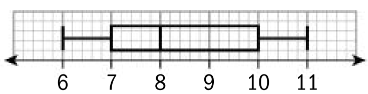
PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 Las siguientes son las puntuaciones que obtuvo Ana durante el año:
76 79 76 74 75 71 85 82 82 79 81
Halle: **a)** el rango, **b)** la media, **c)** el primer cuartil, **d)** el tercer cuartil y **e)** el rango intercuartil del conjunto de puntuaciones, y represente los datos en un diagrama de caja y bigotes.

Se puede utilizar la CPG para dibujar diagramas de caja y bigotes e histogramas.

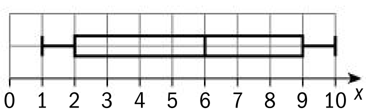
3 Las siguientes son las temperaturas en °C de un centro turístico en las sierras de Montana tomadas cada hora a lo largo de once horas: 10, 11, 12, 14, 18, 22, 21, 25, 27, 28, 29.
Halle: **a)** el rango, **b)** la media, **c)** el primer cuartil, **d)** el tercer cuartil y **e)** el rango intercuartil del conjunto de datos. Represente los datos en un diagrama de caja y bigotes.

4 Utilice el siguiente diagrama de caja para hallar **a)** el rango, **b)** la media, **c)** el primer cuartil, **d)** el tercer cuartil y **e)** el rango intercuartil del conjunto de datos.

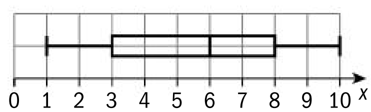


5 Unir cada diagrama de caja con el histograma que le corresponde.

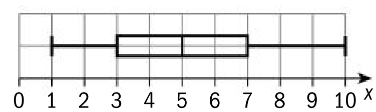
a



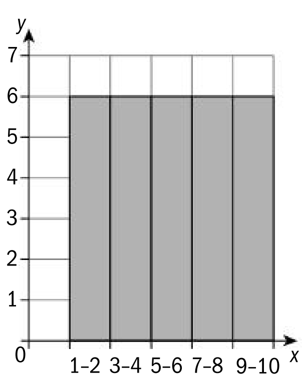
b



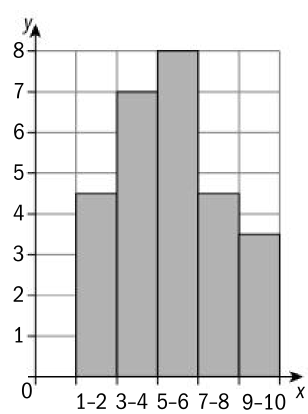
c



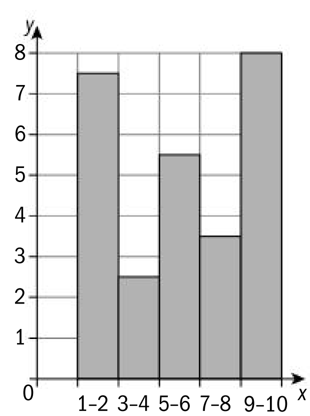
i



ii



iii



8.5 Frecuencia acumulada

➔ Para calcular la frecuencia acumulada se van sumando las frecuencias de los datos a medida que se avanza.

Un diagrama de frecuencia acumulada u **ojiva** resulta sumamente útil a la hora de calcular la mediana, los cuartiles y los percentiles de un conjunto grande de datos agrupados o continuos.

Al diagrama de frecuencia acumulada a menudo se lo llama “gráfico de frecuencias acumuladas”.

Ejemplo 10

Se probaron 50 baterías para ver cuánto duraban.
Los resultados (en horas) se muestran en la siguiente tabla.
Dibuje un diagrama de frecuencia acumulada y halle la mediana y el rango intercuartil.

Tiempo (*h*)	*f*
$0 \le h < 5$	3
$5 \le h < 10$	5
$10 \le h < 15$	8
$15 \le h < 20$	10
$20 \le h < 25$	12
$25 \le h < 30$	7
$30 \le h < 35$	5

Respuesta

Tiempo (*h*)	*f*	Frecuencia acumulada
$0 \le h < 5$	3	3
$5 \le h < 10$	5	8
$10 \le h < 15$	8	16
$15 \le h < 20$	10	26
$20 \le h < 25$	12	38
$25 \le h < 30$	7	45
$30 \le h < 35$	5	50

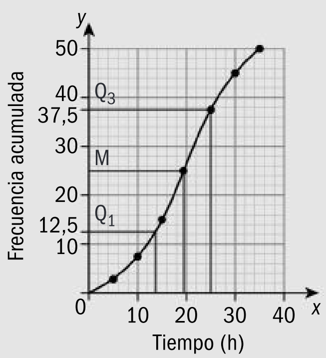
Agregar una columna "frecuencia acumulada" a la tabla. Calcular la frecuencia acumulada sumando las frecuencias a medida que se avanza en la tabla.

f	*Frecuencia acumulada*
3	3
5	3 + 5 = 8
8	3 + 5 + 8 = 16
10	3 + 5 + 8 + 10 = 26
12	3 + 5 + 8 + 10 + 12 = 38
7	3 + 5 + 8 + 10 + 12 + 7 = 45
5	3 + 5 + 8 + 10 + 12 + 7 + 5 = 50

3 baterías duraron menos de 5 horas,

8 baterías duraron menos de 10 horas.

38 baterías duraron menos de 25 horas.



Situar los puntos que tienen por primera coordenada el límite superior de los intervalos de tiempo y por segunda coordenada la frecuencia acumulada correspondiente. Los dos primeros puntos son (5, 3) y (10, 8).

n = 50

Mediana = 19 horas

Mediana: $\frac{50}{2} = 25.^o$ *valor*

Para conjuntos grandes de datos, la mediana es el valor en la posición $\frac{n}{2}$.

Trazar un línea horizontal desde el 25 en el eje de la frecuencia hasta la curva, y luego otra vertical hasta el eje del tiempo

Leer Q_3 *y* Q_1 *en el gráfico, de la misma manera*

$Q_3 = 25$, $Q_1 = 14$

RIC = (25 – 14) horas = 11 horas

$RIC = Q_3 - Q_1$

Los valores de la mediana y los cuartiles de una CPG pueden diferir de los valores leídos a partir de un gráfico de frecuencia acumulada.

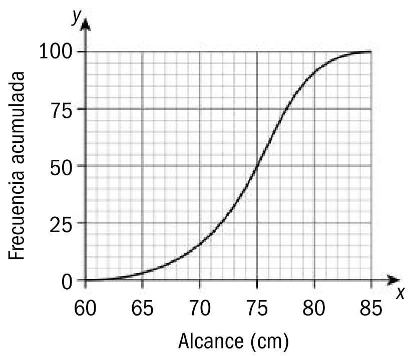
Ejercitación 8G

1 La curva de la frecuencia acumulada muestra el alcance del brazo de 100 boxeadores, en centímetros.

a Estime la mediana de los alcances de estos boxeadores.

b ¿Cuál es el rango intercuartil?

c ¿Qué le dice el rango intercuartil?



2 La siguiente tabla muestra la longitud de 40 dispositivos de memoria USB en una tienda de informática.
Muestre estos datos en un diagrama de frecuencia acumulada.

Longitud (mm)	*f*	Límite superior de la clase	Longitud (*l* mm)	Frecuencia acumulada
6–10	0	10,5	$l \leq 10,5$	0
11–15	2	15,5	$l \leq 15,5$	2
16–20	4	20,5	$l \leq 20,5$	6
21–25	8	25,5	$l \leq 25,5$	14
26–30	14	30,5	$l \leq 30,5$	28
31–35	6	35,5	$l \leq 35,5$	34
36–40	4	40,5	$l \leq 40,5$	38
41–45	2	45,5	$l \leq 45,5$	40

Los datos continuos a veces se presentan agrupados como en este caso. Situar los puntos tomando como primera coordenada el límite superior de la clase, generalmente el punto medio entre dos clases adyacentes.

3 **a** La siguiente tabla muestra la distribución de frecuencia acumulada del tiempo que tardan para almorzar 100 estudiantes.

Tiempo (min)	Número de estudiantes
2 y menos	0
4 y menos	6
6 y menos	18
8 y menos	24
10 y menos	40
12 y menos	60
14 y menos	78
16 y menos	92
18 y menos	100

Utilizando una escala de 1 cm cada 10 estudiantes en el eje vertical y 1 cm cada 2 minutos en el eje horizontal, sitúe los puntos y dibuje un diagrama de frecuencia acumulada.
Utilice su gráfico para estimar:

i La mediana **ii** El rango intercuartil

b Los datos en **a** puede ser presentados en forma de tabla, como a continuación. Halle los valores de p y q.

Tiempo	$2 \le t < 8$	$8 \le t < 12$	$12 \le t < 16$	$16 \le t < 20$
Frecuencia	24	36	p	q

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Una clase de 30 estudiantes de Matemáticas del IB tiene los promedios semestrales que se muestran en la tabla:

Notas	Frecuencia
$20 \le n < 30$	2
$30 \le n < 40$	3
$40 \le n < 50$	5
$50 \le n < 60$	7
$60 \le n < 70$	6
$70 \le n < 80$	4
$80 \le n < 90$	2
$90 \le n < 100$	1

a Elabore una tabla de frecuencia acumulada.

b Dibuje un diagrama de frecuencia acumulada.

c Utilice su gráfico para estimar:

i La mediana

ii El primer y el tercer cuartil

iii El rango intercuartil

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 Durante el día de los deportes, 40 estudiantes lanzaron la jabalina y sus resultados se muestran a continuación:

Distancia (m)	$0 \le d < 20$	$20 \le d < 40$	$40 \le d < 60$	$60 \le d < 80$	$80 \le d < 100$
Frecuencia	4	9	15	10	2

a Elabore una tabla de frecuencia acumulada.

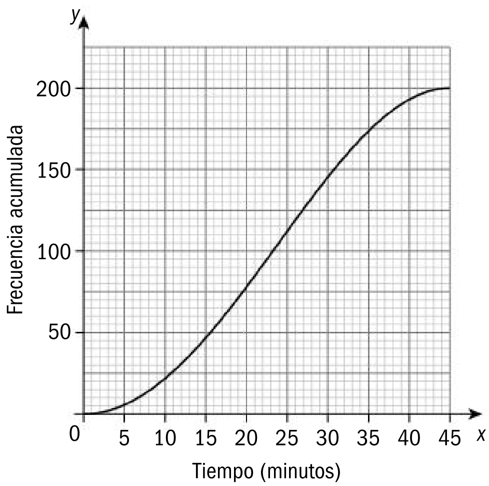
b Dibuje un diagrama de frecuencia acumulada.

c Si el 20% con mejor rendimiento de los estudiantes son seleccionados para la final, utilice el gráfico para estimar la distancia que califica para la final.

d Halle el rango intercuartil.

e Halle la mediana de las distancias.

6 El siguiente gráfico muestra el tiempo que los estudiantes escuchan música en la escuela.



a Estime:

i La mediana de los tiempos que los estudiantes escuchan música

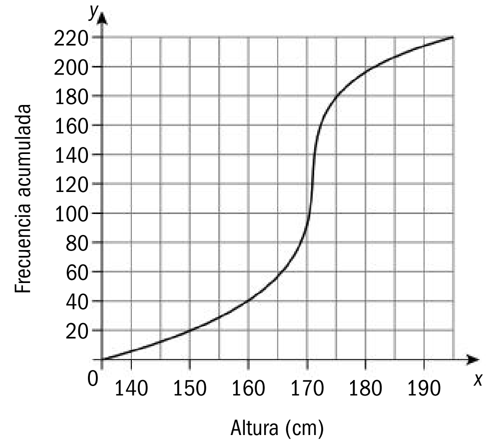
ii El rango intercuartil

iii El tiempo que un estudiante debe escuchar música para estar dentro del 10% que más música escucha

b El tiempo mínimo dedicado a escuchar música es 0 minutos y el tiempo máximo es de 45 minutos. Dibuje un diagrama de caja y bigotes para representar esta información.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

7 El siguiente diagrama de frecuencia acumulada muestra las alturas de 220 girasoles.



a Halle la mediana de las alturas de los girasoles.

b El 25% de menor altura se envían a tiendas de florería. ¿Cuántos van a esas tiendas? ¿Entre qué alturas están?

c El 10% de mayor altura se destinan a decoración de hoteles. ¿Cuántos van a los hoteles? ¿Cuál es el girasol más bajo que se enviará a los hoteles para decoración?

d La mitad del medio de los girasoles se venden inmediatamente. ¿Cuántos son?

e La altura del girasol más alto es 195 cm y la altura del más bajo es 136 cm. Dibuje un diagrama de caja y bigotes para representar las alturas de los girasoles.

Quizás le interese explorar diferentes representaciones visuales de las estadísticas.

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 8: Medidas de posición central y dispersión*

8.6 Varianza y desviación típica

El rango y el rango intercuartil son medidas de dispersión apropiadas, pero cada una de ellas se calcula utilizando solamente dos valores del conjunto de datos.

➔ La **varianza** combina todos los valores del conjunto de datos para crear una medida de dispersión. Es la media aritmética de los cuadrados de las diferencias entre cada dato y la media de los datos.

Elevar al cuadrado la diferencia entre cada dato y la media tiene por lo menos tres ventajas:

1 Elevar al cuadrado hace que cada término sea positivo, con lo cual los valores por arriba de la media no se cancelan con los valores por debajo de la misma.

2 Elevar al cuadrado les agrega peso a las diferencias grandes. En muchos casos este peso adicional resulta apropiado, dado que los puntos que están más lejos de la media pueden ser más significativos.

3 El uso de esta medida facilita de alguna manera las operaciones matemáticas en cálculos estadísticos posteriores.

Dado que las diferencias se elevan al cuadrado, las unidades de varianza no son las mismas que las unidades de los datos.

Debe utilizar una CPG para calcular la desviación típica y la varianza de la población.

➔ La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza y tiene las mismas unidades que los datos.

➔ Las fórmulas para la desviación típica y la varianza son:

$$\sigma^2 = \text{Varianza de la población} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2}{n}$$

$$\sigma = \text{Desviación típica de la población} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2}{n}}$$

Ejemplo 11

Les preguntamos a treinta agricultores cuántos trabajadores estacionales contratan durante una temporada típica de cosecha. Sus respuestas fueron:

4, 5, 6, 5, 3, 2, 8, 0, 4, 6, 7, 8, 4, 5, 7, 9, 8, 6, 7, 5, 5, 4, 2, 1, 9, 3, 3, 4, 6, 4

Calcule la media y la desviación típica de estos datos.

Respuesta

Solución “a mano”

Trabajadores (x)	**Frecuencia (f)**	**(fx)**	**$(x-\mu)$**	**$(x-\mu)^2$**	**$f(x-\mu)^2$**
0	1	0	−5	25	25
1	1	1	−4	16	16
2	2	4	−3	9	18
3	3	9	−2	4	12
4	6	24	−1	1	6
5	5	25	0	0	0
6	4	24	1	1	4
7	3	21	2	4	12
8	3	24	3	9	27
9	2	18	4	16	32
	30	**150**			**152**

El programa de Matemáticas NM del IB indica “Cálculo de la desviación típica/varianza solo mediante la tecnología”. A continuación se muestra cómo se calcularía “a mano” la desviación típica para una variable discreta.

1 *Calcular la media*

2 *Restar la media de cada observación*

3 *Elevar al cuadrado cada uno de los resultados del paso 2*

4 *Sumar estos cuadrados*

5 *Dividir este total por el número de observaciones. Esto da la varianza σ^2.*

6 *Tomar la raíz cuadrada positiva para obtener la desviación típica σ*

Para calcular la media:

$$\mu = \frac{150}{30} = 5$$

$$\mu = \frac{\sum fx}{n}$$

Para calcular la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{152}{30}} = 2{,}25$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x-\mu)^2}{n}}$$

▶ Continúa en la página siguiente.

Solución usando una CPG

Ingrese los datos en listas llamadas "trabajadores" y "frecuencia". Agregue una nueva página de calculadora a su documento.

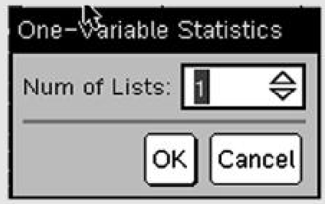
Presione tab **6: Statistics** (estadística) | **1: Stat calculation** (cálculo estadístico) | **1: One-Variable Statistics** (estadísticas de una variable).

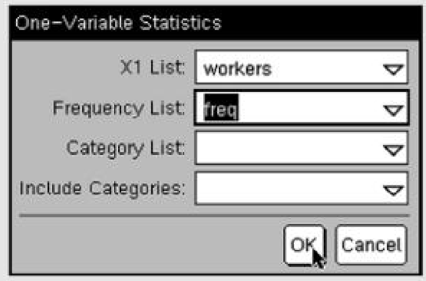
Presione enter.

Esto abre un cuadro de diálogo.

Deje el número de listas en 1 y presione enter.

Esto abre otro cuadro de diálogo. Seleccione **number** (número) en la lista desplegable para la lista X1 y **freq** (frecuencia) en la lista desplegable para la lista de frecuencias. Presione enter.

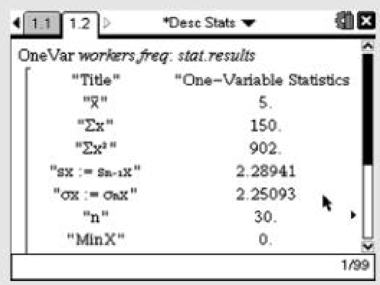




La información mostrada no entra en una sola pantalla. Puede desplazarse hacia arriba y hacia abajo para verla toda.

La desviación típica es el valor denotado con "σx: σ_nx" (desviación típica de la población).

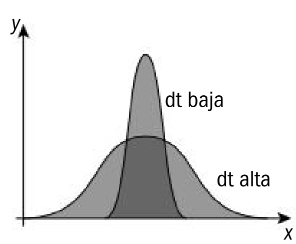
$\sigma = 2{,}25$ (3 cs)



En este curso debe utilizar siempre el valor σx, y nunca el valor sx.

La desviación típica muestra cuánta variación hay con respecto a la media y da una idea de la forma de la distribución.

- Una desviación típica baja muestra que los datos tienden a estar muy cerca de la media.
- Una desviación típica alta indica que los datos están dispersos sobre un amplio intervalo de valores.



Propiedades de la desviación típica

- La desviación típica solo se utiliza para medir la variación o dispersión alrededor de la media de un conjunto de datos.
- La desviación típica nunca es negativa.
- La desviación típica es sensible a los valores no esperados. Un solo valor no esperado puede aumentar la desviación típica y a la vez desvirtuar la representación de la dispersión.
- Para datos que tienen aproximadamente la misma media, a mayor dispersión, mayor será la desviación típica.
- Si todos los valores de un conjunto de datos son iguales, la desviación típica es cero porque cada valor es igual a la media.

La desviación típica se utiliza ampliamente para describir datos en los negocios, las ciencias, el deporte y la medicina.

Ejercitación 8H

Utilice la CPG para estos ejercicios.

1 Halle la media, la varianza y la desviación típica de los siguientes conjuntos de números:

a 7, 9, 12, 25, 37 **b** 20, 30, 40, 50, 60

2 Halle la varianza y la desviación típica de los siguientes conjuntos de números.

a 27, 44, 32, 49 **b** 19, 28, 30, 44

c 35, 65, 84, 27, 66

3 La tabla muestra el tamaño del calzado de 73 estudiantes en una clase de ballet. Halle la desviación típica de los tamaños de sus calzados.

Tamaño	4	5	6	7	8
f	9	14	22	11	17

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 A continuación se muestra el número de niños en las familias en una clase de 29 niños. Halle la media y la desviación típica.

Niños	1	2	3	4	5	6	7
f	5	12	8	3	0	0	1

5 La siguiente tabla muestra el número de palabras que pueden recordar los alumnos de un grupo que estudia inglés. Halle la desviación típica.

Palabras	f
5–9	9
10–14	11
15–19	10
20–24	20
25–29	10
30–34	12
35–39	6
40–44	3
45–49	1
50–54	1
55–59	2
60–64	3
65–69	0
70–74	1
75–79	1

Pafnuty Lvóvich Chebyshev (1821–1894) fue un matemático ruso. El teorema de Chebyshev muestra cómo el valor de la desviación típica se puede aplicar a cualquier conjunto de datos.
En Rusia y Francia se hicieron varios avances estadísticos durante el siglo XIX. Este es un tema interesante para investigar.

6 Se realizó una encuesta sobre el número de habitaciones en 208 casas elegidas al azar. Los resultados se muestran en la tabla.

Número de habitaciones	1	2	3	4	5	6
Número de casas	41	60	52	32	15	8

a Indique si los datos son discretos o continuos.
b Escriba la media del número de habitaciones por casa.
c Escriba la desviación típica del número de habitaciones por casa.
d Halle cuántas casas tienen un número de dormitorios mayor que una desviación típica más que la media.

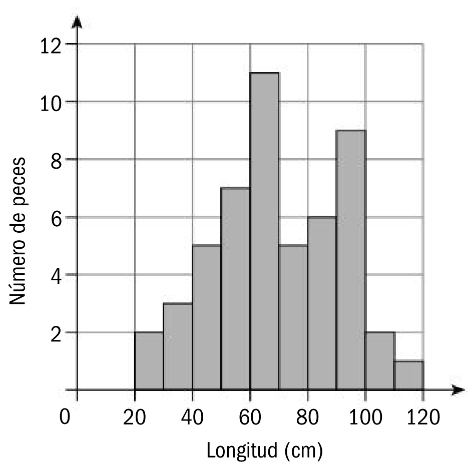
PREGUNTAS TIPO EXAMEN

7 Se usó una muestra aleatoria de 167 personas que poseen teléfonos celulares para recopilar datos sobre la cantidad de tiempo que lo utilizan por día. Los resultados se muestran en la tabla.

Tiempo utilizado por día (t minutos)	$0 \le t < 15$	$15 \le t < 30$	$30 \le t < 45$	$45 \le t < 60$	$60 \le t < 75$	$75 \le t < 90$
Número de personas	21	32	35	41	27	11

Utilice la CPG para calcular valores aproximados de la media y la desviación típica del tiempo utilizado por día en los teléfonos celulares.

8 El siguiente cuadro muestra las longitudes en centímetros de los peces encontrados en la red de un pequeño barco pesquero.



a Halle el número total de peces en la red.
b Escriba una estimación de la longitud media.
c **i** Escriba una estimación de la desviación típica de las longitudes.
ii ¿Cuántos peces (si los hubiera) tienen longitud **mayor que** tres desviaciones típicas **más que** la media?

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 8: Medidas de posición central y dispersión*

Investigación: el efecto de sumar o multiplicar el conjunto de datos en la desviación típica

He aquí un conjunto de números: 4, 2, 0, 9, 3, 5, 5, 1, 4, 6.

a Calcule la desviación típica de estos números.

b Ahora sume 100 a todos los números de la lista, para obtener 104, 102, 100, 109, 103, 105, 105, 101, 104, 106.
¿Qué sucede con la media?

c Calcule la desviación típica de este nuevo conjunto.

d Explique lo que observa y por qué sucede esto.

e Ahora multiplique por 2 todos los valores de la lista original, para obtener 8, 4, 0, 18, 6, 10, 10, 2, 8, 12.
¿Qué sucede con la media?

f Calcule la desviación típica.

g ¿Qué pasará con la varianza? ¿Por qué?

→ **Efecto de los cambios uniformes en los datos originales:**

Si se **suma/resta** un valor constante k a/de todos los números de una lista, la media aritmética aumenta o disminuye en k pero la desviación típica **sigue siendo la misma.**

Si se **multiplican/dividen** todos los números de la lista por un valor constante k, tanto la media aritmética como la desviación típica se **multiplican/dividen por k**.

En los exámenes, se nos puede pedir que utilicemos estas reglas. (Véase la pregunta 3 del ejercicio de revisión sin CPG.)

Ejercicio de revisión

1 Halle: **a)** la moda, **b)** la mediana, **c)** la media y **d)** el rango de:
1, 7, 8, 2, 3, 6, 5, 10, 3

2 Una clase recopiló los datos sobre el número de mascotas en sus hogares, como se muestra en la siguiente tabla.

Mascotas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	3	9	10	2	3	1	1	0	1

a Calcule la media del número de mascotas.

b Calcule la mediana.

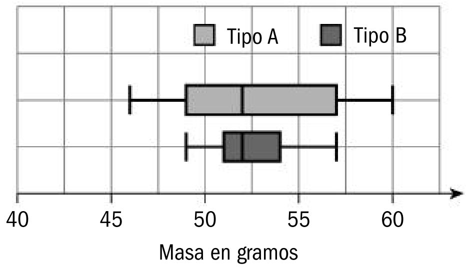
c Escriba la moda.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 La edad media de un grupo de amigos al terminar la escuela es de 17,5 años y la desviación típica es de 0,4 años. Todos se reencuentran en una reunión escolar después de 10 años. ¿Cuál es ahora la media y la desviación típica de sus edades?

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Un agricultor cultiva dos tipos diferentes de maíz y los resultados de la cosecha se muestran a continuación.



Halle: **a)** la mediana, **b)** el rango y **c)** el rango intercuartil para cada tipo.

5 La media de seis números es 71. Un número es 46, otro es 92 y los otros cuatro son todos iguales.

a Halle el total de los seis números.

b Halle el valor de uno de los cuatro números que faltan.

c Si a cada uno de los seis números se le resta 9, halle la media del nuevo conjunto de números.

> Se nos puede pedir que calculemos la media utilizando o bien la fórmula o bien la CPG. Para el cálculo de la desviación típica o la varianza solo se pedirá que utilicemos la CPG.

6 **a** Dibuje un gráfico de frecuencia acumulada para los datos de la tabla.

Altura (cm)	$150 \le h < 155$	$155 \le h < 160$	$160 \le h < 165$	$165 \le h < 170$	$170 \le h < 175$
f	4	22	56	32	5

b Estime la mediana a partir de su gráfico.

c Estime el rango intercuartil a partir del gráfico.

> "Estime a partir de su gráfico" significa que debe dibujar las líneas horizontales y verticales en el gráfico, como forma de mostrar el procedimiento utilizado.

7 A un dado se lo arroja 100 veces. Cada cara del dado muestra un número del uno al seis.
La siguiente tabla muestra las frecuencias de cada número.

Número	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	26	10	20	k	29	11

a Calcule el valor de k.

b Halle: **i** La mediana **ii** El rango intercuartil

8 La siguiente tabla nos muestra la temperatura al mediodía (°F) en las montañas de Omani en noviembre. Halle la mediana y el RIC.

Temperatura	***f***
$12,5 \le t < 27,5$	6
$27,5 \le t < 42,5$	3
$42,5 \le t < 57,5$	5
$57,5 \le t < 72,5$	8
$72,5 \le t < 87,5$	6
$87,5 \le t < 102,5$	2

Ejercicios de revisión

1 Calcule la mediana y el rango intercuartil de:
9, 11, 12, 13, 13, 17, 19, 21, 21, 25, 27, 30, 33, 35

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Juana tiene un hogar para gatos. El número de cachorros por camada el último año fue:

Cachorros	4	5	6	7	8	9
f	3	7	11	12	6	3

a Halle la cantidad media de cachorros por camada.
b Halle la desviación típica.

3 El número de raquetas de tenis rotas por 410 jugadores en la temporada fueron:

Raquetas rotas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	3	11	43	90	172	13	64	10	4

Halle: **a** La moda **b** La mediana **c** La media

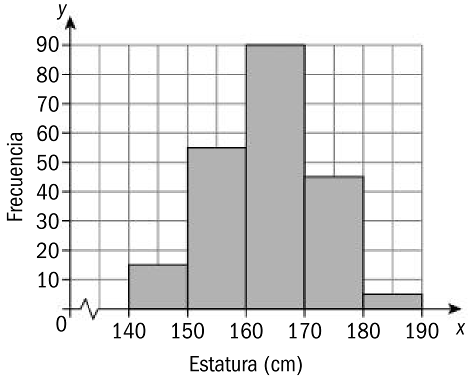
PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 El número de horas que los estudiantes estudian matemáticas cada noche se muestra en la siguiente tabla:

Horas	0	1	2	3	4	5	6
f	2	5	4	3	4	2	1

a Halle la media, la mediana, la moda, la desviación típica y la varianza.
b Halle el rango, el primer cuartil y el rango intercuartil.

5 El siguiente histograma muestra las estaturas de los estudiantes en una escuela secundaria de Perú.



a Escriba la clase modal.
b Elabore una tabla de frecuencias agrupadas y calcule una estimación de la estatura media de los estudiantes peruanos.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 Se evalúan los 150 estudiantes de una escuela para saber cuántas palabras en francés pueden recordar en un minuto. Los resultados se dan en la tabla a continuación.

Número de palabras	Número de estudiantes	Número acumulado de estudiantes
15	11	11
16	21	32
17	33	p
18	q	99
19	38	137
20	13	150

a **i** Escriba el valor de p. **ii** Halle el valor de q.

b Halle la mediana del número de palabras.

c Halle la media del número de palabras.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 8

Análisis unidimensional

- El análisis unidimensional contempla una sola variable.
- Los **datos** constituyen la información que se obtiene y se los clasifica en datos **cualitativos** y **cuantitativos**.
- Los datos cuantitativos se pueden dividir en dos categorías: **discretos** y **continuos**.
- Una variable cuantitativa discreta toma valores numéricos exactos.
- Una variable cuantitativa continua puede ser medida y su precisión depende de la precisión del instrumento de medición utilizado.
- Las variables continuas, tales como la longitud, el peso y el tiempo, pueden tomar valores fraccionarios o decimales.
- En estadística, el término **población** incluye a todos los miembros de un grupo definido que estamos estudiando con el fin de tomar decisiones basadas en datos.
- Una **muestra** es una parte de la población. Es un subconjunto de la población, una selección de los individuos que la conforman.

Presentación de los datos

- Cuando tenemos muchos datos, podemos organizarlos en grupos en una **tabla de frecuencias agrupadas**.
- Para los datos continuos se puede dibujar un **histograma**. Es similar a un gráfico de barras pero no tiene espacios entre las barras.

Continúa en la página siguiente.

Medidas de posición central

- La **moda** es el valor que se presenta más frecuentemente en un conjunto de datos.
- La **media** es la suma de los números dividida por el total de números en un conjunto de datos.

$$\text{Media} = \frac{\text{Suma de los valores de los datos}}{\text{Número de valores}}$$

- La **mediana** es el número del medio cuando los números de un conjunto de datos se ordenan en forma creciente. Si el número de valores en un conjunto es par, la mediana es la media de los dos valores del medio.
- Si hay gran cantidad de números y es difícil hallar el valor del medio, podemos usar la fórmula: Mediana = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ésimo valor, donde n es el número de valores en el conjunto.

	Ventajas	Desventajas
Moda La moda puede utilizarse para datos cualitativos o cuando se pide elegir el elemento más popular.	• Los valores extremos no afectan el valor de la moda.	• No utiliza a todos los elementos del conjunto de datos. • No es necesariamente única: puede haber más de una respuesta. • Cuando no hay valores repetidos en el conjunto de datos, no existe la moda. • Cuando hay más de una moda, es difícil de interpretar o comparar.
Media La media describe el centro de un conjunto de datos.	• Es la medida más ampliamente utilizada en áreas como negocios, ingeniería e informática. • Utiliza a todos los elementos del conjunto de datos. • Es única: tiene solo una respuesta. • Es útil en la comparación de conjuntos de datos.	• Los valores extremos afectan el valor de la media.
Mediana La mediana describe el centro de un conjunto de datos.	• Los valores extremos no la afectan tanto como a la media. • Es útil en la comparación de conjuntos de datos. • Es única: tiene solo una respuesta. • Por tratarse del valor del medio, deja al 50% de los datos a cada lado.	• No es tan ampliamente utilizada como la media. • Es menos utilizada en cálculos avanzados.

Continúa en la página siguiente

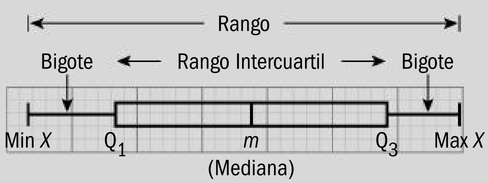
Medidas de dispersión

- El **rango** es la diferencia entre el mayor valor y el menor.

Primer cuartil	El **primer cuartil** es el valor que marca la primera sección, cuando se divide el conjunto de datos en cuatro secciones. Una cuarta parte de los datos se halla por debajo del primer cuartil y tres cuartas partes por arriba. También se lo llama el percentil 25 y a menudo se lo denota mediante el símbolo Q_1.
Segundo cuartil	El **segundo cuartil** es la mediana del conjunto de datos y también se lo llama el percentil 50.
Tercer cuartil	El **tercer cuartil** es el valor que marca la tercera sección, cuando se divide el conjunto de datos en cuatro secciones. Tres cuartas partes de los datos se hallan por debajo del tercer cuartil y la otra, por arriba. También se lo llama el percentil 75 y se lo denota mediante el símbolo Q_3.

$Q_1 = \frac{1}{4}(n + 1)$-ésimo valor y $Q_3 = \frac{3}{4}(n + 1)$-ésimo valor, donde n es el número de valores en el conjunto de datos.

- A la diferencia entre el primer y el tercer cuartil se la denomina **rango intercuartil** (RIC).
- El resumen de los cinco números se puede representar gráficamente mediante un diagrama de **caja y bigotes**.



- Un valor no esperado es cualquier valor que se encuentra al menos 1,5 RIC por arriba de Q_3 o por debajo de Q_1.

Frecuencia acumulada

- Para calcular la frecuencia acumulada se van sumando las frecuencias de los datos a medida que se avanza.

Varianza y desviación típica

- La **varianza** combina todos los valores de un conjunto de datos para crear una medida de la dispersión. Es la media aritmética de los cuadrados de las diferencias entre cada dato y la media de los datos.

Continúa en la página siguiente.

- La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza y tiene las mismas unidades que los datos.
- Las fórmulas para la varianza y la desviación típica son:

σ^2 = Varianza de la población = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x-\mu\right)^2}{n}$

σ = Desviación típica de la población = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x-\mu\right)^2}{n}}$

Efecto de los cambios uniformes en los datos originales:

Si se le **suma/resta** un valor constante *k* a/de todos los números de una lista, la media aritmética aumenta/disminuye en *k* unidades, pero la desviación típica **sigue siendo la misma**.
Si se **multiplican/dividen** todos los números en la lista por un valor constante *k,* tanto la media aritmética como la desviación típica **se multiplican/dividen por *k***.

Hechos y conceptos erróneos en estadística

La estadística es una rama relativamente moderna de las matemáticas, ya que sus principales avances se han registrado en los últimos 400 años.

- Averigüemos cómo **Florence Nightingale** utilizó las estadísticas y a qué condujo esto.
- ¿Qué inventó **Francis Galton**?

- ¿Es fácil confundir μ y $\bar{x}$?
- ¿Cuál es la diferencia entre una muestra y una población?
- Las distintas medidas de posición central (media, mediana y moda), ¿expresan diferentes propiedades de los datos?
- Las medidas de posición central, ¿fueron inventadas o descubiertas? ¿De dónde provienen?
- ¿Podrían las matemáticas proponer diferentes fórmulas alternativas, todas igualmente válidas?
- ¿Qué nos dice esto acerca de las verdades matemáticas?

El libro de Darrel Huff *Cómo mentir con estadísticas* (edición en español de Ares y Mares, 2011) ha intentado exponer los trucos de los estadísticos desaprensivos, para la “autodefensa” de los “hombres honestos”.

“*El pensamiento estadístico será algún día tan necesario para una ciudadanía eficiente como la capacidad de leer y escribir*”.

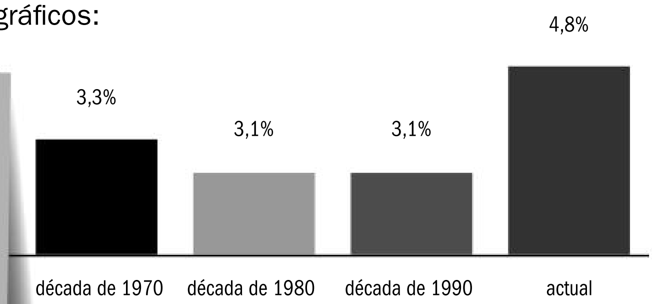
H. G. Wells (1866–1946)

- ¿Qué cree que significa lo que expresó H. G. Wells?
- ¿Está de acuerdo con él?

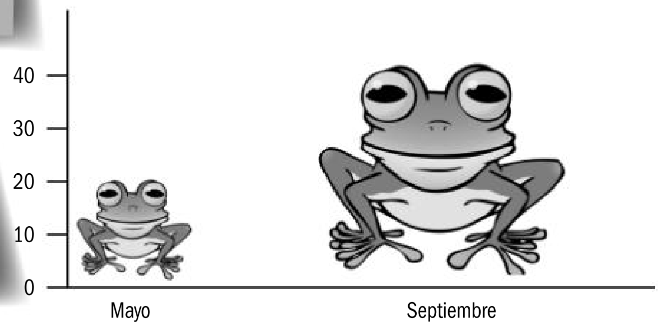
¿Qué tan fácil es mentir con las estadísticas?

- Critique estos gráficos:

Nos está yendo tanto mejor ahora que en la década de 1990.



¡Qué enorme incremento en el número de ranas!



"Hay tres clases de mentiras: las mentiras, las mentiras malditas y las estadísticas".

El autor estadounidense Mark Twain atribuye este dicho al primer ministro británico del siglo XIX, Benjamín Disraeli.

Haga una encuesta a sus amigos sobre su materia favorita.

- Utilice Microsoft Excel para producir gráficos de diferentes estilos para mostrar la situación (o dibuje gráficos a mano).
- Intente cambiar la escala del eje *y* o el valor en el que comienza el eje *y*.
- Muestre gráficos en 3D.
- Vea qué pasa con una materia que pueda tener cero votos, en un gráfico de sectores.

Estos son algunos de los "trucos" que se pueden utilizar, y cómo nos engañan:

- Mostrar una cantidad demasiado pequeña o demasiado grande de datos. Esto enmascara o exagera el cambio que se está registrando.
- Utilizar una escala no lineal. Esto puede confundir al lector que espera ver una escala lineal.
- No mostrar la escala. Mantener desinformado al lector.
- Dibujar un histograma con barras tridimensionales. Hace que la diferencia entre los datos luzca mayor.

Las estadísticas pueden ser muy útiles para proporcionar una influyente interpretación de la realidad, pero pueden también distorsionar nuestras percepciones.

- ¿Cómo se puede hacer buen y mal uso de las estadísticas, de manera que sirvan tanto para aclarar como para confundir?
- ¿Cómo podemos decidir si aceptamos las pruebas estadísticas que se nos presentan?

9 Integración

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

6.4 La integral indefinida como primitiva (antiderivada) de una función; integral indefinida de x^n ($n \in \mathbb{Q}$), $\frac{1}{x}$ y e^x; funciones compuestas de las anteriores con la función lineal $ax + b$.

Integración por comparación o sustitución en la expresión $\int f(g(x))g'(x)\,dx$

6.5 Integración con una restricción para determinar el término constante; integrales definidas tanto de forma analítica como haciendo uso de la tecnología; cálculo de áreas bajo curvas (entre la curva y el eje x); cálculo de áreas entre curvas; volúmenes de revolución alrededor del eje x.

6.6 Problemas de cinemática relativos al desplazamiento s, la velocidad v y la aceleración a; distancia total recorrida.

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

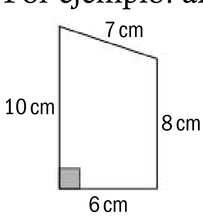
1 Escribir una serie dada en notación de sumatoria como una suma de términos

$$\sum_{i=2}^{4}(2i+1) = [2(2)+1]+[2(3)+1]+[2(4)+1]$$
$$= 5+7+9$$

Ejemplo: $\sum_{j=1}^{4} f(x_j) = f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)$

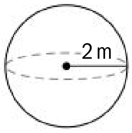
2 Usar fórmulas geométricas para hallar el área

Por ejemplo: área del trapecio



$$A = \frac{1}{2}(b_1+b_2)h$$
$$= \frac{1}{2}(10+8)(6)$$
$$= 54\,\text{cm}^2$$

3 Usar fórmulas geométricas para hallar el volumen



Por ejemplo: volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32\pi}{3}\ \text{m}^3$$

Comprobemos nuestras habilidades

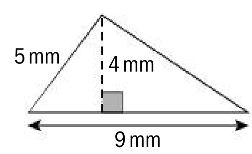
1 Escriba como una suma de términos.

a $\sum_{i=1}^{5}(2i^2)$ **b** $\sum_{k=2}^{6}(3k-2)$

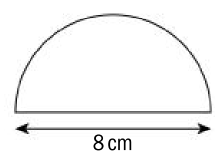
c $\sum_{i=1}^{5}[(i)^2 g(x_i)]$ **d** $\sum_{j=1}^{3}[f(x_j)(\Delta x_j)]$

2 Halle el área.

a

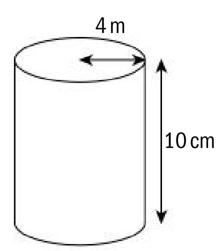


b

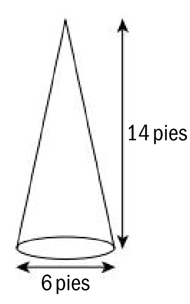


3 Halle el volumen.

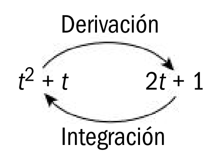
a



b



Sabemos que podemos encontrar la velocidad de un objeto en movimiento tomando la derivada de la función desplazamiento. Ahora consideraremos el proceso inverso. ¿Se puede hallar la función desplazamiento de un objeto en movimiento si se conoce la función velocidad?

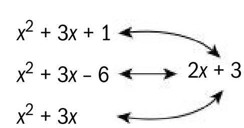


Supongamos que la función velocidad está dada por $v(t) = 2t + 1$. Necesitamos hallar una función $s(t)$ tal que $s'(t) = 2t + 1$. Si operamos "en sentido inverso", vemos que una posible función desplazamiento es $s(t) = t^2 + t$, ya que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 + t) = 2t + 1$. ¿Por qué decimos que $s(t) = t^2 + t$ es **una** posible función desplazamiento?

Se dice que la función $s(t) = t^2 + t$ es una **antiderivada** de $v(t) = 2t + 1$. El proceso de hallar una antiderivada se llama **integración**. En este capítulo aprenderemos sobre el proceso de integración y cómo la integración se puede utilizar para resolver problemas que involucran movimiento sobre una recta, área y volumen.

9.1 Antiderivadas y la integral indefinida

Supongamos que la derivada de una función f está dada por $2x + 3$. Si operamos "en sentido inverso", vemos que f puede ser la función $f(x) = x^2 + 3x$, dado que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + 3x) = 2x + 3$.



Pero hay otras funciones que tienen la misma derivada, tales como $f(x) = x^2 + 3x + 1$ o $f(x) = x^2 + 3x - 6$, dado que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + 3x + 1) = 2x + 3$ y $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + 3x - 6) = 2x + 3$.

A las funciones $f(x) = x^2 + 3x$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$ y $f(x) = x^2 + 3x - 6$ se las llama **antiderivadas** de $2x + 3$.

Cualquier función de la forma $f(x) = x^2 + 3x + C$, donde C es una constante arbitraria, es una antiderivada de $2x + 3$.

Una función F es una **antiderivada** de f si $F'(x) = f(x)$.

Investigación: antiderivada de x^n

1 Copie y complete la tabla siguiente. La primera entrada ya ha sido completada.

$f(x)$	Antiderivada de f
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
x^2	
x^3	
x^4	

2 Escriba una expresión o regla general para las antiderivadas de x^n.

3 Muestre si su regla da las antiderivadas correctas para x^{-3} y $x^{\frac{1}{2}}$.

4 ¿Hay valores de n para los cuales la regla no es válida?

Las antiderivadas de x^n vienen dadas por $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$,

donde C es una constante arbitraria y $n \neq -1$.

Así como el proceso de hallar una derivada se llama **derivación**, el proceso de hallar una antiderivada se llama **integración**.

Ejemplo 1

Halle la antiderivada de cada función.

a x^{10} **b** $\frac{1}{x^5}$ **c** $\sqrt[4]{x^3}$

Respuestas

a $\frac{1}{10+1}x^{10+1} + C = \frac{1}{11}x^{11} + C$ *Aplicar la regla $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, donde $n = 10$*

b $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$ *Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional*

$\frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4}x^{-4} + C$ *Aplicar la regla $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, donde $n = -5$*

$= -\frac{1}{4x^4} + C$ *Simplificar*

c $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$ *Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional*

$\left(\frac{1}{\frac{3}{4}+1}\right)x^{\frac{3}{4}+1} + C = \left(\frac{1}{\frac{7}{4}}\right)x^{\frac{7}{4}} + C$ *Aplicar la regla $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, donde $n = \frac{3}{4}$*

$= \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$ *Simplificar*

Recuerde:
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, etc.

Ejercitación 9A

Halle la antiderivada de cada función.

1 x^7 **2** x^4 **3** x^{-2} **4** $x^{-\frac{1}{2}}$

5 $x^{\frac{1}{3}}$ **6** $x^{\frac{2}{5}}$ **7** $\dfrac{1}{x^4}$ **8** $\dfrac{1}{x^{12}}$

9 $\sqrt[3]{x}$ **10** $\sqrt[7]{x^3}$ **11** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$ **12** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

A la antiderivación también se la conoce como **integración indefinida** y se la denota con un símbolo integral $\int \mathrm{d}x$. Por ejemplo, $\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C$ significa que la integral indefinida (o antiderivada) de x^3 es $\frac{1}{4}x^4 + C$.

Estas reglas nos ayudarán a hallar integrales indefinidas.

→ **Regla de la potencia**

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq 1$$

→ **Regla de la constante**

$$\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$$

→ **Regla de la multiplicación por una constante**

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

→ **Regla de la adición o la sustracción**

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Si $F'(x) = f(x)$, escribimos

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

A la expresión

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se la llama

integral indefinida.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se lee

"antiderivada de f con respecto a x" o "integral de f con respecto a x".

Variable de integración

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Integrando **Constante de integración**

Ejemplo 2

Halle la integral indefinida.

a $\int x^6\,\mathrm{d}x$ **b** $\int 4\,\mathrm{d}t$ **c** $\int 3x^5\,\mathrm{d}x$

d $\int (3u^4 + 6u^2 + 2)\,\mathrm{d}u$ **e** $\int (x + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$

Respuestas

a $\int x^6\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6+1}x^{6+1} + C$ *Aplicar la regla de la potencia con n = 6*

$= \frac{1}{7}x^7 + C$

b $\int 4\,\mathrm{d}t = 4t + C$ *Aplicar la regla de la constante. El dt nos dice que la variable de integración es t.*

▶ Continúa en la página siguiente.

c $\int 3x^5\,dx = 3\int x^5\,dx$	*Aplicar la regla de la multiplicación por una constante*
$= 3\left(\frac{1}{5+1}x^{5+1} + C_1\right)$	*Aplicar la regla de la potencia con n=5*
$= \frac{1}{2}x^6 + 3C_1$ $= \frac{1}{2}x^6 + C$	*$3C_1$ equivale a alguna constante arbitraria C. Generalmente, en la respuesta final escribimos esta constante arbitraria C.*
d $\int (3u^4 + 6u^2 + 2)\,du$ $= \int 3u^4\,du + \int 6u^2\,du + \int 2\,du$	*Aplicar la regla de la adición*
$= 3\int u^4\,du + 6\int u^2\,du + \int 2\,du$	*Aplicar la regla de la multiplicación por una constante*
$= 3\left(\frac{1}{4+1}u^{4+1}\right) + 6\left(\frac{1}{2+1}u^{2+1}\right) + 2u + C$	*Aplicar la regla de la potencia y la regla de la constante con variable de integración u*
$= \frac{3}{5}u^5 + 2u^3 + 2u + C$	*En realidad, obtenemos una constante de integración por cada término, pero $C_1 + C_2 + C_3$ equivale a alguna constante arbitraria C.*
e $\int (x + \sqrt[3]{x})\,dx = \int (x^1 + x^{\frac{1}{3}})\,dx$	*Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional*
$= \frac{1}{1+1}x^{1+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C$	*Aplicar la regla de la potencia a cada término*
$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$	

Ejercitación 9B

1 $\int x^3\,dx$ **2** $\int \frac{1}{t^2}\,dt$

3 $\int \sqrt[5]{x^4}\,dx$ **4** $\int 2\,du$

5 $\int (3x^2 + 2x + 1)\,dx$ **6** $\int \frac{4}{x^3}\,dx$

7 $\int (t^2 + \sqrt[4]{t})\,dt$ **8** $\int (\sqrt[3]{x^2} + 1)\,dx$

9 $\int (5x^4 + 12x^3 + 6x - 2)\,dx$ **10** $\int dt$

11 Sea $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2}$.
Halle: **a** $f'(x)$ **b** $\int f(x)\,dx$

12 Sea $g(x) = 30\sqrt[5]{x}$.
Halle: **a** $g'(x)$ **b** $\int g(x)\,dx$

Podemos verificar si la respuesta es correcta, derivando la integral obtenida y observando si coincide con el integrando dado.

$\int dt = \int 1 \times dt = \int t^0\,dt$

Al comienzo de esta sección vimos que si la velocidad de un objeto en movimiento está dada por $v(t) = 2t + 1$, entonces el desplazamiento de la partícula es $s(t) = t^2 + t + C$, para alguna constante arbitraria C. Ahora podemos escribir esto como $\int (2t + 1)\,dt = t^2 + t + C$, donde $t^2 + t + C$ se llama la **solución general** de $\int (2t + 1)\,dt$.

Supongamos que también se nos dice que, para esta partícula, la posición en el instante $t = 1$ es 6. Entonces podemos hallar C.

$$s(t) = t^2 + t + C$$
$$s(1) = 1^2 + 1 + C$$
$$6 = 2 + C$$
$$C = 4$$

Por lo tanto, $s(t) = t^2 + t + 4$. El dato de que la posición en el instante $t = 1$ es 6 se llama una **restricción**, y $t^2 + t + 4$ es una **solución particular** de $\int (2t + 1)\,dt$, dada esta restricción.

Ejemplo 3

a Si $f'(x) = 3x^2 + 2x$ y $f(2) = -3$, halle $f(x)$.

b La curva $y = f(x)$ pasa por el punto (32,30). La pendiente de la curva está dada por $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

Halle la fórmula de la curva.

c La tasa de crecimiento de una población de peces está dada por $\frac{dP}{dt} = 150\sqrt{t}$, para $0 \le t \le 5$ años. La población inicial era de 200 peces. Halle el número de peces en $t = 4$ años.

A veces la restricción se presenta como **condición inicial**, es decir, una condición cuando t es cero. Por ejemplo, si nos dicen que el desplazamiento inicial es 4, esto significa que el desplazamiento es 4 cuando $t = 0$.

Respuestas

a $f'(x) = 3x^2 + 2x$

$f(x) = \int (3x^2 + 2x)\,dx$

Aplicar la regla de la potencia para hallar la solución general de $\int (3x^2 + 2x)dx$

$f(x) = x^3 + x^2 + C$

$f(2) = 2^3 + 2^2 + C$

$-3 = 8 + 4 + C$

$C = -15$

Usar el dato de que $f(2) = -3$ para hallar C

$\therefore f(x) = x^3 + x^2 - 15$

b $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

$f(x) = \int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$

$= \int x^{-\frac{3}{5}}\,dx$

Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional, y aplicar la regla de la potencia para hallar la solución general de $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$

$f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + C$

▶ Continúa en la página siguiente.

$f(32) = \frac{5}{2}(32)^{\frac{2}{5}} + C$ $30 = 10 + C$ $C = 20$ $\therefore f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + 20$	*Usar el dato de que el punto (32,30) pertenece a la curva para hallar C*
c $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 150\sqrt{t}$	
$P(t) = \int 150\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ $= 150\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$	*Escribir de la forma $y = x^n$, con n racional, y hallar la solución general de $\int 150\sqrt{t}\,dt$*
$P(t) = 100t^{\frac{3}{2}} + C$	
$P(0) = 100(0)^{\frac{3}{2}} + C$ $200 = 0 + C$ $C = 200$ $P(t) = 100t^{\frac{3}{2}} + 200$	*Que la población inicial era de 200 peces significa que P(0) = 200. Usar esto para hallar C*
$P(4) = 100(4)^{\frac{3}{2}} + 200$ $= 1000$ Hay 1000 peces cuando $t = 4$ años.	*Hallar P cuando $t = 4$*

Ejercitación 9C

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 La derivada de la función f está dada por $f'(x) = 4x^5 + 8x$.
El gráfico de f pasa por el punto (0,8).
Halle una expresión para $f(x)$.

2 Se sabe que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^4 + \sqrt[4]{x}$ y que $y = 10$ cuando $x = 1$.
Halle y en función de x.

3 La velocidad, v m s^{-1}, de un objeto en movimiento en el tiempo t, está dada por $v(t) = 3t^2 - 2t$.
Cuando $t = 3$, el deplazamiento s del objeto es de 12 metros. Halle una expresión para s en función de t.

4 La razón a la que el volumen de una esfera está aumentando, en cm^3 s^{-1}, está dada por $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2\pi(4t^2 + 4t + 1)$, para $0 \le t \le 12$.
El volumen inicial era de π cm^3.
Halle el volumen de la esfera cuando $t = 3$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 La velocidad, v m s^{-1}, de un objeto en movimiento en el tiempo t segundos está dada por $v(t) = 20 - 5t$.

a Halle la aceleración del objeto, en m s^{-2}.

b El desplazamiento inicial s es de 5 metros. Halle una expresión para s en función de t.

9.2 Más sobre integrales indefinidas

La regla de la potencia para la integración nos dice que $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, $n \neq -1$. La regla no funciona cuando $n = -1$ ya que llevaría a la división por 0. Entonces, ¿a qué equivale la integral $\int x^{-1} \, dx$?

¿Por qué decimos que $\frac{1}{0}$ no está definida?

¿Es $\frac{0}{0}$ lo mismo que $\frac{1}{0}$?

¿Por qué o por qué no?

Hemos visto que $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ para $x > 0$, por lo que

$$\rightarrow \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C, \; x > 0$$

También $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$, por lo tanto

$$\rightarrow \int e^x \, dx = e^x + C$$

Ejemplo 4

Halle la integral indefinida.

a $\int \frac{4}{x} \, dx$ **b** $\int \frac{e^t}{2} \, dt$

Respuestas

a $\int \frac{4}{x} \, dx = 4 \int \frac{1}{x} \, dx$	*Aplicar la regla de la multiplicación por una constante*
$= 4\ln x + C, \; x > 0$	*Usar el dato de que* $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$, $x > 0$
b $\int \frac{e^t}{2} \, dt = \frac{1}{2} \int e^t \, dt$	*Aplicar la regla de la multiplicación por una constante*
$= \frac{1}{2} e^t + C$	*Usar el dato de que* $\int e^x \, dx = e^x + C$

Reglas de integración

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \; x > 0$

$\int e^x \, dx = e^x + C$

Para algunas integrales, tales como $\int (x^2 + 1)^2 \, dx$, $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x} \, dx$ y $\int \ln(e^{2t-1}) \, dt$, tal vez tengamos que reescribir el integrando, ya sea desarrollando los paréntesis, separando, los términos o simplificando, antes de integrar. El próximo ejemplo nos muestra cómo.

Ejemplo 5

Halle la integral indefinida.

a $\int (x^2+1)^2\,dx$ **b** $\int \frac{3x^2+2x+1}{x}\,dx$ **c** $\int \ln(e^{2t-1})\,dt$

Respuestas

a $\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4+2x^2+1)\,dx$ *Desarrollar y luego integrar cada término*

$= \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C$

b $\int \frac{3x^2+2x+1}{x}\,dx$

$= \int \left(\frac{3x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$ *Separar los términos*

$= \int \left(3x+2+\frac{1}{x}\right)dx$ *Simplificar y luego integrar cada término*

$= \frac{3}{2}x^2 + 2x + \ln x + C,\ x > 0$

c $\int \ln(e^{2t-1})\,dt = \int (2t-1)\,dt$ *Simplificar usando el dato de que e^x y ln x son funciones inversas*

$= t^2 - t + C$

Ejercitación 9D

Halle la integral indefinida.

1 $\int \frac{2}{x}\,dx$ **2** $\int 3e^x\,dx$

3 $\int \frac{1}{4t}\,dt$ **4** $\int e^{\ln x}\,dx$

5 $\int (2x+3)^2\,dx$ **6** $\int \frac{2x^3+6x^2+5}{x}\,dx$

7 $\int \ln e^{u^2}\,du$ **8** $\int (x-1)^3\,dx$

9 $\int \frac{e^x+1}{2}\,dx$ **10** $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

Ahora consideraremos integrales indefinidas de funciones que son composiciones con la función lineal $ax + b$.

➔ $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\right) + C$

➔ $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

➔ $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b)+C,\ x > -\frac{b}{a}$

Podemos verificar cada regla, derivando el miembro derecho de la igualdad y mostrando que se obtiene el integrando.

Debemos tener en cuenta que ln($ax + b$) está definido cuando $ax + b > 0$ o $x > -\frac{b}{a}$.

Ejemplo 6

Halle la integral indefinida.

a $\int (3x+1)^4 \, dx$ **b** $\int e^{2x+5} \, dx$ **c** $\int \frac{3}{4x-2} \, dx$ **d** $\int \frac{1}{(6x+3)^4} \, dx$

Respuestas

a $\int (3x+1)^4 \, dx$

Hallar $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\right) + C$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}(3x+1)^5\right) + C$

para $a=3$, $b=1$ *y* $n=4$

$= \frac{1}{15}(3x+1)^5 + C$

Verificar, derivando la integral obtenida

$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{15}(3x+1)^5\right] = \frac{1}{15}(5(3x+1)^4(3))$

$= (3x+1)^4$

b $\int e^{2x+5} dx = \frac{1}{2}e^{2x+5} + C$

Hallar $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ *para* $a=2$ *y* $b=5$

Verificar, derivando la integral obtenida

$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}e^{2x+5}\right] = \frac{1}{2}[e^{2x+5}(2)] = e^{2x+5}$

c $\int \frac{3}{4x-2} dx = 3\int \frac{1}{4x-2} dx$

Aplicar la regla de la multiplicación por una constante

$= 3\left[\frac{1}{4}\ln(4x-2)\right] + C, x > \frac{1}{2}$

Hallar $\frac{1}{a}\ln(ax+b)$ *para* $a=4$ *y* $b=-2$

$= \frac{3}{4}\ln(4x-2) + C, \ x > \frac{1}{2}$

Verificar, derivando la integral obtenida

$\frac{d}{dx}\left[\frac{3}{4}\ln(4x-2)\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4x-2}(4)\right)$

$= \frac{3}{4x-2}$

d $\int \frac{1}{(6x+3)^4} dx = \int (6x+3)^{-4} dx$

Escribir de la forma $y = x^n$, *con n racional*

$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{-3}(6x+3)^{-3}\right) + C$

Hallar $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\right) + C$

para $a=6$, $b=3$ *y* $n=-4$

$= -\frac{1}{18(6x+3)^3} + C$

Verificar, derivando la integral obtenida

$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{18(6x+3)^3}\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{18}(6x+3)^{-3}\right]$

$= -\frac{1}{18}(-3(6x+3)^{-4}(6)) = \frac{1}{(6x+3)^4}$

Reglas de integración

$\int (ax+b)^n \, dx =$

$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\right) + C$

$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

$\int \frac{1}{ax+b} \, dx =$

$\frac{1}{a}\ln(ax+b) + C,$

$x > -\frac{b}{a}$

Ejercitación 9E

Halle la integral indefinida en las preguntas 1 a 10.

1 $\int (2x+5)^2\,dx$ **2** $\int (-3x+5)^3\,dx$ **3** $\int e^{\frac{1}{2}x-3}\,dx$

4 $\int \frac{1}{5x+4}\,dx$ **5** $\int \frac{3}{7-2x}\,dx$ **6** $\int 4e^{2x+1}\,dx$

7 $\int 6(4x-3)^7\,dx$ **8** $\int (7x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$ **9** $\int \left(e^{4x}+\frac{4}{3x-5}\right)dx$

10 $\int \frac{2}{3(4x-5)^3}\,dx$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

11 Sabiendo que $f(x) = (4x+5)^3$, halle:

a $f'(x)$ **b** $\int f(x)\,dx$

12 La velocidad v de una partícula en el tiempo t está dada por $v(t) = e^{-3t} + 6t$. El desplazamiento de la partícula en el tiempo t es s. Sabiendo que $s = 4$ metros cuando $t = 0$ segundos, exprese s en función de t.

El método de sustitución

Usamos el **método de sustitución** para evaluar integrales de la forma $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$. El siguiente ejemplo muestra cómo hacerlo.

Ejemplo 7

Halle la integral indefinida.

a $\int (3x^2+5x)^4(6x+5)\,dx$ **b** $\int \sqrt[3]{x^2-3x}\,(2x-3)\,dx$

c $\int xe^{4x^2+1}\,dx$ **d** $\int \frac{12x^3-3x^2}{3x^4-x^3}\,dx$

Respuestas

a $\int (3x^2+5x)^4(6x+5)\,dx$

Esta integral es de la forma $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$, *donde* $g(x) = 3x^2+5x$ *y* $g'(x) = 6x+5$.

$= \int u^4 \frac{du}{dx}\,dx = \int u^4\,du$

Sea $u = 3x^2+5x$; *entonces* $\frac{du}{dx} = 6x+5$. *Reemplazar*

$= \frac{1}{5}u^5 + C$

Simplificar e integrar

$= \frac{1}{5}(3x^2+5x)^5 + C$

Reemplazar u por $3x^2+5x$

Continúa en la página siguiente.

	Verificar, derivando la integral obtenida $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}(3x^2+5x)^5\right]$ $= \frac{1}{5}(5(3x^2+5x)^4(6x+5))$ $= (3x^2+5x)^4(6x+5)$
b $\int \sqrt[3]{x^2-3x}\,(2x-3)\,\mathrm{d}x$	*Esta integral es de la forma* $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$, *donde* $g(x) = x^2 - 3x$ *y* $g'(x) = 2x - 3$.
$= \int u^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$	*Sea* $u = x^2 - 3x$; *entonces* $\frac{du}{dx} = 2x - 3$. *Reemplazar*
$= \int u^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}u$	*Simplificar e integrar*
$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C$	
$= \frac{3}{4}(x^2-3x)^{\frac{4}{3}} + C$	*Reemplazar u por* $x^2 - 3x$ *Verificar, derivando la integral obtenida* $\frac{d}{dx}\left[\frac{3}{4}(x^2-3x)^{\frac{4}{3}}\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}(x^2-3x)^{\frac{1}{3}}(2x-3)\right)$ $= (x^2-3x)^{\frac{1}{3}}(2x-3) = \sqrt[3]{x^2-3x}\,(2x-3)$
c $\int x\mathrm{e}^{4x^2+1}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{8}\times 8x\right)\mathrm{e}^{4x^2+1}\mathrm{d}x$ $= \frac{1}{8}\int \mathrm{e}^{4x^2+1}(8x)\,\mathrm{d}x$	*Si* $g(x) = 4x^2 + 1$, *entonces* $g'(x) = 8x$. *Reescribir el integrando de manera que quede de la forma* $\int f(g(x))g'(x)\,dx$
$= \frac{1}{8}\int \mathrm{e}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$	*Sea* $u = 4x^2 + 1$; *entonces* $\frac{du}{dx} = 8x$. *Reemplazar*
$= \frac{1}{8}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u$	*Simplificar e integrar*
$= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{u} + C$	
$= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{4x^2+1} + C$	*Reemplazar u por* $4x^2 + 1$
d $\int \frac{12x^3-3x^2}{3x^4-x^3}\,\mathrm{d}x$	*Esta integral es de la forma* $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, *donde* $g(x)=3x^4-x^3$ *y* $g'(x)=12x^3-3x^2$.
$\int \frac{12x^3-3x^2}{3x^4-x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{du}{dx}}{u}\,\mathrm{d}x$	*Sea* $u = 3x^4 - x^3$; *entonces* $\frac{du}{dx} = 12x^3 - 3x^2$. *Reemplazar*
$= \int \frac{1}{u}\,du$ $= \ln u + C,\ u > 0$	*Simplificar e integrar*
$= \ln(3x^4 - x^3) + C,\ 3x^4 - x^3 > 0$	*Reemplazar u por* $3x^4 - x^3$

Con la práctica podremos llegar a hallar integrales indefinidas de la forma $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$ por comparación. Esto es, podremos decidir cuál es la función que corresponde a u, verificar si la derivada de u es el otro factor del integrando y luego integrar mentalmente f con respecto a u.

Ejercitación 9F

1 $\int (2x^2 + 5)^2 (4x)\,\mathrm{d}x$

2 $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x}\,\mathrm{d}x$

3 $\int (6x + 5)\sqrt{3x^2+5x}\,\mathrm{d}x$

4 $\int 4x^3 \mathrm{e}^{x^4}\,\mathrm{d}x$

5 $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

6 $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

7 $\int x^2(2x^3 + 5)^4\,\mathrm{d}x$

8 $\int \frac{2x+1}{\sqrt[4]{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$

9 $\int (8x^3 - 4x)(x^4 - x^2)^3\,\mathrm{d}x$

10 $\int \frac{4-3x^2}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

11 Sea $f'(x) = \frac{8x}{4x^2+1}$. Sabiendo que $f'(0) = 4$, halle $f(x)$.

12 La pendiente de una curva está dada por $f'(x) = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}$. La curva pasa por el punto (1, 5e). Halle una expresión para $f(x)$.

9.3 Área e integrales definidas

Esta sección trata sobre la integral definida, que se escribe $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, y su relación con el área bajo la curva.

Las integrales indefinidas son una familia de funciones que difieren en una constante. Las integrales definidas son números reales. En la próxima sección aprenderemos acerca de la relación entre integrales definidas e indefinidas y cómo evaluar una integral definida sin una calculadora de pantalla gráfica (CPG).

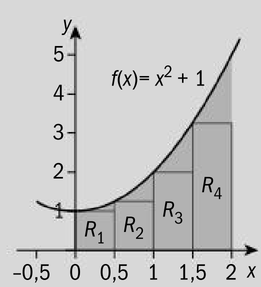
Investigación: área y la integral definida

1 Considere el área delimitada por la función $f(x) = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$ y el eje x que está sombreada en el gráfico.

a **i** Anote el ancho de cada uno de los cuatro rectángulos que se muestran en el gráfico.

ii Calcule la altura de cada uno de los cuatro rectángulos.

iii Halle la suma de las áreas de los cuatro rectángulos, para hallar un límite inferior del área de la región sombreada.

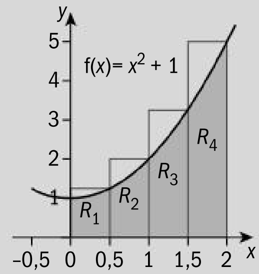


Continúa en la página siguiente.

b **i** Anote el ancho de los cuatro rectángulos que se muestran en el gráfico.

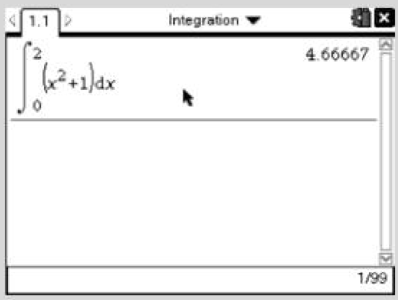
ii Calcule la altura de cada uno de los cuatro rectángulos.

iii Halle la suma de las áreas de los cuatro rectángulos, para hallar un límite superior del área de la región.



c Use una CPG para hallar la **integral definida** $\int_0^2 (x^2+1)dx$. Compare el resultado con sus respuestas en los apartados **a** y **b**.

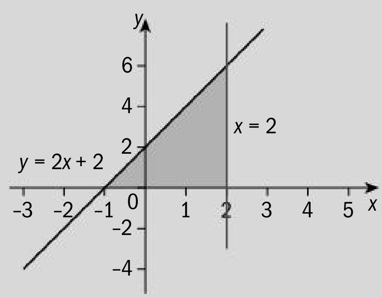
¿Qué piensa que podría representar la integral definida?



La CPG usa un método de aproximación para determinar los valores de las integrales definidas, por lo que los valores de la CPG no son siempre exactos.

No pudimos usar una fórmula geométrica para hallar el área de la región en la pregunta 1; solamente pudimos usar fórmulas geométricas para obtener una aproximación del área. Ahora consideraremos algunas regiones cuyas áreas se pueden hallar geométricamente.

2 Halle el área de la región sombreada bajo la recta $f(x) = 2x + 2$ entre $x = -1$ y $x = 2$, utilizando una fórmula geométrica. Luego, escriba una integral definida que piense que pueda representar el área. Evalúe la integral en una CPG y compare las respuestas.

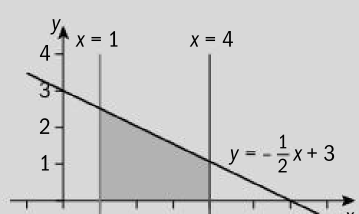


3 Nos referimos al área entre una función f y el eje x como el **área bajo la curva**. Si $f(x)$ es una función no-negativa para $a \leq x \leq b$, escriba la integral definida que da el área bajo la curva f desde $x = a$ hasta $x = b$.

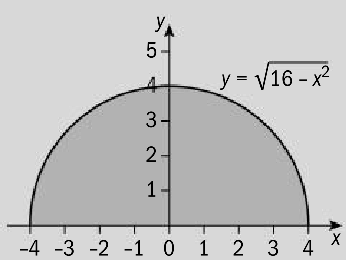
4 Verifique que su respuesta de la pregunta 3 es válida para los siguientes casos, hallando el área mediante el uso de una fórmula geométrica, y luego escribiendo una integral definida y evaluándola en una GDC.

En matemáticas una **curva** es un gráfico en un plano de coordenadas, por lo tanto las curvas incluyen a las rectas.

a $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ desde $x = 1$ hasta $x = 4$



b $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ desde $x = -4$ hasta $x = 4$



En la investigación hallamos una aproximación para el área bajo la curva $f(x) = x^2 + 1$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$ sumando las áreas de cuatro rectángulos. Usando la notación de sumatoria podemos expresar esto como $\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x_i$, donde $f(x_i)$ representa la altura de cada rectángulo y Δx_i representa el ancho de cada rectángulo.

Para obtener mejores aproximaciones del área podemos usar más rectángulos. Usando un número infinito de rectángulos,

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ conduce al área exacta.

Si una función f está definida en $a \le x \le b$ y existe el

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, decimos que f es **integrable** en $a \le x \le b$.

Llamamos a este límite la **integral definida** y la denotamos con

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b y\,\mathrm{d}x$. El número a es el **límite inferior** de integración y el número b es el **límite superior** de integración.

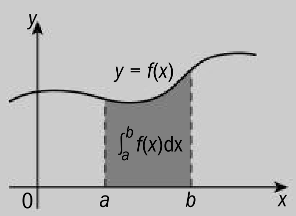
Aproximaciones para el área bajo $f(x) = x^2 + 1$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$, para diferentes números de rectángulos.

# Rectángulos	Suma inferior	Suma superior
4	3,75	5,75
10	4,28	5,08
50	4,5872	4,7472
100	4,6268	4,7068
500	4,65867	4,67467

Área exacta = $\int_0^2 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{3} \approx 4{,}66667$

Observamos que tanto la suma superior como la suma inferior parecen acercarse a 4,66667.

➔ Cuando f es una función no-negativa en $a \le x \le b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ da el área bajo la curva desde $x = a$ hasta $x = b$.



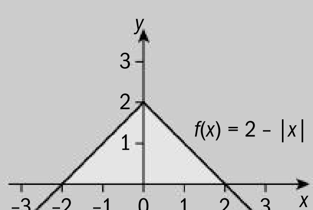
El símbolo $\int$ es una S estirada y también se usa para indicar una suma. La notación de la integral definida fue introducida por el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz hacia el final del siglo XVII.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lee "la integral de a a b de $f(x)$ con respecto a x".

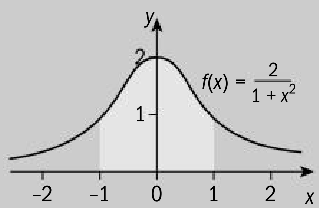
Ejemplo 8

Escriba una integral definida que dé el área de la región sombreada y evalúela usando una CPG. De ser posible, verifique la respuesta usando una fórmula geométrica para hallar el área.

a



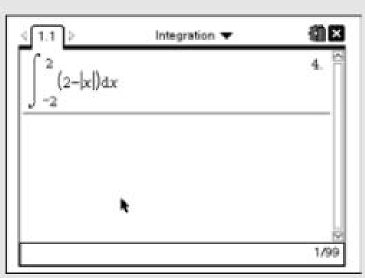
b



Respuestas

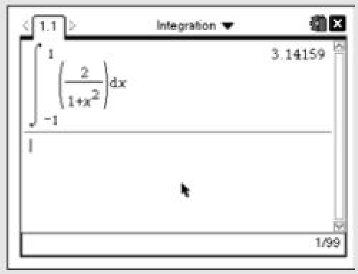
a $\int_{-2}^{2} (2 - |x|)\,\mathrm{d}x = 4$

Área $= \frac{1}{2}(4 \times 2) = 4$



La función corta al eje x en –2 y 2, y forma un triángulo. Por lo tanto, los límites de integración son –2 y 2. La fórmula del área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}(b \times h)$.

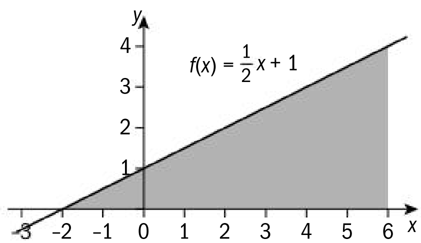
▶ Continúa en la página siguiente.

b $\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 3{,}14$		*La región está delimitada por la función $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, el eje x y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$. Por lo tanto, los límites de integración son -1 y 1. El área no puede ser determinada mediante una fórmula geométrica.*

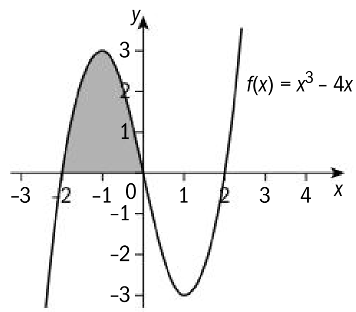
Ejercitación 9G

Escriba una integral definida que dé el área de la región sombreada y evalúela usando su CPG. De ser posible, verifique la respuesta usando una fórmula geométrica para hallar el área.

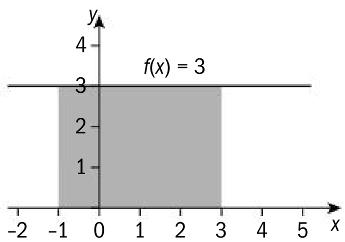
1



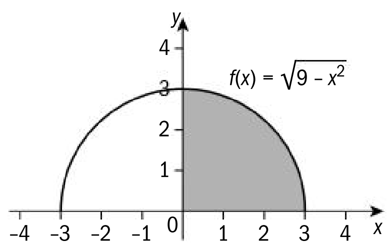
2



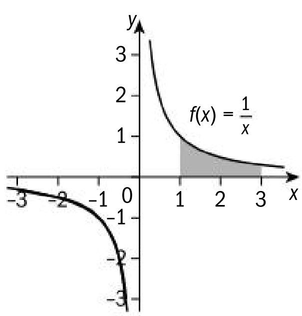
3



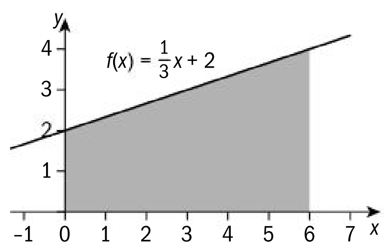
4



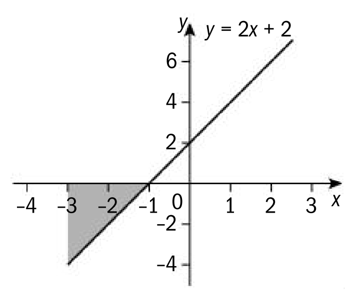
5



6



Cuando f es una función no-negativa en $a \le x \le b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ da el área bajo la curva desde $x = a$ hasta $x = b$.

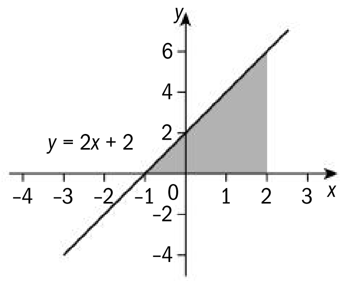


Considere lo que ocurre cuando f no es no-negativa.

i $\int_{-3}^{-1} (2x + 2)\,\mathrm{d}x$

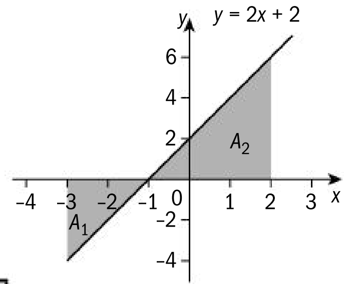
El área del triángulo sombreado es 4, pero $\int_{-3}^{-1} (2x + 2)\,\mathrm{d}x = -4$, ya que $f(x) < 0$ cuando $-3 < x < -1$.

ii $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x+2)\,dx$



$\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x+2)\,dx = 9$ es el área del triángulo sombreado, dado que f es una función no-negativa en $-1 \le x \le 2$.

iii $\displaystyle\int_{-3}^{2}(2x+2)\,dx$



$\displaystyle\int_{-3}^{2}(2x+2)\,dx = 5$ porque es igual a

$\displaystyle\int_{-3}^{-1}(2x+2)\,dx + \int_{-1}^{2}(2x+2)\,dx = -4 + 9 = 5$. Esto es el simétrico del área de la región rotulada A_1 más el área de la región rotulada A_2.

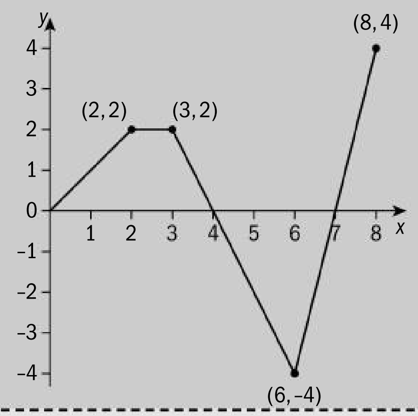
Esto ilustra una de las propiedades de las integrales definidas.

$$\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 9

El gráfico de f consiste en una línea de segmentos como se muestra en la figura.

Evalúe $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx$ usando fórmulas geométricas.



Respuesta

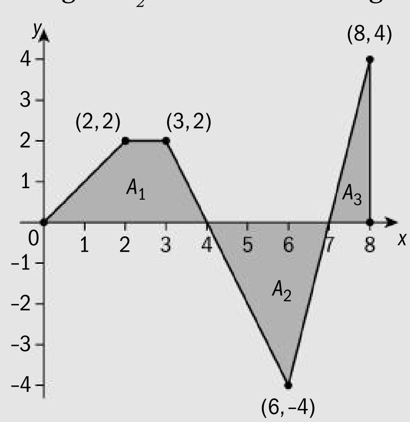
$$\int_0^8 f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

$$= \frac{1}{2}(4+1)(2) - \frac{1}{2}(3)(4) + \frac{1}{2}(1)(4)$$

$$= 5 - 6 + 2$$

$$= 1$$

Hallar el área del trapecio A_1 menos el área del triángulo A_2 más el área del triángulo A_3



→ Algunas propiedades de las integrales definidas

1 $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

2 $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3 $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

No hace falta saber los números que acompañan a estas integrales, solo las propiedades.

Ejemplo 10

Sabiendo que $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 12$, $\int_0^2 g(x)\,dx = -3$ y $\int_0^4 g(x)\,dx = 6$, evalúe estas integrales definidas sin usar la CPG.

a $\int_0^2 (3f(x) - g(x))\,dx$ **b** $\int_2^2 g(x)\,dx + \int_5^2 f(x)\,dx$

c $\int_0^5 f(x)\,dx$ **d** $\int_2^4 g(x)\,dx$ **e** $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{2} f(x+3)\,dx$

Respuestas

a $\int_0^2 (3f(x) - g(x))\,dx$

$= \int_0^2 3f(x)\,dx - \int_0^2 g(x)\,dx$ *Aplicar propiedad 2*

$= 3\int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^2 g(x)\,dx$ *Aplicar propiedad 1*

$= 3(4) - (-3)$ *Reemplazar y evaluar*

$= 15$

b $\int_2^2 g(x)\,dx + \int_5^2 f(x)\,dx$

$= 0 - \int_2^5 f(x)\,dx$ *Aplicar propiedad 3 al primer término y propiedad 4 al segundo término*

$= 0 - 12$ *Reemplazar y evaluar*

$= -12$

c $\int_0^5 f(x)\,dx$

$= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx$ *Aplicar propiedad 5*

$= 4 + 12$ *Reemplazar y evaluar*

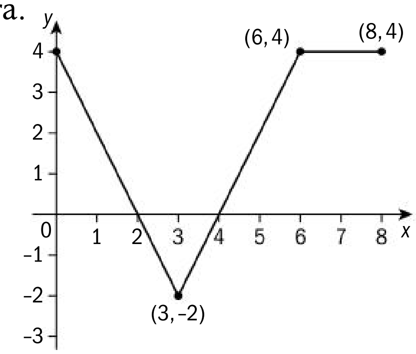
$= 16$

▶ Continúa en la página siguiente.

d $\int_0^2 g(x)\,dx + \int_2^4 g(x)\,dx$	*Aplicar propiedad 5*
$= \int_0^4 g(x)\,dx$	
Por lo tanto $\int_2^4 g(x)\,dx$	
$= \int_0^4 g(x)\,dx - \int_0^2 g(x)\,dx$	*Reordenar los términos*
$= 6 - (-3)$	*Reemplazar y evaluar*
$= 9$	
e $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{2} f(x+3)\,dx$	*Aplicar propiedad 1*
$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1} f(x+3)\,dx$	*El gráfico de f (x + 3) es el resultado de trasladar el gráfico de f (x) a la izquierda 3 unidades. Los límites de integración, x = 0 y x = 2, se trasladan a x = –3 y x = –1. Por lo tanto, los valores de estas integrales son iguales.*
$= \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$	
$= \frac{1}{2}(4)$	
$= 2$	

Ejercitación 9H

El gráfico de f consiste en líneas de segmentos como se muestra. Evalúe las integrales definidas en las preguntas 1 y 2 usando fórmulas geométricas.



1 $\int_4^8 f(x)\,dx$

2 $\int_0^8 f(x)\,dx$

Sabiendo que $\int_1^6 f(x)\,dx = -3$, $\int_1^{10} f(x)\,dx = 8$, $\int_1^6 g(x)\,dx = 4$, y $\int_6^{10} g(x)\,dx = 8$, evalúe las integrales definidas en las preguntas 3 a 10.

3 $\int_1^6 \left(2f(x) + \frac{1}{2}g(x)\right)dx$

4 $\int_{10}^6 g(x)\,dx$

5 $\int_1^{10} g(x)\,dx$

6 $\int_{10}^{10} f(x)\,dx$

7 $\int_6^{10} f(x)\,dx$

8 $\int_5^{10} f(x-4)\,dx$

9 $\int_6^{10} (g(x) + 3)\,dx$

10 $\int_{-1}^4 3g(x+2)\,dx$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

11 Sabiendo que $\int_0^2 h(x)\,dx = -2$ y $\int_2^5 h(x)\,dx = 6$, deduzca el valor de:

a $\int_0^5 h(x)\,dx$ **b** $\int_2^5 (h(x) + 2)\,dx$

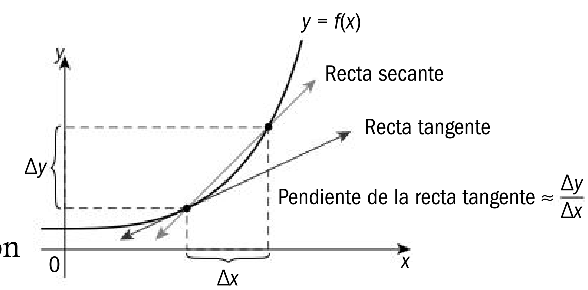
12 Sea f una función tal que $\int_0^4 f(x)\,dx = 16$.

a Deduzca el valor de $\int_0^4 \frac{1}{4} f(x)\,dx$.

b **i** Si $\int_a^b f(x-3)\,dx = 16$, escriba el valor de a y el de b.

ii Si $\int_0^4 (f(x) + k)\,dx = 28$, escriba el valor de k.

9.4 Teorema fundamental del cálculo



El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, la pendiente de una recta secante, nos da una aproximación para la pendiente de una recta tangente. El producto $(\Delta y)(\Delta x)$, el área de un rectángulo, nos da una aproximación para el área bajo la curva. Trabajando independientemente, Isaac Newton y Gottfried Leibniz llegaron a la conclusión de que, así como la multiplicación y la división son operaciones inversas, la derivación y la integración definida también lo son.

Este hecho se establece en el siguiente teorema.

> → **Teorema fundamental del cálculo**
>
> Si f es una función continua en el intevalo $a \le x \le b$ y F es una primitiva (antiderivada) de f en $a \le x \le b$, entonces
> $$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

La notación $[F(x)]_a^b$ significa $F(b) - F(a)$.

Considere la integral definida $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$ que evaluó usando la CPG en la investigación de la última sección. Esto dio el área bajo la curva $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

Hallamos que $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx \approx 4{,}67$.

Cuando aplicamos el teorema fundamental del cálculo, aunque F puede ser cualquier miembro de la familia de las funciones primitivas de f, elegimos usar la "más simple", es decir, aquella cuya constante de integración es $C = 0$. Podemos hacer esto porque, para cualquier C,
$f(x)\,dx = [F(x) + C]_a^b$
$= [F(b) + C] - [F(a) + C]$
$= F(b) - F(a)$

Usando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos:

$$\int_0^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}(2^3)+2\right) - \left(\frac{1}{3}(0^3)+0\right)$$
$$= \frac{14}{3}$$
$$\approx 4{,}67$$

$\frac{1}{3}x^3 + x$ es la primitiva más simple de $x^2 + 1$. Evaluamos $\frac{1}{3}x^3 + x$ en $x = 2$ y en $x = 0$, luego hallamos la diferencia.

Ejemplo 11

Evalúe estas integrales definidas sin usar la CPG.

a $\int_{-2}^{1} (u-1)\,\mathrm{d}u$ **b** $\int_{2}^{3} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ **c** $\int_{1}^{3} 4x^2(x-1)\,\mathrm{d}x$

Respuestas

a $$\int_{-2}^{1} (u-1)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}u^2 - u\right]_{-2}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{2}(1^2)-1\right) - \left(\frac{1}{2}(-2)^2-(-2)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}-1\right) - (2+2) = -\frac{9}{2}$$

Hallar la primitiva más simple de $u - 1$

Evaluar $\frac{1}{2}u^2 - u$ en $u = 1$ y $u = -2$, y luego hallar la diferencia

b $$\int_{2}^{3} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_2^3$$
$$= \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

Recordemos que $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$.

c $$\int_{1}^{3} 4x^2(x-1)\,\mathrm{d}x = 4\int_{1}^{3} (x^3 - x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$
$$= 4\left[\left(\frac{1}{4}(3^4) - \frac{1}{3}(3^3)\right) - \left(\frac{1}{4}(1^4) - \frac{1}{3}(1^3)\right)\right]$$
$$= 4\left[\left(\frac{81}{4} - 9\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{136}{3}$$

Reescribir el integrando para poder integrar

Ejercitación 9I

Evalúe las integrales definidas en las preguntas 1 a 8.

1 $\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x$

2 $\int_{-1}^{1} (u^2 - 2)\,\mathrm{d}u$

3 $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x$

4 $\int_0^8 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}x$

5 $\displaystyle\int_0^3 4e^x \, dx$

6 $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx$

7 $\displaystyle\int_0^1 (t+3)(t+1) \, dt$

8 $\displaystyle\int_4^9 \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} dx$

La fuerza entre cargas eléctricas depende de la cantidad de carga y la distancia entre ellas. ¿Cómo se usan las integrales definidas para calcular el trabajo realizado en la separación de cargas?

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

9 Sabiendo que $\displaystyle\int_0^2 f(x) \, dx = 8$

a Escriba el valor de $\displaystyle\int_0^2 3f(x) \, dx$.

b Halle el valor de $\displaystyle\int_0^2 (f(x) + x^2) \, dx$.

10 Sabiendo que $\displaystyle\int_2^k \frac{1}{x} dx = \ln 6$, halle el valor de k.

Ahora veremos las integrales definidas que implican composiciones con la función lineal $ax + b$, o el método de sustitución.

Ejemplo 12

Evalúe la integral definida sin usar la CPG.

a $\displaystyle\int_1^5 \left(e^{2x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

b $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x-3)^3 \, dx$

c $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{3x+16} \, dx$

d $\displaystyle\int_0^1 (2x^2+1)^3 (4x) \, dx$

Respuestas

a $\displaystyle\int_1^5 \left(e^{2x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= \int_1^5 (e^{2x} + x^{-2}) \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{x}\right]_1^5$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{2(5)} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}e^{2(1)} - \frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{10} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{4}{5}$$

o $\dfrac{5e^{10} - 5e^2 + 8}{10}$

Recordemos que $\displaystyle\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$.

▶ Continúa en la página siguiente.

b $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x-3)^3\,dx$	*Recordemos que* $\displaystyle\int (ax+b)^n\,dx =$
$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(2x-3)^4\right)\right]_{-1}^{1}$	$\displaystyle\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\right) + C.$
$\displaystyle= \left(\frac{1}{8}(2(1)-3)^4\right)-\left(\frac{1}{8}(2(-1)-3)^4\right)$	
$\displaystyle= \frac{1}{8}-\frac{625}{8} = -78$	
c $\displaystyle\int_{0}^{3}\sqrt{3x+16}\,dx$	*Recordemos que* $\displaystyle\int (ax+b)^n\,dx =$
$\displaystyle= \int_{0}^{3}(3x+16)^{\frac{1}{2}}\,dx$	$\displaystyle\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\right) + C.$
$\displaystyle= \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(3x+16)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_{0}^{3}$	
$\displaystyle= \frac{2}{9}\left((3(3)+16)^{\frac{3}{2}}-(3(0)+16)^{\frac{3}{2}}\right)$	
$\displaystyle= \frac{2}{9}\left(25^{\frac{3}{2}}-16^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{122}{9}$	*Recordemos que* $25^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = 125$ *y* $16^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{16})^3 = 64.$
d $\displaystyle\int_{0}^{1}(2x^2+1)^3(4x)\,dx$	
$\displaystyle= \int_{x=0}^{x=1}u^3\frac{du}{dx}\,dx$	*Sean* $u = 2x^2+1$ *y* $\dfrac{du}{dx} = 4x$*. Reemplazar*
$\displaystyle= \int_{u=1}^{u=3}u^3\,du = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_{1}^{3}$	*Hay que cambiar los límites de integración para poder luego evaluar la integral en función de u. Cuando* $x = 0$, $u = 2(0^2)+1 = 1$, *y cuando* $x = 1$, $u = 2(1^2)+1 = 3$.
$\displaystyle= \frac{1}{4}[(3)^4-(1)^4] = 20$	

Ejercicio 9J

Evalúe las integrales definidas de las preguntas 1 a 8.

1 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{t+2}\,dt$

2 $\displaystyle\int_{3}^{4}e^{-x+1}\,dx$

3 $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x+1)^3\,dx$

4 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})\,dx$

5 $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{6x+4}\,dx$

6 $\displaystyle\int_{1}^{2}(x^2+x)^3(2x+1)\,dx$

7 $\displaystyle\int_{3}^{4}\frac{8t-6}{2t^2-3t-2}\,dt$

8 $\displaystyle\int_{0}^{1}4xe^{x^2+3}\,dx$

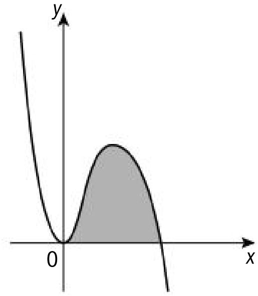
¿Cuáles son algunas aplicaciones del centro de masa (centroide)? ¿Cómo pueden usarse las integrales definidas para hallar el centroide de un área curva?

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

9 El diagrama muestra parte del gráfico de $f(x) = -2x^2(x-2)$.

a Escriba una integral que represente el área de la región sombreada.

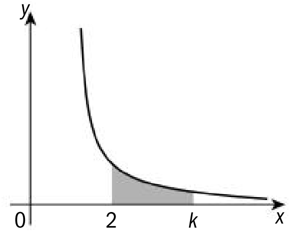
b Halle el área de la región sombreada.



10 El diagrama muestra parte del gráfico de $y = \dfrac{1}{x-1}$.

El área de la región sombreada es de ln 4 unidades.

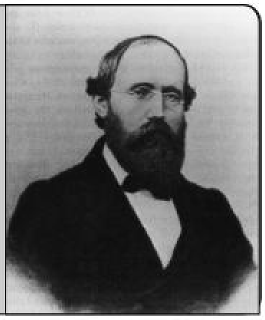
Halle el valor exacto de k.



9.5 Área entre dos curvas

En esta sección ampliaremos el concepto de área *bajo* la curva al de área *entre* dos curvas.

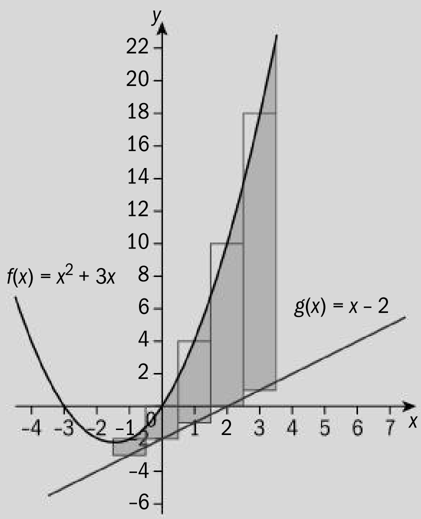
Las sumas de áreas de rectángulos que se usan para aproximar áreas se llaman sumas de Riemann, en honor al matemático alemán Georg Riemann. Reimann demostró la existencia de los límites de tales sumas.



▶ Georg Riemann (1826–1866)

Investigación: área entre dos curvas

Considere el área entre las dos curvas
$f(x) = x^2 + 3x$ y
$g(x) = x - 2$ desde $x = -1{,}5$ hasta $x = 3{,}5$.



Continúa en la página siguiente.

1 Copie y complete la tabla con las dimensiones y el área de cada uno de los cinco rectángulos mostrados en el gráfico.

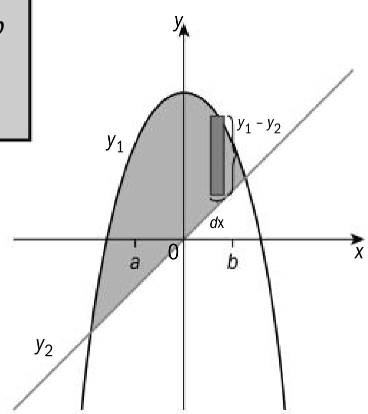
Intervalo	Ancho	Altura	Área
$-1{,}5 \le x < -0{,}5$	1	$f(-1) - g(-1) = -2 - (-3) = 1$	$1(1) = 1$
$-0{,}5 \le x < 0{,}5$			
$0{,}5 \le x < 1{,}5$			
$1{,}5 \le x < 2{,}5$			
$2{,}5 \le x < 3{,}5$			

Tenga en cuenta que, independientemente de que *f* y *g sean* positivas, negativas o cero, la altura del rectángulo está siempre dada por $f(x)$, la curva superior, menos $g(x)$, la curva inferior.

2 Halle un valor aproximado del área entre las curvas, sumando las áreas de los rectángulos.

3 Escriba la integral definida que considere que puede ser usada para hallar el área exacta entre las dos curvas $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x - 2$, desde $x = -1{,}5$ hasta $x = 3{,}5$.
Evalúe la integral en la CPG.
Compare la respuesta con el valor aproximado que obtuvo en la pregunta 2.

→ Si y_1 y y_2 son continuas en $a \le x \le b$ e $y_1 \ge y_2$ para todo x en $a \le x \le b$, entonces el área entre y_1 e y_2 desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por $\int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$.



Altura de cada rectángulo = "curva superior" – "curva inferior"
$= y_1 - y_2$
Ancho de cada rectángulo = dx
Área de cada rectángulo = $(y_1 - y_2)\,dx$
La suma de las áreas de un número infinito de rectángulos desde $x = a$ hasta $x = b$ y el área exacta entre dos curvas $= \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$.

Ejemplo 13

a Representa gráficamente la región delimitada por las curvas $y = x^2 - 2$ e $y = -x$.
Escriba una expresión que dé el área de la región y luego halle el área.
Resuelva este problema sin usar la CPG.

b Dibuje aproximadamente el gráfico de la región delimitada por las curvas $f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}$ y $g(x) = x^2 - 4x$.
Escriba una expresión que dé el área de la región.
Halle el área usando la CPG.

▶ Continúa en la página siguiente.

Respuestas

a $x^2 - 2 = -x$

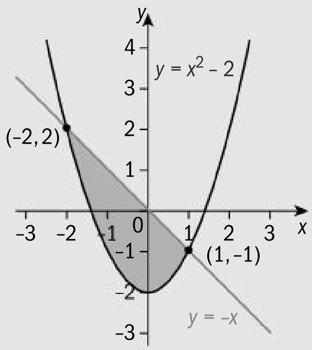
$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2, 1$

Puntos de intersección: $(-2, 2)$ y $(1, -1)$

Hallar la intersección, igualando las ecuaciones y resolviendo en x. Reemplazar los valores de x en cualquiera de las ecuaciones para obtener las coordenadas.



El gráfico de $y = x^2 - 2$ es el gráfico de $y = x^2$ trasladado 2 unidades hacia abajo. El gráfico de $y = -x$ es una recta que corta al eje y en (0,0) y tiene pendiente –1. Los gráficos se cortan en (–2, 2) y (1, –1).

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} ((-x) - (x^2 - 2))\,dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,dx$$

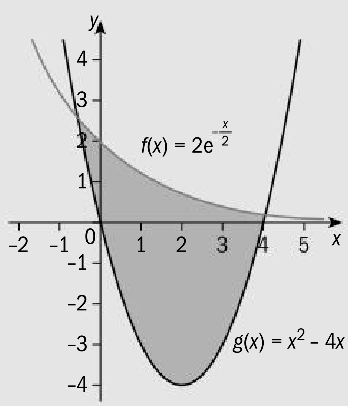
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + 2(1)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 2(-2)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{9}{2}$$

$y = -x$ es mayor o igual que $y = x^2 - 2$ en $-2 \le x \le 1$, por lo tanto la altura de cada rectángulo está representada por $(-x) - (x^2 - 2)$.

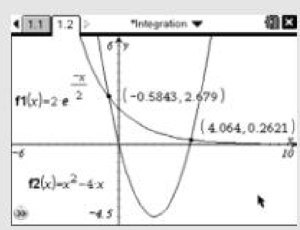
b



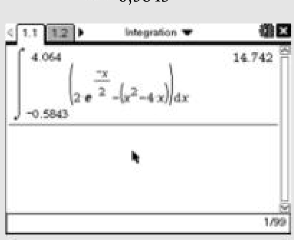
$2e^{-\frac{x}{2}} = x^2 - 4x$

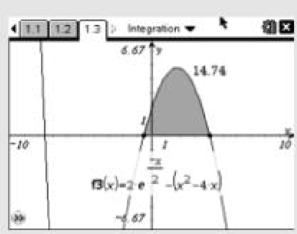
$x \approx -0{,}5843;\ 4{,}064$

Usar la CPG para dibujar aproximadamente los gráficos y para hallar las coordenadas x de los puntos de intersección. Escribir al menos 4 cifras significativas, dado que estos valores se usarán para calcular el área.



$$\text{Área} = \int_{-0{,}5843}^{4{,}064} \left(\left(2e^{-\frac{x}{2}}\right) - (x^2 - 4x)\right)dx \approx 14{,}7$$





$f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}$ es mayor o igual que $g(x) = x^2 - 4x$ en $-0{,}5843 \le x \le 4{,}064$, por lo tanto la altura de cada rectángulo está representada por $\left(2e^{-\frac{x}{2}}\right) - (x^2 - 4x)$.

Ejercitación 9K

En las preguntas 1 a 4, represente gráficamente la región delimitada por las curvas dadas. Escriba una expresión que dé el área de la región. Halle el área usando la CPG.

1 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ e $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

2 $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$

3 $y = 2x - 4$, $y = x^3$ entre $x = -2$ y $x = 2$

4 $g(x) = x + 1$ y $h(x) = 3 + 2x - x^2$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 Considere la función $f(x) = x^4 - x^2$.

a Halle los puntos de intersección con el eje x.

b **i** Halle $f'(x)$.

ii A partir de lo anterior, halle las coordenadas de los puntos mínimo y máximo.

c **i** Utilice sus respuestas de los apartados **a** y **b** para dibujar aproximadamente el gráfico de f.

ii Dibuje aproximadamente el gráfico de $g(x) = 1 - x^2$ en los mismos ejes.

d Escriba una expresión que dé el área de la región entre f y g y halle el área de la región.

En las preguntas 6 a 9 dibuje aproximadamente un gráfico de la región delimitada por las curvas dadas. Escriba una expresión que dé el área de la región. Halle el área usando la CPG.

6 $y = \ln x$ e $y = x - 2$

7 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = -x + 3$

8 $f(x) = e^x$ y $h(x) = 2 - x - x^2$

9 $y = \frac{x+2}{x-1}$ e $y = -\frac{1}{2}x + 6$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

10 Considere las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

a Dibuje aproximadamente el gráfico de f y g en los mismos ejes.

b **i** Escriba una expresión para el área de la región entre f y g.

ii Halle esta área.

c La recta $x = k$ divide el área de la región del apartado **b** a la mitad.

i Escriba una expresión para la mitad del área de la región del apartado **b**.

ii Halle el valor de k.

Ahora nos centraremos en los casos en que y_1 e y_2 son continuas en $a \le x \le b$, pero y_1 no es mayor o igual que y_2 para todo x en $a \le x \le b$. En este caso debemos hallar todos los puntos de intersección y determinar cuál curva es la superior y cuál la inferior en los intervalos determinados por los puntos de intersección.

Ejemplo 14

Escriba una expresión que dé el área de la región entre $f(x) = 10x + x^2 - 3x^3$ y $g(x) = x^2 - 2x$. Halle el área.

Respuesta

$10x + x^2 - 3x^3 = x^2 - 2x$

$x = -2, 0, 2$

$$\int_{-2}^{0}((x^2 - 2x) - (10x + x^2 - 3x^3))\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{0}^{2}((10x + x^2 - 3x^3) - (x^2 - 2x))\,\mathrm{d}x$$

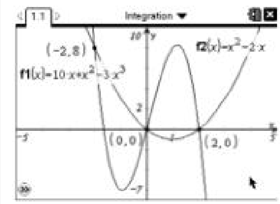
$= 24$

Hallar los puntos de intersección entre f y g

$g(x) = x^2 - 2x$ es mayor o igual que $f(x) = 10x + x^2 - 3x^3$ en $-2 \le x \le 0$, por lo tanto en este intervalo la “altura de cada rectángulo” está representada por $(x^2 - 2x) - (10x + x^2 - 3x^3)$.

$f(x) = 10x + x^2 - 3x^3$ es mayor o igual que $g(x) = x^2 - 2x$ en $0 \le x \le 2$, por lo tanto en este intervalo la “altura de cada rectángulo” está representada por $(10x + x^2 - 3x^3) - (x^2 - 2x)$.

Use la CPG para hallar las coordenadas de los puntos de intersección y determinar cuál curva es la superior y cuál la inferior en los intervalos determinados por los puntos de intersección.



Ejercitación 9L

En las preguntas 1 a 4, escriba una expresión para hallar el área de la región delimitada por las dos curvas y posteriormente halle el área.

1 $y = x^3 - 2x^2$ e $y = 2x^2 - 3x$

2 $f(x) = (x - 1)^3$ y $g(x) = x - 1$

3 $f(x) = xe^{-x^2}$ y $g(x) = x^3 - x$

4 $g(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$ y $h(x) = x^4 - 9x^2$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

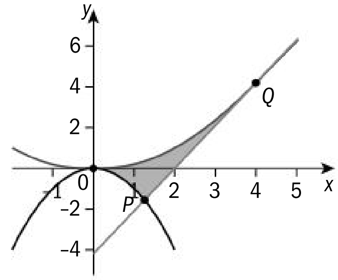
5 Las curvas que se muestran en la figura son gráficos de $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = -x^2$ y $h(x) = 2x - 4$.

a **i** Halle las coordenadas del punto Q.

ii Muestre que la recta que pasa por los puntos P y Q es tangente a $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en el punto Q.

b **i** Halle las coordenadas del punto P con una aproximación de cuatro cifras significativas.

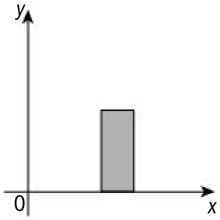
ii A partir de lo anterior, escriba una expresión para el área de la región sombreada y posteriormente halle el área.

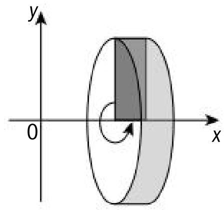


9.6 Volumen de revolución

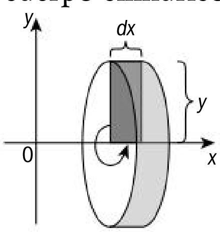
Un **sólido de revolución** se genera mediante la rotación de una figura plana alrededor de un **eje de rotación**.

Consideremos un rectángulo perpendicular al eje x. Imaginemos que el rectángulo se rota 360° alrededor del eje x.





El sólido que se forma se denomina **disco**. El disco es un cuerpo cilíndrico.



$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$$
$$= \pi y^2 \, \mathrm{d}x$$

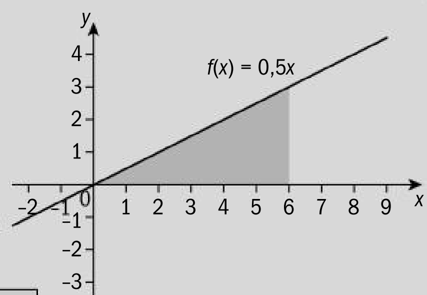
Los sólidos de revolución son usados en la manufacturación de muchos artículos, como pistones y cigüeñales.

▲ Pistones

▲ Cigüeñales

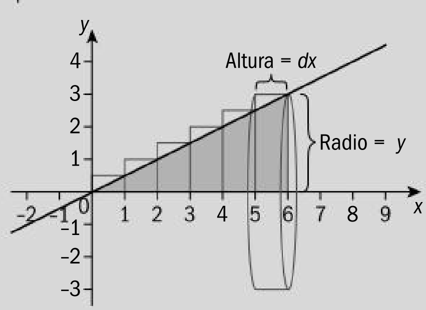
Investigación: volumen de revolución

Considere el triángulo formado por la recta $f(x) = 0{,}5x$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = 6$.

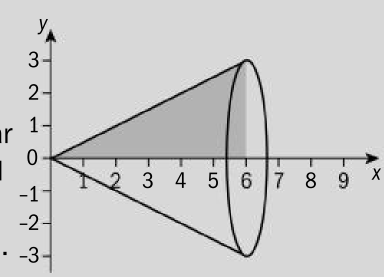


1 Copie y complete la tabla con las dimensiones y los volúmenes de los discos generados cuando los rectángulos que se muestran en la figura se rotan 360° alrededor del eje x. La última fila en la tabla ya ha sido completada.

Intervalo	Radio	Altura	Volumen
$0 \le x < 1$			
$1 \le x < 2$			
$2 \le x < 3$			
$3 \le x < 4$			
$4 \le x < 5$			
$5 \le x < 6$	$f(6) = 3$	$6 - 5 = 1$	$\pi(3^2)(1) \approx 28{,}27$



2 Halle la suma de los volúmenes de los seis discos de la pregunta 1. ¿Es esta suma mayor o menor que el volumen exacto del sólido generado por la rotación del triángulo alrededor del eje x?

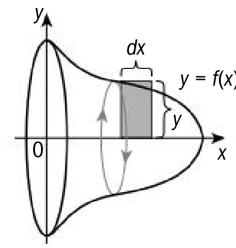


3 Escriba una integral definida que crea pueda usarse para hallar el volumen exacto del sólido de revolución generado cuando el triángulo rota alrededor del eje x. Evalúe la integral en una CPG y compárela con el valor aproximado que obtuvo en la pregunta 2.

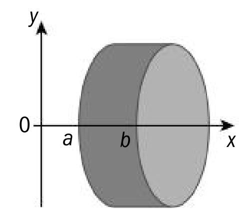
4 Cuando el triángulo rota alrededor del eje x, el sólido que se genera es un cono. Use una fórmula geométrica para hallar el volumen del cono y compárelo con el valor de la integral definida que obtuvo en la pregunta 3.

➔ Si $y = f(x)$ es continua en $a \le x \le b$ y la región delimitada por $y = f(x)$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = b$, se rota 360° alrededor del eje x, entonces el volumen del sólido generado está dado por

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx \text{ o } \int_a^b \pi y^2\,dx.$$



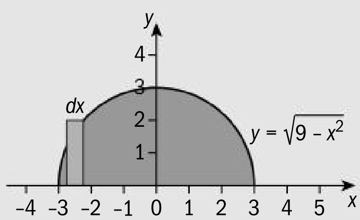
Radio del disco (altura del "rectángulo representativo") $= y$
Altura del disco (ancho del "rectángulo representativo") $= dx$
Volumen del disco $= \pi r^2 h = \pi y^2 dx$
La suma de los volúmenes de un número infinito de discos desde $x = a$ hasta $x = b$ y el volumen exacto del sólido $= \int_a^b \pi y^2\,dx$.



Ejemplo 15

Use una integral definida para hallar el volumen del sólido generado cuando la región delimitada por $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y el eje x se rota 360° alrededor del eje x. Verifique su respuesta usando una fórmula geométrica.

Respuesta



Resulta útil dibujar aproximadamente un gráfico y un "rectángulo representativo".
El radio del disco es la altura del rectángulo representativo, $\sqrt{9 - x^2}$.

La altura del disco es el ancho del rectángulo representativo, dx.
Los límites de integración son las raíces, –3 y 3.

$$V = \int_a^b \pi y^2\,dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \pi\left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 dx$$

$$\approx 113$$

Usar la CPG para evaluar la integral

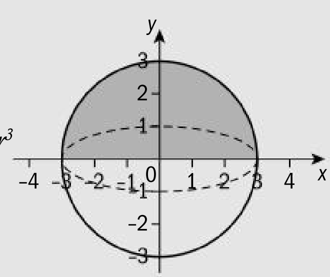
Para verificar:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3^3)$$

$$= 36\pi$$

$$\approx 113$$

Cuando la región se rota alrededor del eje x, se genera una esfera.
Volumen de la esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$



Ejercitación 9M

Use una integral definida para hallar el volumen del sólido generado cuando la región delimitada por las curvas dadas se rota 360° alrededor del eje x. Verifique sus respuestas usando fórmulas geométricas.

1 $f(x) = 4$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 5$

2 $f(x) = 6 - 2x$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 3$

3 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje x

4 $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 4$

5 $f(x) = x$ y el eje x entre $x = 2$ y $x = 4$

A Ibn al-Haytham (965–1040), un matemático que vivió principalmente en Egipto, se le atribuye el cálculo de la integral de una función para hallar el volumen de un paraboloide, el cuerpo generado mediante la rotación de una parábola alrededor de su eje de simetría.

Ejemplo 16

Use una integral definida para hallar el volumen del sólido generado cuando la región bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 2$ se rota alrededor del eje x. Dé su respuesta en función de π.

Respuesta

$$V = \int_a^b \pi y^2\,dx$$

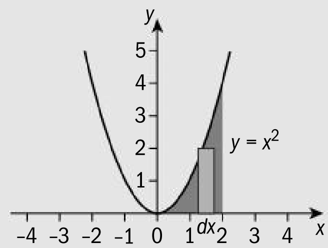
$$= \int_0^2 \pi (x^2)^2\,dx$$

$$= \int_0^2 \pi x^4\,dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5}(2^5) - \frac{1}{5}(0^5)\right)$$

$$= \frac{32\pi}{5}$$



Resulta útil dibujar aproximadamente un gráfico y el "rectángulo representativo".
El radio del disco es la altura del rectángulo representativo, x^2.
La altura del disco es el ancho del rectángulo representativo, dx.
Los límites de integración son 0 y 2.

Ejercitación 9N

En las preguntas 1 a 4 use una integral definida para hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región delimitada por las curvas dadas alrededor del eje x.

1 $f(x) = x^3$ y el eje x entre $x = 1$ y $x = 2$

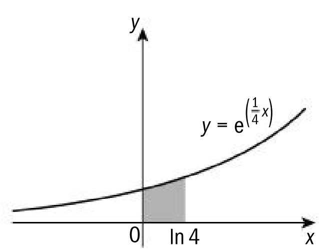
2 $y = x^2 + 1$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 1$

3 $f(x) = 3x - x^2$ y el eje x

4 $y = \dfrac{1}{x}$ y el eje x entre $x = 1$ y $x = 4$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 El diagrama muestra parte del gráfico de $y = e^{\left(\frac{1}{4}x\right)}$. La región sombreada, entre el gráfico de $y = e^{\left(\frac{1}{4}x\right)}$ y el eje x, desde $x = 0$ hasta $x = \ln 4$, se rota 360° alrededor del eje x.



a Escriba una integral definida que represente el volumen del sólido generado.

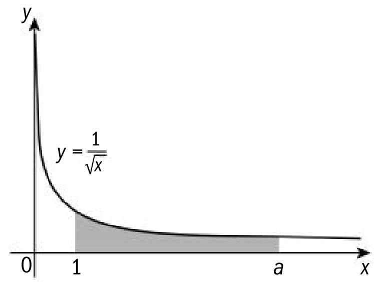
b Este volumen es igual a $k\pi$. Halle el valor de k.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 La región sombreada en el diagrama está delimitada por $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$, $x = a$ y el eje x. La región sombreada se rota 360° alrededor del eje x.

a Escriba una integral definida que represente el volumen del sólido generado.

b El volumen del sólido generado es 3π. Halle el valor de a.



9.7 Integrales definidas con movimiento lineal y otros problemas

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 9: Más sobre volúmenes de sólidos de revolución*

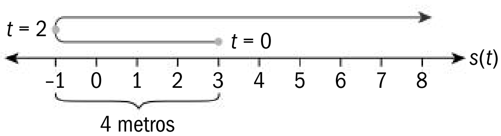
Otra de las aplicaciones de las integrales definidas es la de hallar el cambio en una función a medida que transcurre el tiempo.

Supongamos que la función desplazamiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta horizontal está dada por $s(t) = t^2 - 4t + 3$ para $t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros. El desplazamiento inicial de la partícula, $s(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$, nos dice que en el segundo 0, la partícula está 3 metros a la derecha del origen. $s(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = -1$ nos dice que en el segundo 2, está 1 metro a la izquierda del origen.

Recordemos que si desplazamiento = $s(t)$, entonces velocidad = $v(t) = s'(t)$ y aceleración = $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

La función desplazamiento de una partícula nos da la distancia y la dirección respecto del origen de la partícula, en cualquier instante t.

Consideremos $\int_0^2 v(t)\,dt$. Dado que la primitiva de la velocidad es el desplazamiento, tenemos $\int_0^2 v(t)\,dt = [s(t)]_0^2 = s(2) - s(0) = -4$.

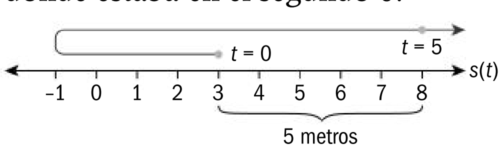


Esto nos da el cambio en el desplazamiento entre los instantes 0 y 2 segundos. Nos dice que en el segundo 2, la partícula está 4 metros a la izquierda de donde estaba en el segundo 0.

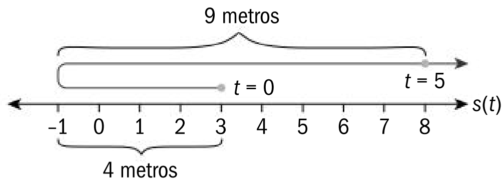
Observemos que $v(t) = 2t - 4$, y $v(t) = 0$ cuando $t = 2$. La velocidad pasa de negativa a positiva en $t = 2$, por lo tanto la partícula cambia de dirección cuando $t = 2$.

➔ $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$ es el cambio en el desplazamiento entre t_1 y t_2.

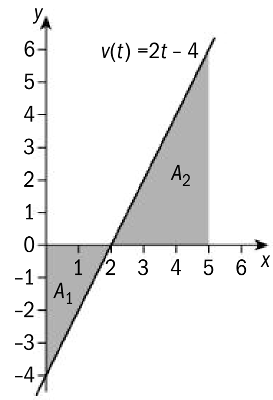
Ahora consideremos $\int_0^5 v(t)\,dt = s(5) - s(0) = 8 - 3 = 5$. Esto nos dice que a los 5 segundos, la partícula está 5 metros a la derecha de donde estaba en el segundo 0.



Observemos que el cambio en el desplazamiento de 5 metros no es la distancia total recorrida entre 0 y 5 segundos. La distancia total recorrida es la suma de los 4 metros recorridos hacia la izquierda más los 9 metros recorridos hacia la derecha, o 13 metros, como se muestra a continuación.



Consideraremos esto en términos del área bajo la curva de $v(t) = 2t - 4$.



Sea A_1 el área del triángulo debajo del eje x y sea A_2 el área del triángulo por encima del eje x. $\int_0^5 v(t)\mathrm{d}t$ es A_2 más el simétrico de A_1

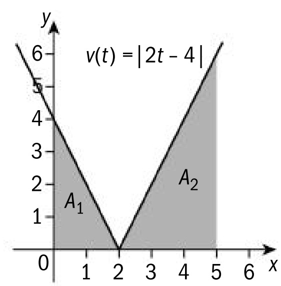
$$\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = -A_1 + A_2 = -\frac{1}{2}(2)(4) + \frac{1}{2}(3)(6) = -4 + 9 = 5.$$

Esto nos da el desplazamiento desde el segundo 0 hasta el segundo 5.

Para hallar la distancia total recorrida desde el segundo 0 al 5 necesitamos la suma de las áreas A_1 y A_2. Podemos hallarla evaluando $\int_0^5 |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

$|v(t)|$ significa el valor absoluto o el módulo de $v(t)$.

$$\int_0^5 |v(t)|\,\mathrm{d}t = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(2)(4) + \frac{1}{2}(3)(6) = 4 + 9 = 13$$



Esto nos da un total de 13 metros recorridos desde el segundo 0 al 5.

➔ Si v es la función velocidad de una partícula que se mueve en una recta, la **distancia total** recorrida desde t_1 hasta t_2 está dada por: distancia $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

Ejemplo 17

La función desplazamiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta está dada por $s(t) = 8 + 2t - t^2$ para $t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.

a Halle la velocidad de la partícula en el instante t.

b Halle cuándo la partícula se está moviendo a la derecha y cuando se está moviendo a la izquierda.

c Dibuje un diagrama de movimiento para la partícula.

d Escriba integrales definidas para hallar los cambios de desplazamiento de la partícula y la distancia total recorrida en el intervalo $0 \leq t \leq 4$. Use una CPG para evaluar las integrales y luego use el diagrama de movimiento para verificar los resultados.

▶ Continúa en la página siguiente.

Respuestas

a $v(t) = 2 - 2t$

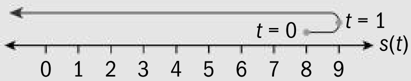
b $2 - 2t = 0$

$t = 1\,\text{s}$

Se mueve a la derecha en $0 < t < 1$.

Se mueve a la izquierda cuando $t > 1$.

c $s(0) = 8$ y $s(1) = 9$

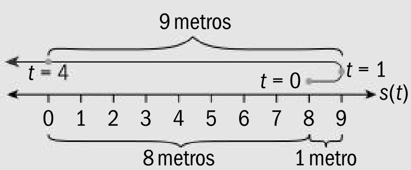


d Cambio en el desplazamiento

$$= \int_0^4 (2 - 2t)\mathrm{d}t = -8\,\text{m}$$

$$\text{Distancia total} = \int_0^4 |2 - 2t|\,\mathrm{d}t$$

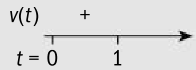
$$= 10\ \text{m}$$



$v(t) = s'(t)$

Hallar cuándo la velocidad es igual a cero

La partícula se mueve a la derecha cuando $v(t) > 0$ y a la izquierda cuando $v(t) < 0$.



Hallar el desplazamiento en $t = 0$ y $t = 1$

Cambio en el desplazamiento $= \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

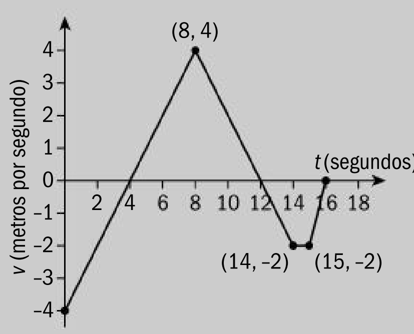
Distancia total $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$

Mostrar $s(4) = 0$ en el diagrama. A los 4 segundos la partícula está 8 metros a la izquierda de donde estaba en el segundo 0.

La partícula se desplazó 1 metro a la derecha y 9 metros a la izquierda, o sea, una distancia total de 10 metros desde el segundo 0 al 4.

Ejemplo 18

La función velocidad v, en $\text{m}\,\text{s}^{-1}$, de una partícula que se mueve a lo largo de una recta se muestra en la figura. Halle el cambio de desplazamiento de la partícula y la distancia total recorrida en el intervalo $0 \leq t \leq 16$.



▶ Continúa en la página siguiente.

Respuesta

Sean A_1, A_2 y A_3 las áreas de los dos triángulos y el trapecio.

Cambio en el desplazamiento

$$= \int_0^{16} v(t)\mathrm{d}t$$

$$= -A_1 + A_2 - A_3$$

$$= -\frac{1}{2}(4)(4) + \frac{1}{2}(8)(4) - \frac{1}{2}(4+1)(2) = 3\,\mathrm{m}$$

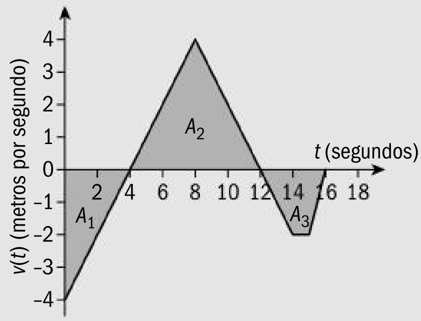
Distancia total

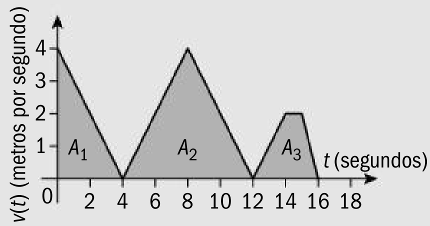
$$= \int_0^{16} |v(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$= A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \frac{1}{2}(4)(4) + \frac{1}{2}(8)(4) + \frac{1}{2}(4+1)(2)$$

$$= 29\ \mathrm{m}$$





Ejercitación 90

Cada una de las preguntas 1 a 3 da una función desplazamiento y un intervalo de tiempo, donde t se mide en segundos y s en metros.

- **a** Halle la velocidad de la partícula en el tiempo t.
- **b** Dibuje un diagrama de movimiento para la partícula.
- **c** Escriba integrales definidas, para hallar el cambio de desplazamiento de la partícula y la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo dado.

Use la CPG para evaluar las integrales y luego use un diagrama de movimiento para verificar los resultados.

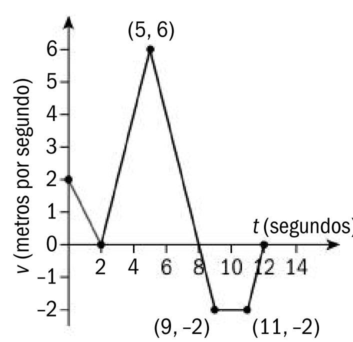
1 $s(t) = t^2 - 6t + 8;\ 0 \le t \le 4$

2 $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t;\ 0 \le t \le 6$

3 $s(t) = (t-2)^3;\ 0 \le t \le 4$

4 La función velocidad v, en $\mathrm{m\,s^{-1}}$, de una partícula que se mueve a lo largo de una línea se muestra en la figura. Halle el cambio de desplazamiento de la partícula y la distancia total recorrida en cada uno de los siguientes intervalos.

- **a** $2 \le t \le 12$
- **b** $0 \le t \le 5$
- **c** $0 \le t \le 12$



PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 La velocidad, v, en m s^{-1}, de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por $v(t) = t^2 - 9$, donde t es el tiempo en segundos.

a Halle la aceleración de la partícula en $t = 1$.

b El desplazamiento inicial de la partícula es de 12 metros. Halle una expresión para s, el desplazamiento, en función de t.

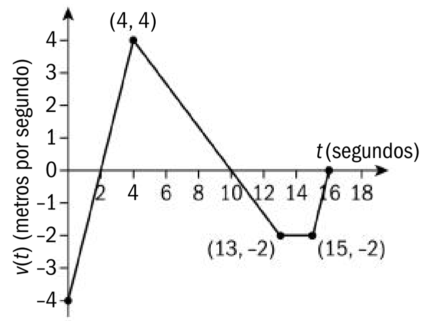
c Halle la distancia recorrida entre los 2 y los 8 segundos.

6 La función velocidad, v, en m s^{-1}, de una partícula que se mueve a lo largo de una línea se muestra en el gráfico.

a Halle la aceleración cuando $t = 3$.

b Escriba el intervalo de tiempo en el cual la partícula se mueve a la derecha.

c Halle la distancia total recorrida en $0 \le t \le 16$.



Las integrales definidas se pueden usar en otras situaciones, aparte de la del movimiento lineal, por ejemplo, para hallar el efecto acumulado de cualquier razón de cambio variable.

La integral de una razón de cambio es el cambio total desde t_1 hasta t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} F'(t)\mathrm{d}t = F(t_2) - F(t_1).$$

Ejemplo 19

Se comienza un cultivo de bacterias con una población inicial de 100. La razón a la que cambia el número de bacterias en el período de un mes puede ser modelizada mediante la función $r(t) = \mathrm{e}^{0{,}273t}$, donde r se mide en bacterias por día.

Halle la población de bacterias 20 días después de iniciado el cultivo.

Respuesta

$r(t) = \mathrm{e}^{0{,}273t}$ es la razón de cambio. Es la derivada de una función, digamos $R(t)$, que da el número de bacterias en el tiempo t. Por lo tanto

$$\int_0^{20} r(t)\mathrm{d}t = R(20) - R(0)$$

es el cambio en el número de bacterias entre el día 0 y el día 20.

Dado que la población inicial era de 100 bacterias, la población después de 20 días es

$$100 + \int_0^{20} \mathrm{e}^{0{,}273t}\,\mathrm{d}t$$ o alrededor de 957 bacterias.

Tenga en cuenta que las unidades muestran que el resultado de la integral es un número de bacterias.

$$\int_0^{20} \underbrace{\mathrm{e}^{0{,}273t}}_{\left(\substack{\text{bacterias}\\ \text{por día}}\right)} \underbrace{\mathrm{d}t}_{(\text{días})} \approx \underbrace{857}_{\text{bacterias}}$$

Se podría obtener el mismo resultado usando el siguiente método más largo (véase la página siguiente).

▶ Continúa en la página siguiente.

$R(t) = \int e^{0,273t}\, dt$	*Hallar la función R(t), tal que $R'(t) = r(t)$. Recuerde que $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$.*
$= \frac{1}{0,273} e^{0,273t}\, dt + C$	
$= \frac{1000}{273} e^{0,273t} + C$	
$100 = \frac{1000}{273} e^{0,273(0)} + C$	*Usar la condición inicial $R(0) = 100$ para hallar C*
$C = 100 - \frac{1000}{273}$	
$= \frac{26300}{273}$	
$R(t) = \frac{1000}{273} e^{0,273t} + \frac{26300}{273}$	
$R(20) = \frac{1000}{273} e^{0,273(20)} + \frac{26300}{273} \approx 957$	*Hallar R(20)*

Observe cuánto más conveniente resulta obtener el mismo resultado usando $100 + \int_0^{20} e^{0,273t}\, dt \approx 957$.

Ejercitación 9P

Escriba una expresión que contenga una integral definida que pueda ser usada para contestar estas preguntas. Use una CPG para evaluar la expresión.

1 La tasa de consumo de petróleo en un determinado país desde enero 1, 2000 a enero 1, 2010 (en billones de barriles por año) se modeliza mediante la función $C'(t) = 18{,}4e^{\frac{t}{20}}$, donde t es el número de años desde enero 1, 2000.
Halle el consumo total de petróleo en el período de 10 años.

2 El número de espectadores que entran a un estadio por hora para un partido de fútbol se modeliza mediante la función $r(t) = 1375t^2 - t^3$ para $0 \le t \le 1{,}5$. La función $r(t)$ se mide en personas por hora. No hay espectadores en el estadio cuando se abren las puertas a las $t = 0$ horas. El juego comienza a la hora $t = 1{,}5$ horas. ¿Cuántos espectadores hay en el estadio cuando el juego comienza?

3 A la medianoche hay 36,5 centímetros cúbicos de nieve acumulados en la entrada para automóviles de una casa. Desde la medianoche hasta las 8 de la mañana la nieve se acumula a una razón que se puede modelizar mediante la función $s(t) = 5te^{(-0{,}01t^4 + 0{,}13t^3 - 0{,}38t^2 - 0{,}3t + 0{,}9)}$, donde t se mide en horas y s en cm^3 por hora. ¿Cuántos centímetros cúbicos de nieve se han acumulado a las 8 de la mañana?

4 El agua comienza a salir de un tanque que contiene 4000 galones. La velocidad a la que fluye, medida en galones por minuto, se puede modelizar mediante la función $r(t) = -133\left(1 - \frac{t}{60}\right)$.
¿Cuánta agua hay en el tanque después de 20 minutos?

Ejercicios de revisión

1 Halle la integral indefinida.

a $\int (4x^3 - 8x + 6)\,dx$ **b** $\int \sqrt[3]{x^4}\,dx$ **c** $\int \frac{3}{x^4}dx$

d $\int \frac{5x^4 - 3x}{6x^2}dx$ **e** $\int e^{4x}dx$ **f** $\int x^2(x^3 + 1)^4\,dx$

g $\int \frac{1}{2x+3}dx$ **h** $\int \frac{\ln x}{x}dx$ **i** $\int (3x^2 + 1)(6x)\,dx$

j $\int \frac{2e^x}{e^x + 3}dx$ **k** $\int 3\sqrt{2x-5}\,dx$ **l** $\int 2xe^{2x^2}\,dx$

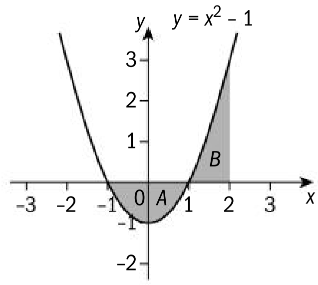
2 Halle la integral definida.

a $\int_0^2 (3x^2 - 6)\,dx$ **b** $\int_4^{16} \frac{4}{\sqrt{t}}dt$ **c** $\int_1^{e^2} \frac{4}{x}dx$

d $\int_0^1 6xe^{3x^2+3}\,dx$ **e** $\int_{-1}^1 (3x-1)^3\,dx$ **f** $\int_0^2 \frac{1}{2x+1}dx$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 El diagrama muestra parte del gráfico de $f(x) = x^2 - 1$. Las regiones A y B están sombreadas.



a Escriba una expresión para el área de la región B.

b Calcule el área de la región B.

c Escriba una expresión para el total del área de las regiones sombreadas A y B. (No hace falta que evalúe la expresión.)

d La región B se rota alrededor del eje x. Escriba una expresión para el volumen del sólido generado. (No hace falta que evalúe la expresión.)

4 Una curva, cuya ecuación es $y = f(x)$, pasa por el punto (2,6). Su función derivada es $f'(x) = 3x - 2$. Halle la fórmula de la curva.

5 Sabiendo que $\int_1^5 f(x)\,dx = 20$, deduzca el valor de:

a $\int_1^5 \frac{1}{4}f(x)\,dx$; **b** $\int_1^5 [f(x) + 2]\,dx$

6 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de manera que su velocidad en el tiempo t segundos está dada por $v(t) = 4e^{2t} + 2$. Cuando $t = 0$, el desplazamiento de la partícula, s, es de 8 m. Halle una expresión para s en función de t.

7 Sabiendo que $\int_1^k \frac{1}{2x-1}dx = \ln 5$, halle el valor de k.

Ejercicios de revisión

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 Halle el volumen del sólido generado cuando la región delimitada por $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x se rota 360° alrededor del eje x.

2 Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal con velocidad v m s^{-1} dada por $v(t) = 2t^2 - 11t + 12$ donde $t \geq 0$.

a Escriba una expresión para la aceleración, a m s^{-2}, en función de t.

b La partícula se mueve a la izquierda en $a < t < b$. Halle el valor de a y el valor de b.

c Halle la distancia total recorrida por la partícula desde los 2 hasta los 5 segundos.

3 **a** Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 - 2$ en $x = -1$.

b La recta tangente corta a $f(x) = x^3 - 2$ en un segundo punto. Halle las coordenadas de este punto.

c Dibuje el gráfico de f y la recta tangente.

d Escriba una expresión para el área delimitada por los gráficos de f y la recta tangente, y luego halle el área.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 9
Primitivas y la integral indefinida

- **Regla de la potencia:** $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$
- **Regla de la constante:** $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$
- **Regla de la multiplicación por una constante:** $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- **Regla de la adición o la sustracción:** $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

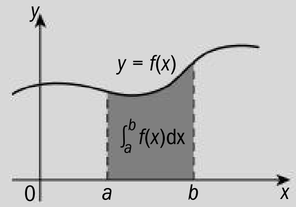
Más sobre integrales indefinidas

- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C,\ x > 0$
- $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
- $\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}\right) + C$
- $\int \mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$
- $\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C,\ x > -\frac{b}{a}$

Continúa en la página siguiente.

Área e integrales definidas

- Cuando f es una función no-negativa en $a \le x \le b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ da el área bajo la curva desde $x = a$ hasta $x = b$.



- **Algunas propiedades de las integrales definidas**

1 $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2 $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

3 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

4 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

5 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en el intervalo $a \le x \le b$ y F es una primitiva de f en $a \le x \le b$, entonces

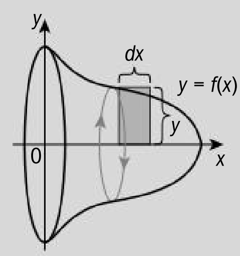
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Área entre dos curvas

- Si y_1 e y_2 son continuas en $a \le x \le b$ e $y_1 \ge y_2$ para todo x en $a \le x \le b$, entonces el área entre y_1 e y_2 desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por $\displaystyle\int_a^b (y_1 - y_2)\,\mathrm{d}x$.

Volumen de revolución

- Si $y = f(x)$ es continua en $a \le x \le b$ y la región delimitada por $y = f(x)$ y el eje x entre $x = a$ y $x = b$ se rota 360° alrededor del eje x, entonces el volumen del sólido generado está dado por $\displaystyle\int_a^b \pi(f(x))^2$ o $\displaystyle\int_a^b \pi y^2\,\mathrm{d}x$.

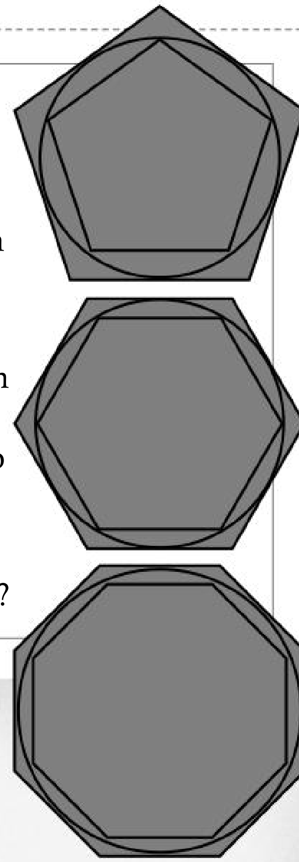


Integrales definidas con movimiento lineal y otros problemas

- $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t = s(t_2) - s(t_1)$ es el cambio en el desplazamiento desde t_1 hasta t_2.
- Si v es la función velocidad para una partícula que se mueve a lo largo de una recta, la distancia total recorrida desde t_1 hasta t_2 está dada por: distancia $= \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

Conocer nuestros límites

El método de exhaución



Los antiguos griegos usaron conceptos de cálculo mucho antes de que este fuera formalizado. Para hallar un valor aproximado del área de un círculo de radio uno, los antiguos griegos construyeron polígonos inscriptos y circunscriptos con un número creciente de lados.

Sean a_n las áreas de los polígonos regulares con n lados inscriptos en un círculo de radio uno y sean A_n las áreas de los polígonos circunscriptos. Los antiguos griegos hallaron que tanto $\lim_{n\to\infty} A_n$ como $\lim_{n\to\infty} a_n$ eran iguales a π.

- ¿Que conclusión pudieron deducir a partir de estos hechos?
- ¿Podemos pensar en otras aplicaciones de los límites en la vida real?

Newton vs. Leibniz

El desarrollo del cálculo fue realmente la culminación de siglos de trabajo por matemáticos de todo el mundo. Los matemáticos del siglo XVII Isaac Newton (inglés) y Gottfried Wilhelm Leibniz (alemán) son reconocidos por el desarrollo del cálculo. Una de las más famosas controversias en la historia de las matemáticas es la discusión sobre quién de ellos fue el primero en inventar o descubrir el cálculo y si hubo algún asunto de plagio.

- ¿Cuáles son las posibles consecuencias cuando las personas buscan el crédito por su trabajo?
- Supongamos que Newton y Leibniz desarrollaron sus cálculos independientemente uno de otro. ¿Esto sustentaría la idea que el cálculo fue descubierto o de que fue inventado?

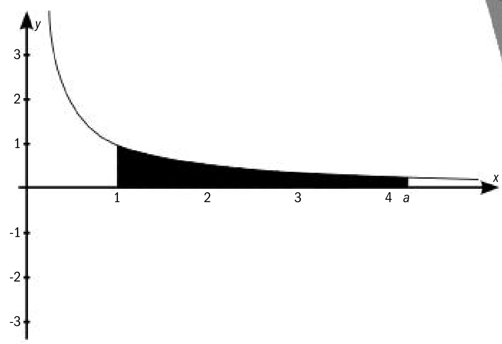
Si bien no se llegó nunca a resolver la controversia por completo, hoy se acepta generalmente que Newton y Leibniz desarrollaron el cálculo independientemente uno del otro. El cálculo moderno surgió en el siglo XIX debido a los esfuerzos de matemáticos como Louis Cauchy (francés), Georg Bernhard Riemann (alemán), Karl Weierstrass (alemán), y otros.

- ¿Nacieron los trabajos de estos matemáticos de la necesidad de resolver ciertos problemas de la vida real o por pura curiosidad intelectual?

El cuerno de Gabriel

Considere el sólido formado cuando la región delimitada por $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 1$ y $x = a$, $a > 1$ se rota alrededor del eje x. Si $a \to \infty$, el sólido se conoce como el **cuerno de Gabriel**.

El volumen del sólido generado por revolución alrededor del eje x está dado por $\pi\int_1^a y^2 \mathrm{d}x$. Puede mostrarse que el área de la superficie del sólido está dada por $2\pi\int_1^a y\sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x$.



- Use una CPG para hallar, con una aproximación de cuatro lugares decimales, el volumen y el área de la superficie del sólido descripto anteriormente para los valores dados de a. Escríbalos en una copia de la tabla. A continuación elabore una conjetura acerca del volumen y del área de la superficie, a medida que a se acerca a infinito.

a	Volumen = $\pi\int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$	Área de la superficie = $2\pi\int_1^a \left[\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\right] \mathrm{d}x$
10		
100		
1000		
10 000		
100 000		
1 000 000		
$a \to \infty$	Volumen $\to$	Área de la superficie $\to$

- Según los resultados de su tabla, ¿cuánta pintura se necesitará para llenar el cuerno de Gabriel?
- ¿Cuánta pintura se necesitará para cubrir su superficie?

Paradojas

Un resultado que desafía a la lógica se llama paradoja. El cuerno de Gabriel es un ejemplo de paradoja. Investigue algunos otros ejemplos de paradojas.

10 Análisis bidimensional

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

5.4 Correlación lineal de variables bidimensionales; coeficiente de correlación momento-producto de Pearson, *r*; diagramas de dispersión, rectas de ajuste óptimo; interpretación matemática y de contexto.

5.4 Ecuación de la recta de regresión de *y* sobre *x*; uso de la ecuación para realizar predicciones.

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Calcular potencias positivas sencillas

Por ejemplo: Evaluar 3^4

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Por ejemplo: Evaluar $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \frac{8}{125}$$

2 Escribir números en forma exponencial

Por ejemplo: Hallar n, si $2^n = 8$

$2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^3 = 8$

$n = 3$

Comprobemos nuestras habilidades

1 Evalúe:

a 2^5

b 3^3

c 7^3

d $\left(\frac{1}{2}\right)^7$

e $\left(\frac{3}{4}\right)^4$

f $0{,}001^3$

2 Indique el valor de n en las siguientes ecuaciones:

a $2^n = 16$

b $3^n = 243$

c $7^n = 343$

d $5^n = 625$

e $(-4)^n = -64$

f $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{8}$

En 1956, un estadístico australiano, Oliver Lancaster, fue el primero en establecer, con fundamentos, una relación entre la exposición a la luz solar y el cáncer de piel. Observó que la tasa de cáncer de piel entre los caucásicos en Australia estaba fuertemente relacionada con la latitud y, por lo tanto, con la cantidad de luz solar: los estados situados al norte del país registraban tasas más altas que los ubicados al sur. Y no olvidemos que esto fue bastante antes del agujero en la capa de ozono. El descubrimiento de Lancaster fue resultado de una cuidadosa tarea de recolección de datos y comparación de tasas de cáncer de piel.

En el capítulo 8 nos ocupamos del análisis **unidimensional**. Allí dijimos que una **población** se define como todos los miembros de un grupo que se estudia con el fin de tomar decisiones basadas en datos. Una **muestra** es una parte de la población.

Supongamos que queremos estudiar la estatura x y el peso y de hombres adultos.

Las unidades de muestreo son los hombres adultos y los datos **bidimensionales** contienen todos los pares (x, y) compuestos por las estaturas y los pesos de los individuos de nuestra muestra.

Unidad de muestreo	Variable(s)	Población
Hombres adultos	Estatura	Unidimensional
Hombres adultos	Peso	Unidimensional
Hombres adultos	Estatura, peso	Bidimensional

➔ El análisis **bidimensional** se ocupa de la relación entre los pares de variables (x, y) en un conjunto de datos.

En este capítulo buscaremos asociaciones entre dos conjuntos de datos usando gráficos, representando una relación por medio de una ecuación y usando una escala para describir la fuerza de la relación.

Investigación: la torre inclinada de Pisa

La torre del campanario de la catedral de Pisa fue construida en 1178 y pronto comenzó a inclinarse hacia un costado: de ahí su nombre.
Las medidas que se dan a continuación muestran la inclinación en décimas de milímetros, medidas a partir de los 2,9 metros. Así, en 1975 la torre estaba inclinada 2,9642 metros respecto de la vertical.

Año	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
Inclinación	642	644	656	667	673	688	696	698	713	717	725	742	757

¿Parecería que la inclinación aumenta con el tiempo?
Si es así, ¿cuán rápido está aumentando la inclinación de la torre con el transcurso del tiempo?
¿Hay pruebas de que la inclinación cambia significativamente con el transcurso del tiempo?
¿Existe alguna fórmula que permita calcular un valor aproximado de la inclinación?
¿Puede predecir la inclinación en el futuro?

10.1 Diagramas de dispersión

Una forma de presentar datos bidimensionales es mediante un **diagrama de dispersión**.

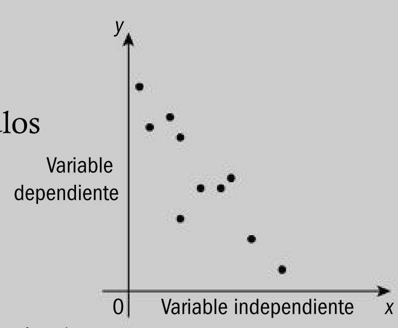
➔ Los **diagramas de dispersión** (también llamados nubes de puntos) se usan para investigar posibles relaciones entre dos variables relacionadas con un mismo "suceso".

Los diagramas de dispersión son similares a los gráficos de líneas, en el hecho de que emplean ejes horizontales y verticales para situar puntos que representan a los datos. Sin embargo, tienen un propósito muy específico. Un diagrama de dispersión muestra en qué medida una variable afecta a la otra.

➔ La relación entre dos variables recibe el nombre de **correlación**.

➔ Para dibujar un gráfico de dispersión, debemos situar en un gráfico los valores (x, y) de la tabla de datos mediante pequeños círculos. El patrón determinado por los círculos puede darnos alguna indicación acerca de la correlación.

La **variable independiente** debe estar en el eje horizontal y la **variable dependiente** en el eje vertical.

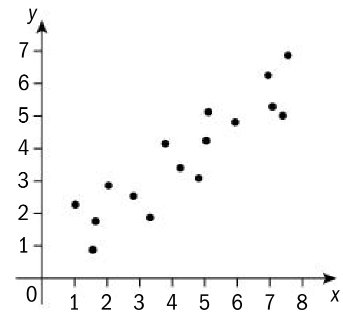


La **correlación** es una forma de medir el grado de *asociación* o *relación* entre dos variables. El objetivo de establecer correlaciones es poder hacer predicciones sobre una variable, basándonos en lo que sabemos de la otra.

Para el ejemplo de la torre inclinada de Pisa, pensamos que la inclinación aumenta con el tiempo. El tiempo es la variable **independiente**. La inclinación depende del tiempo, por lo tanto, la cantidad de inclinación es la variable **dependiente**.

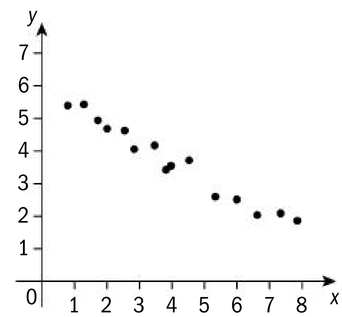
➔ Una tendencia general ascendente en el patrón de los círculos muestra una correlación **positiva**.

El valor de la variable dependiente crece a medida que crece el valor de la variable independiente.

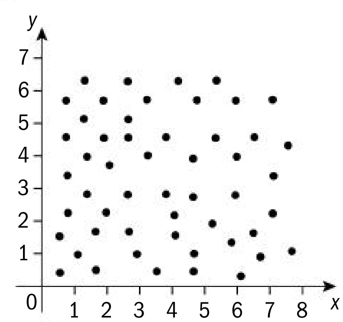


➔ Una tendencia general descendente en el patrón de los círculos muestra una correlación **negativa**.

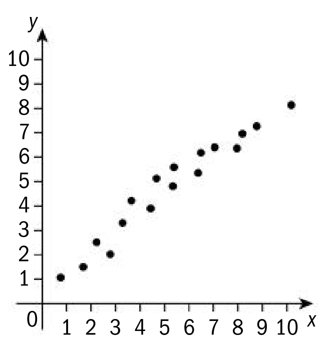
La variable dependiente decrece a medida que crece la variable independiente.



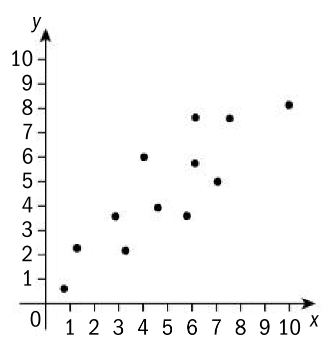
➔ Un conjunto de círculos dispersos que no presentan ninguna tendencia podría indicar una correlación cercana a **cero**.



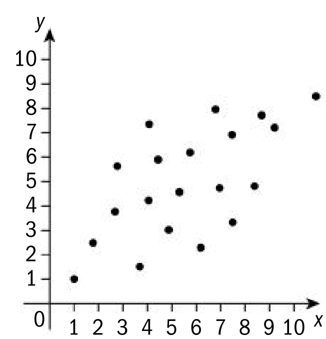
Los diagramas de dispersión nos permiten evaluar la fuerza de una correlación. Los siguientes son ejemplos de distintos grados de correlación positiva:



Correlación positiva fuerte: *y* crece a medida que crece *x*

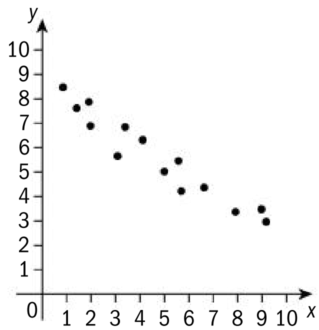


Correlación positiva moderada

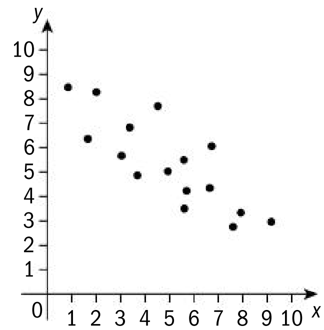


Correlación positiva débil

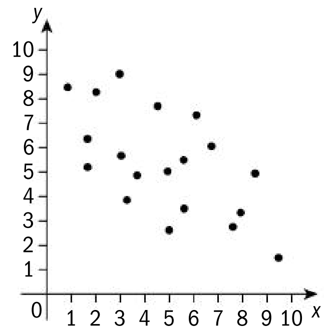
Los siguientes son ejemplos de distintos grados de correlación negativa:



Correlación negativa fuerte: *y* decrece a medida que crece *x*



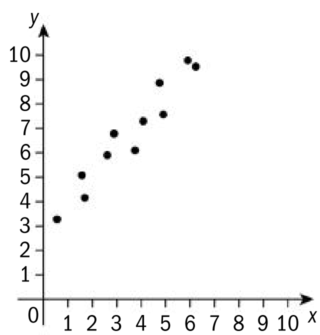
Correlación negativa moderada



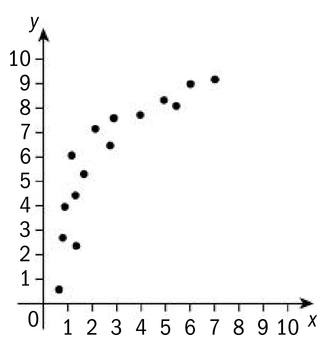
Correlación negativa débil

No todas las correlaciones son lineales.

Los puntos en este gráfico responden a una forma aproximadamente lineal.



Los puntos en este gráfico se representarían mediante una curva.
Existe una correlación **no lineal** entre las variables.



Causalidad

➔ Que exista correlación entre dos conjuntos de datos no necesariamente significa que uno sea causado por el otro.

He aquí un ejemplo: la talla de zapato de los estudiantes que van a la escuela primaria y el vocabulario de los estudiantes presentan una correlación positiva fuerte. En otras palabras, a mayor número del calzado, mayor el vocabulario del estudiante. Ahora, es fácil ver que la talla de zapato y el vocabulario no tienen absolutamente nada que ver la una con el otro, pero sí existe una fuerte correlación entre las variables. La razón es que existe un **factor de confusión**: la edad. Los estudiantes de grados superiores tendrán tallas de zapato más grandes y a menudo, mayor vocabulario.

La oposición entre "causalidad" y "correlación" puede ser el punto de partida para una exploración.

Ejemplo 1

a Represente estos datos en un diagrama de dispersión.

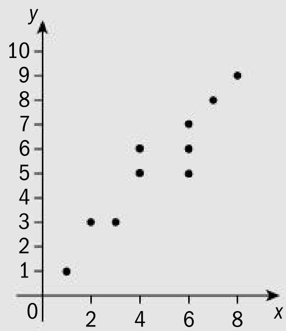
x	1	2	3	4	4	6	6	6	7	8
y	1	3	3	5	6	7	5	6	8	9

b ¿Se trata de una relación lineal o no lineal?

c Describa el tipo y la fuerza de la relación.

Respuestas

a



b Esta es una relación **lineal**.

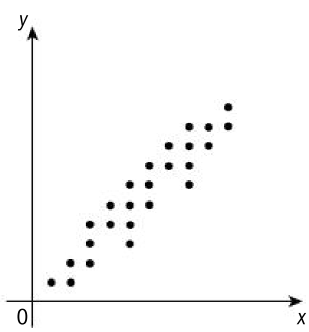
Comparar el diagrama de dispersión con los ejemplos anteriores

c Existe una correlación **positiva fuerte**.

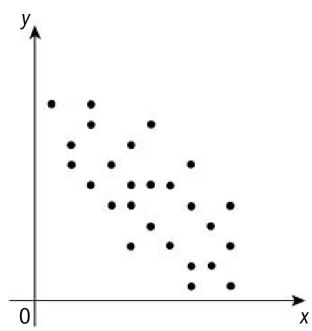
Ejercitación 10A

1 Describa la correlación presentada en cada uno de los siguientes diagramas de dispersión.

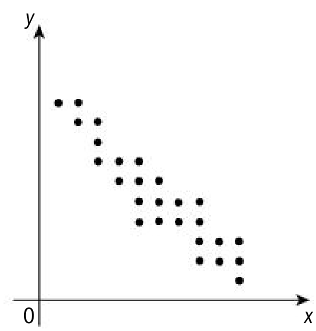
a



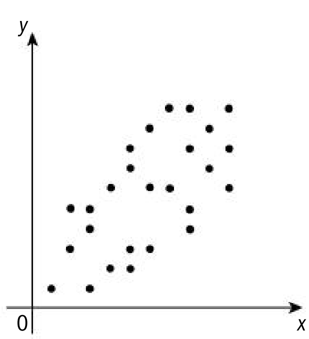
b



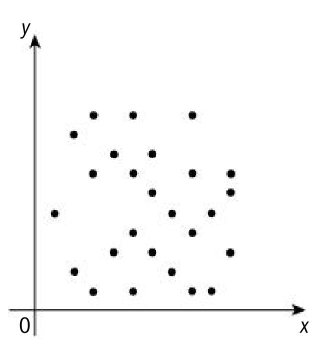
c



d



e

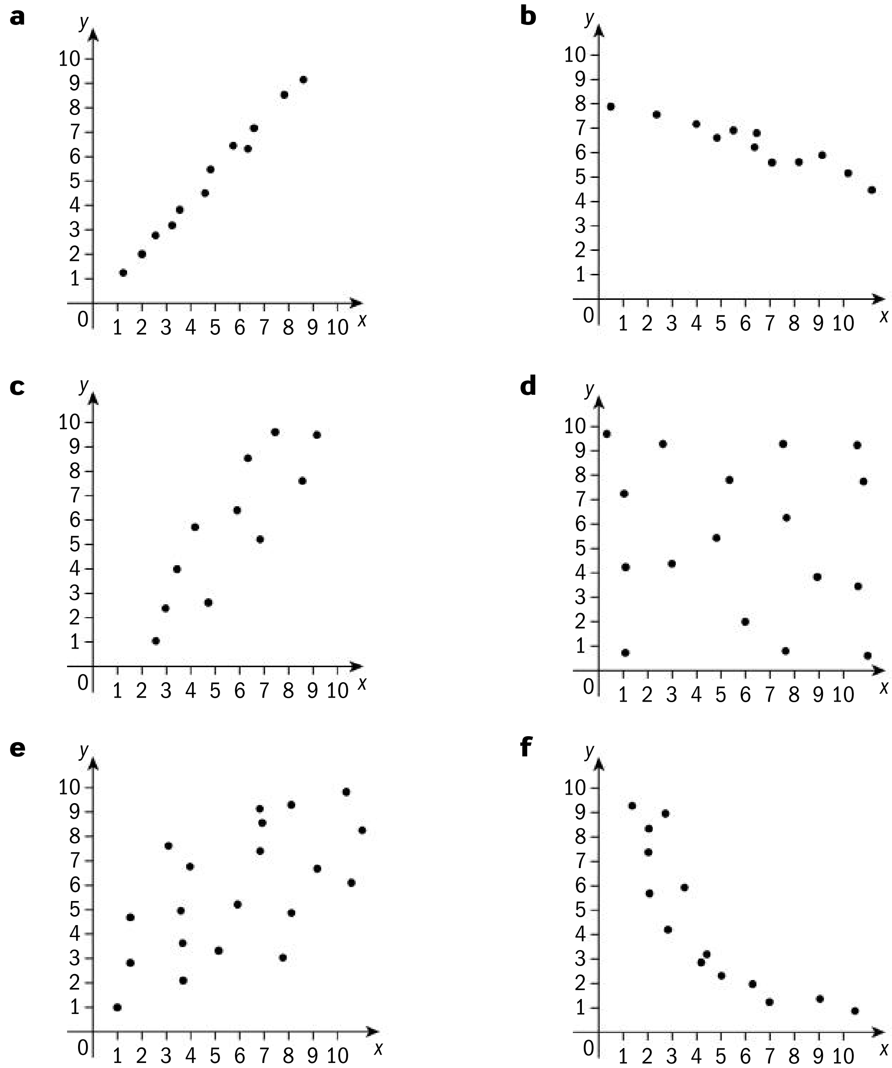


2 Para los siguientes conjuntos de datos:

i ¿Se trata de una correlación positiva, de una correlación negativa, o no hay asociación?

ii ¿Se trata de una relación lineal o no lineal?

iii ¿Se trata de una relación fuerte, moderada, débil o nula?



3 Copie y complete estas oraciones.

a Si las variables independiente y dependiente muestran una correlación positiva, entonces a medida que crece la variable independiente, la variable dependiente …………………

b Si las variables independiente y dependiente muestran una correlación negativa, entonces a medida que crece la variable independiente, la variable dependiente …………………

4 Esta tabla muestra la lluvia caída en Tennessee, en cm, desde 2000 a 2008.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Lluvia caída	42	51	39	44	31	33	30	28	21

a Muestre estos datos en un diagrama de dispersión.
b Describa la correlación.
c En general, ¿qué ha ocurrido con la caída de lluvia desde el año 2000?

5 Esta tabla muestra un grupo de amigos con sus calificaciones en matemáticas y ciencias.

Amigo	Tomás	Daniel	Luisa	Pablo	Diego	Juana	Lucas	José
Matemáticas	85	75	66	80	70	95	90	60
Ciencias	75	65	40	72	55	88	80	40

1 Dibuje un diagrama de dispersión para representar estos datos.
2 Describa la correlación en términos de fuerza, dirección y forma.

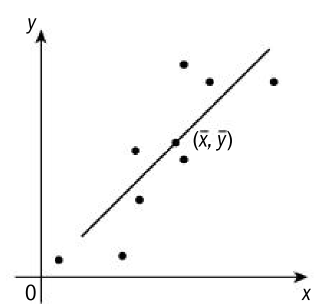
Investigación: la torre inclinada de Pisa (continuación)

a Elabore un diagrama de dispersión para los datos de la investigación de la torre inclinada de Pisa presentada al comienzo de este capítulo.
b Describa la correlación.
c ¿Qué ocurre con la inclinación a medida que pasan los años?
d Investigue los últimos avances en los esfuerzos por salvar a la torre inclinada de Pisa. Comente sobre los peligros de la extrapolación.

Extrapolar significa estimar un valor en un punto que es mayor (o menor) que los datos que tenemos. En este caso concreto, significa suponer que la tendencia en la inclinación se mantendrá constante.

10.2 La recta de ajuste óptimo

➔ Una **recta de ajuste óptimo** se dibuja sobre un diagrama de dispersión para hallar la dirección en la asociación entre dos variables y mostrar su tendencia. Esta recta de ajuste óptimo puede luego usarse para hacer predicciones.



➔ Para dibujar una recta de ajuste óptimo a ojo, se dibuja una recta que permita equilibrar el número de puntos que hay por encima de ella con el número de puntos que hay por debajo de ella. Se puede lograr un mejor trazado situando un punto de referencia que pertenezca a la recta. Este es el **punto medio** y se calcula hallando la media de las coordenadas x y la media de las coordenadas y de los puntos.

El punto medio se escribe $(\bar{x}, \bar{y})$.

Ejemplo 2

¿Existe una relación entre los gramos de grasa y el total de calorías de las comidas rápidas?

Comida	Total de grasa (g)	Total de calorías
Hamburguesa	9	260
Hamburguesa con queso	13	320
Cuarto de libra	21	420
Cuarto de libra con queso	30	530
Hamburguesa gigante	31	560
Sandwich tostado	31	550
Alitas de pollo	34	590
Pollo frito	25	500
Filet de pescado	28	560
Pollo a la parrilla	20	440
Pollo a la parrilla liviano	5	300

a Halle la media de los gramos de grasa.
b Halle la media del número de calorías.
c Elabore un diagrama de dispersión para estos datos.
d Sitúe el punto medio en su diagrama de dispersión y úselo para dibujar una recta de ajuste óptimo.

Respuestas

a Media de los gramos de grasa $= \dfrac{247}{11}$

$= 22,\dot{4}\dot{5}$

Media de los gramos de grasa

$= \dfrac{\textit{Total de gramos de grasa}}{\textit{Número de comidas}}$

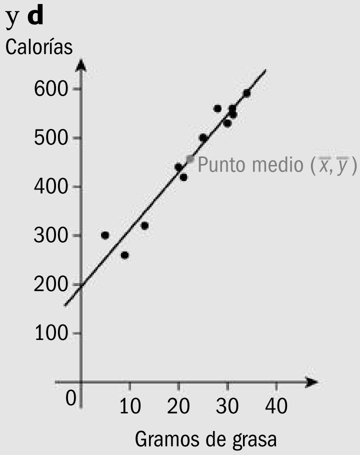
b Media del número de calorías $= \dfrac{5030}{11}$

$= 457,\dot{2}\dot{7}$

Media del número de calorías

$= \dfrac{\textit{Total del número de calorías}}{\textit{Número de comidas}}$

c y **d**



El punto (0,0) no necesariamente pertenece a la recta de ajuste óptimo. El punto medio sí pertenece a la recta y además debe quedar aproximadamente el mismo número de puntos a cada lado de la misma.

De aquí
$(\bar{x}, \bar{y}) = (22,\dot{4}\dot{5};\ 457,\dot{2}\dot{7})$

A la “recta de ajuste óptimo” también se la llama **recta de regresión**. El científico y estadístico británico Francis Galton (1822–1911) acuñó el término *regresión* en el siglo XIX.

Ejercitación 10B

1 La siguiente tabla muestra la relación entre la longitud y el ancho de una hoja de árbol de mango, medidos en milímetros.

Longitud	35	50	78	80	95	105	118	125	136	145
Ancho	25	30	38	50	36	42	52	48	58	62

a Halle el punto medio.
b Elabore un diagrama de dispersión y dibuje una recta de ajuste óptimo que pase por el punto medio.

2 La tabla siguiente muestra las estaturas y los pesos de diez estudiantes de dieciséis años de edad.

Nombre	Luis	Ema	Sara	Abel	Juan	Laura	Diego	Ana	Iván	Luca
Estatura (cm)	182	173	162	178	190	161	180	172	167	185
Peso (kg)	73	68	60	66	75	50	80	60	56	72

a Halle: **i** La estatura media **ii** El peso medio
b Elabore un diagrama de dispersión y dibuje una recta de ajuste óptimo que pase por el punto medio.

3 La tabla siguiente muestra el número de horas dedicadas a estudiar matemáticas y el aumento en las calificaciones de los estudiantes.

Horas de estudio	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Aumento en la calificación	–1	1	3	7	9	9	8	10	14

a Halle el punto medio.
b Elabore un diagrama de dispersión y dibuje una recta de ajuste óptimo que pase por el punto medio.
c Describa la correlación.
d ¿Qué puede decir acerca del número de horas dedicadas a estudiar matemáticas y el aumento en las calificaciones?

¿Cuáles son los riesgos de extrapolar? Un tema interesante para explorar es la extrapolación en los modelos financieros o climáticos.

La ecuación de la recta de ajuste óptimo que pasa por el punto medio

Los datos primarios raramente se ajustan a una recta de manera exacta. Generalmente, deberemos conformarnos con hacer predicciones aproximadas. Normalmente, tendremos un conjunto de datos cuyo diagrama de dispersión parece ajustarse a una recta, la recta de ajuste óptimo.

→ La ecuación de la recta de ajuste óptimo, también llamada **recta de regresión**, se puede utilizar para hacer predicciones.

Ejemplo 3

A continuación se muestran las notas de 10 estudiantes en el trabajo de clase y en el examen final de una asignatura escolar, calificados sobre un máximo de 100 puntos.

Estudiante	Liz	Juan	Uma	Félix	Juana	Axel	Raúl	Luca	Ana	Luis
Trabajo de clase	95	66	88	75	90	82	50	45	80	84
Examen final	95	59	85	77	92	70	40	50	Aus	80

Ana no asistió al examen final. No incluya sus notas en el cálculo del punto medio.

a Halle la media de las notas del trabajo de clase.

b Halle la media de las notas del examen final.

c Elabore un diagrama de dispersión y dibuje una recta de ajuste óptimo que pase por el punto medio.

d Halle la ecuación de la recta de regresión.

e Utilice la ecuación de la recta de regresión para estimar la nota de Ana en el examen final.

Respuestas

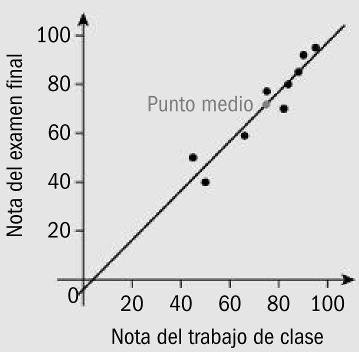
a $\text{Media de notas del trabajo de clase} = \dfrac{\text{Total de notas del trabajo de clase}}{\text{Número de estudiantes}}$

$\text{Media de notas del trabajo de clase} = \dfrac{675}{9} = 75$

b $\text{Media de notas del examen final} = \dfrac{\text{Total de notas del examen final}}{\text{Número de estudiantes}}$

$\text{Media de notas del examen final} = \dfrac{648}{9} = 72$

c



d Usando el punto medio y las notas de Uma, tenemos

$(x_1, y_1) = (75, 72)$; $(x_2, y_2) = (88, 85)$

$m = \dfrac{85 - 72}{88 - 75} = 1$

La ecuación de la recta es:

$y - 72 = 1(x - 75)$

$y = x - 3$

Usar $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde (x_1, y_1) es el punto medio y (x_2, y_2) es cualquier punto de la recta. Usar $y - y_1 = m(x - x_1)$ para la ecuación de la recta.

e $y = 80 - 3 = 77$

La nota estimada del examen final de Ana es 77.

La nota del trabajo de clase de Ana era 80. Sea $x = 80$.

El uso de la recta de regresión para predecir un valor que está dentro del rango de un conjunto de datos se llama **interpolación**. Generalmente es más confiable que la extrapolación.

Ejercitación 10C

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 Una enfermedad llamada tizón está poniendo en riesgo a las plantas de tomate. Una científica especializada en agricultura desea saber en qué medida la temperatura del invernadero afecta a la enfermedad. Con ese fin, diseña un experimento para hacer un seguimiento del porcentaje de hojas afectadas a distintas temperaturas.

Temperatura (*x* °F)	70	72	74	76	78	80
Porcentaje de hojas afectadas (*y*)	12,3	9,5	7,7	6,1	4,3	2,3

a Dibuje un diagrama de dispersión con una recta de regresión que pase por el punto medio.

b Halle la ecuación de la recta de regresión.

c Use su ecuación para estimar el porcentaje de hojas afectadas a una temperatura de 75 °F.

2 Los estudios de mercado en inversiones de bienes raíces revelaron las siguientes cifras de ventas para las casas a estrenar de diferentes precios durante el año pasado.

Precio (miles de £)	160	180	200	220	240	260	280
Ventas de casas a estrenar en el año	126	103	82	75	82	40	20

a Halle el precio medio de las casas.

b Halle la media del número de ventas.

c Dibuje un diagrama de dispersión con una recta de regresión que pase por el punto medio.

d Halle la ecuación de la recta de regresión.

e Use su ecuación para estimar el número vendido de casas valuadas en £230 000.

Material de ampliación disponible en línea:
Hoja de ejercicios 10: Más sobre el análisis bidimensional

Más ejemplos y ejercitación sobre la recta de regresión

Ejemplo 4

Se hizo un estudio para investigar la relación entre la edad en años de un niño, x, y el tiempo en que puede correr un kilómetro, t. Se recolectaron datos de niños de edades entre 7 y 18 años. La ecuación de la recta de regresión resultó ser $y = 20 - \frac{1}{2}x$. Interprete el valor de la pendiente y el punto de intersección con el eje y.

Respuesta

En el contexto de la pregunta, podemos decir que, en promedio, por cada año que cumple, el niño tarda 30 segundos (medio minuto) menos en correr un kilómetro. Para esta pregunta, el punto de intersección con el eje y no es pertinente puesto que un niño de 0 años no puede correr un kilómetro.

La pendiente es $-\frac{1}{2}$. *Esto significa que por cada aumento de 1 en x, hay una disminución de* $\frac{1}{2}$ *en y.*

El punto de intersección con el eje y es (0,20), lo que significa que cuando x es 0, y es 20.

La coordenada y de la intersección con el eje y es la altura de la recta cuando $x = 0$, y habrá casos en los que este valor no tenga sentido. Deberemos ser cautelosos a la hora de interpretar el significado de esta intersección. A veces, el valor $x = 0$ es imposible o representa una extrapolación peligrosa, fuera del rango de los datos.

Ejemplo 5

Una bióloga quiere estudiar la relación entre el número de árboles por hectárea, x, y el número de pájaros por hectárea, y. Con este fin, calcula la ecuación de la recta de regresión y obtiene $y = 8 + 5{,}4x$. Indique la pendiente y el punto de intersección con el eje y e interprételos.

Respuesta

La pendiente es 5,4. Esto significa que por cada árbol que agregamos, podremos esperar un promedio de 5,4 pájaros más por hectárea. El punto de intersección con el eje y es (0,8), lo que significa que, en áreas que no tienen árboles, hay 8 pájaros por hectárea.

Vemos que todas estas interpretaciones siguen un patrón: la **pendiente** de la recta es el aumento en y por cada unidad que aumenta x.

Ejercitación 10D

Para cada una de las siguientes situaciones, indique la pendiente y el punto de intersección con el eje y, e interprételos si son pertinentes. En caso de no ser pertinentes, indique el porqué.

1 Una profesora de ciencias sociales recogió datos sobre el número de días por año que un estudiante practica deportes, x, y el número de horas que el mismo estudiante dedica a sus tareas escolares, y. Llegó a la conclusión de que la relación está dada por $y = 40 - 0{,}3x$.

2 Un jefe de policía quiere investigar la relación entre el número de veces que una persona ha sido declarada culpable de un delito, x, y el número de criminales que conoce la persona, y. Se encontró que la ecuación es $y = 0{,}5 + 6x$.

3 Un médico investiga la relación entre el número de paquetes de cigarrillos que una persona fuma por día, x, y el número de días al año que la persona está enferma en el año, y. El doctor llega a la conclusión de que la ecuación de la recta de regresión es $y = 7 + 2{,}4x$.

4 Un vendedor de patines quiere investigar el número de clientes, y, que llegaron a su negocio cada año, x. La ecuación de la recta de regresión es $y = -5 + 100x$.

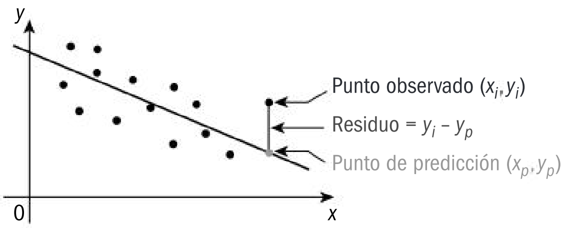
5 Un grupo de profesores de matemáticas y de ciencias quisieron comparar las calificaciones de los exámenes que habían tomado. La calificación en ciencias, y, y la calificación en matemáticas, x, dieron la recta de regresión $y = -10 + 0{,}8x$.

10.3 Regresión de mínimos cuadrados

El término **regresión** se usa en estadística de un modo bastante diferente de otros contextos. Es un método que se utilizó por primera vez para examinar la relación entre las estaturas de padres e hijos. Por supuesto, ambas están relacionadas, pero la pendiente es menor que 1,0. Un padre alto tiende a tener hijos más bajos que él; un padre bajo, tiende a tener hijos más altos que él. La estatura de los hijos retrocede en dirección a la media. El término “regresión” se usa ahora para describir muchas clases de ajustes de curvas.

Volvamos al problema de la inclinación de la torre de Pisa. Sabemos que hay una correlación positiva fuerte entre el número de años y la inclinación de la torre. Podemos elaborar un diagrama de dispersión para ilustrar los datos, hallar el punto medio y dibujar una recta de ajuste óptimo (recta de regresión) que pasa por el punto medio. La recta presentará inexactitudes porque solo contamos con un punto para trazarla y, por lo tanto, la recta de óptimo ajuste está dibujada “a ojo”.

Existe otro recurso para mejorar el trazado de la recta: los **residuos**.

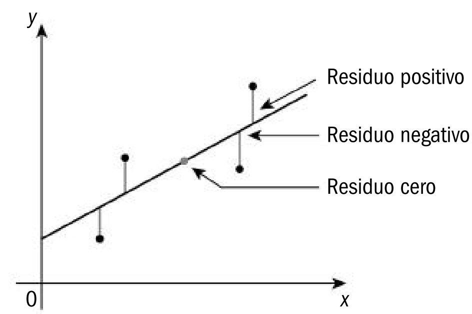


> ➔ Se llama **residuo** a la distancia vertical entre un punto y el gráfico de la ecuación de regresión.

El residuo es positivo si el punto está por encima del gráfico.

El residuo es negativo si el punto está por debajo del gráfico.

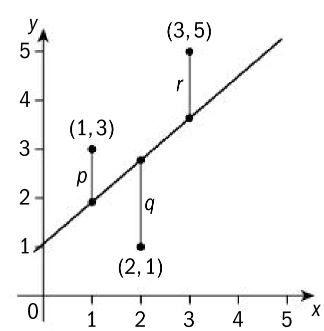
El residuo es 0 solo cuando el punto pertenece al gráfico.



La ecuación de la recta de regresión de *y* sobre *x*

La recta de regresión de mínimos cuadrados usa la fórmula que ya conocemos, $y - y_1 = m(x - x_1)$, pero incorpora el método de los mínimos cuadrados para hallar un valor adecuado para la pendiente, m.

> ➔ La recta de regresión de mínimos cuadrados es aquella que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos.



Remitiéndonos al diagrama, el objetivo es hacer que $p^2 + q^2 + r^2$ se aproxime a cero tanto como sea posible.

La fórmula que resulta es un tanto complicada:

La fórmula para hallar la pendiente (m) de la recta de regresión es:

➔ $m = \dfrac{S_{xy}}{(S_x)^2}$, donde

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n} \quad \text{y}$$

$$(S_x)^2 = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}$$

La primera aplicación del concepto de regresión que se conoce es el método de los mínimos cuadrados que fue publicado por Legendre en 1805, y por Gauss cuatro años más tarde. Legendre y Gauss aplicaron el método al problema de determinar, a partir de observaciones astronómicas, las órbitas de los cuerpos alrededor del Sol.

$\sum$ es la letra griega "S" y se la usa como instrucción para sumar datos. $\sum xy$ significa la suma de todos los valores xy.

Ejemplo 6

Use la fórmula de la regresión de mínimos cuadrados para hallar la ecuación de la recta de regresión que pasa por los puntos (1,3), (2,1) y (3,5) del diagrama de la página 345.

Respuesta

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n}$$

$$= 20 - \frac{6 \times 9}{3}$$

$$= 2$$

$$(S_x)^2 = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}$$

$$= 14 - \frac{6^2}{3}$$

$$= 2$$

La ecuación de la recta de regresión es:

$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{(S_x)^2}\left(x - \bar{x}\right)$$

$$y - 3 = \frac{2}{2}(x - 2)$$

$$y = x + 1$$

x	y	xy	x^2
1	3	3	1
2	1	2	4
3	5	15	9
6	9	20	14

Los términos en la fórmula

La suma de cada columna

El punto medio $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ *es (2, 3).*

La recta de regresión de y sobre x, que se puede usar para estimar y, sabiendo el valor de x.

Ahora que hemos visto cómo funciona la fórmula para la ecuación de la recta de regresión, de ahora en adelante podremos usar la calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG) para hallarla.

➔ Se espera que en los exámenes se use la CPG para hallar la ecuación de la recta de regresión.

Véanse las secciones 5.15 y 5.16 en el capítulo 17.

Ejemplo 7

La tabla muestra la distancia en kilómetros y las tarifas aéreas en dólares estadounidenses, desde el aeropuerto de Changi, Singapur, a doce destinos.

a Use su calculadora para dibujar aproximadamente un diagrama de dispersión con la recta de ajuste óptimo.

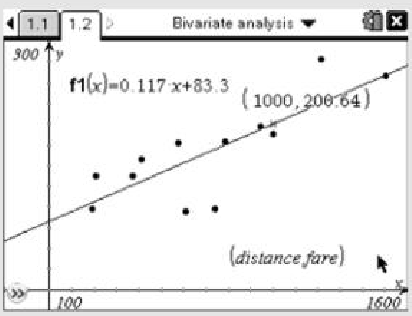
b Escriba la ecuación de la recta de ajuste óptimo.

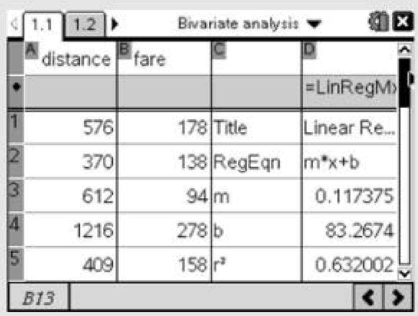
c Use la ecuación para estimar el costo de un vuelo de 1000 km.

Distancia	Tarifa
576	178
370	138
612	94
1216	278
409	158
1502	258
946	198
998	188
189	98
787	179
210	138
737	98

Respuestas

a





b $y = 0{,}117x + 83{,}3$

Generalmente, se deberá aproximar los resultados a tres cifras significativas.

c costo $= (0{,}117 \times 1000) + 83{,}3$
$= \$200{,}30$

Costo = \$(0,117 × distancia + 83,3)
Dólares y centavos, con dos cifras decimales

Ejercitación 10E

Para realizar esta ejercitación se requiere el uso de la CPG.

No sería buena idea predecir la concentración después de 8 horas a partir de esta ecuación, puesto que no sabemos si la relación continuará siendo lineal. El proceso de tratar de predecir un valor que está fuera del rango de datos se llama **extrapolación**.

1 Se administra medicación por goteo a un paciente y se mide la concentración en sangre de dicha medicación a intervalos de una hora. Los doctores creen que existirá una relación lineal entre las variables.

Tiempo *x* (horas)	0	1	2	3	4	5	6
Concentración *y*	2,4	4,3	5,0	6,9	9,1	11,4	13,5

a Muestre los datos en un diagrama de dispersión con la recta de ajuste óptimo.

b Escriba la ecuación de la recta de regresión.

c Halle la concentración en sangre de la medicación después de 3,5 horas.

2 La tabla siguiente muestra el valor del automóvil de Jai en miles de ringgits malayos (MYR) durante los primeros siete años después de comprarlo.

Antigüedad (años)	0	1	2	3	4	5	6	7
Costo (miles de MYR)	30	25	21	19	18	15	12	10

a Muestre el precio del automóvil en un diagrama de dispersión con la recta de ajuste óptimo.

b Escriba la ecuación de la recta de regresión.

c Estime el costo del automóvil de Jai luego de $4\frac{1}{2}$ años.

d Suponga que Jai cuida muy bien su automóvil. Explique por qué la ecuación no será útil para estimar el costo del automóvil después de transcurridos 50 años.

3 La tabla siguiente muestra el número de personas que se hicieron socios de un gimnasio y el número de horas de ejercicio que hicieron durante la semana pasada.

Persona	Luis	Ana	Lía	Pía	Juan	José	Raúl	Iván	Liz	Ema
Meses de socios	7	8	9	1	5	12	2	10	4	6
Horas de ejercicio	5	3	5	10	5	3	8	2	8	7

a Muestre los datos en un diagrama de dispersión con la recta de ajuste óptimo.

b Halle la ecuación de la recta de regresión.

c Si Nino ha sido socio desde hace tres meses, estime cuántas horas de ejercicio hizo la semana pasada.

d ¿Podría usar la ecuación para estimar cuántas horas de ejercicio hizo Nadia después de dos años como socia del gimnasio? Explique el porqué.

4 Los padres de Sara están preocupados porque Sara parece baja para su edad. El pediatra de la niña cuenta con el siguiente registro de sus estaturas.

Edad (meses)	36	48	51	57	60
Estatura (cm)	86	90	91	94	95

Un diagrama de dispersión mostró una asociación positiva fuerte entre la edad y la estatura, y finalmente, la recta de regresión de mínimos cuadrados resultó ser ESTATURA = 71,95 + 0,3833 EDAD. El médico quiere predecir la estatura de Sara a los 50 años si no prescribe alguna intervención (hormonas de crecimiento), y usa la recta de regresión para hacerlo. Analice la predicción del médico y luego comente sobre este procedimiento.

5 Vuelva a ver los datos de la torre inclinada de Pisa.

a Halle el punto medio.

b Dibuje un diagrama de dispersión con una recta de regresión que pase por el punto medio.

c Halle la ecuación de la recta de regresión.

d Use su ecuación para estimar la inclinación en 1990.

10.4 Cómo medimos la correlación

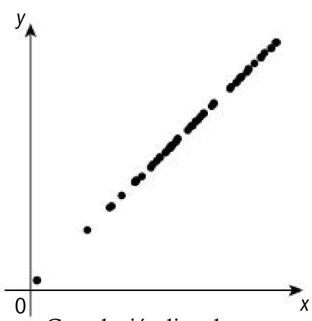
Hasta este momento hemos usado un diagrama de dispersión para ver si hay una relación (correlación) entre dos variables. La hemos caracterizado como positiva o negativa, y cero, si no hay correlación. También hemos dicho que la correlación puede ser débil, moderada o fuerte. Luego hallamos la ecuación de la recta de regresión de y sobre x y usamos la recta con fines predictivos.

Ahora nos abocaremos a clasificar la fuerza de una correlación numéricamente. Se utilizan varias escalas para tal fin; nosotros estudiaremos un coeficiente de correlación desarrollado por Karl Pearson.

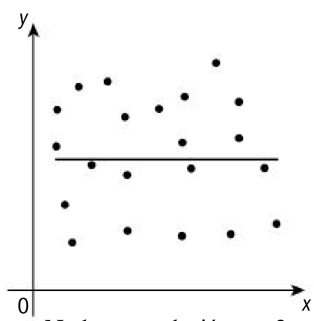
Karl Pearson (1857–1936) fundó el primer departamento universitario de estadística en University College de Londres, en 1911.

➔ **El coeficiente de correlación momento-producto de Pearson** (denotado con r) es una medida de la correlación entre dos variables X e Y, que da un valor entre +1 y –1 inclusive. Es ampliamente usado en las ciencias como una medida de la fuerza de la dependencia **lineal** entre dos variables.

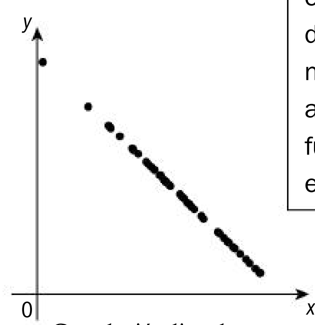
Si la relación entre dos variables no es lineal, entonces este coeficiente de correlación no representa adecuadamente la fuerza de la relación entre las variables.



Correlación lineal positiva perfecta $r = 1$

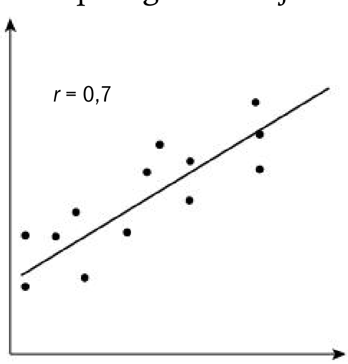


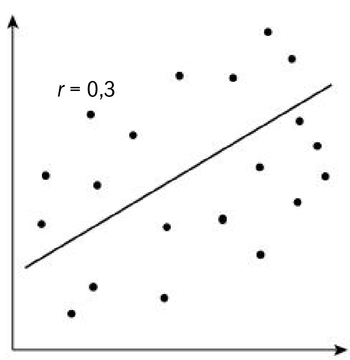
No hay correlación $r = 0$



Correlación lineal negativa perfecta $r = -1$

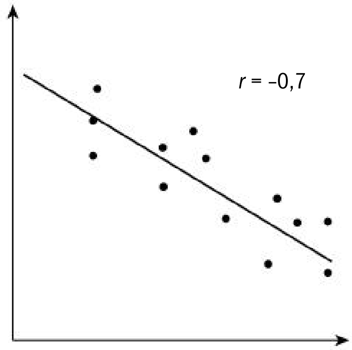
He aquí algunos conjuntos de datos más y sus valores de r:

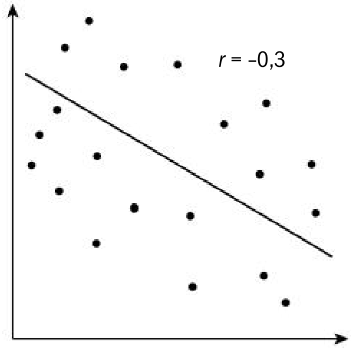




El valor de r, el coeficiente de correlación de Pearson, indica la fuerza de la relación entre dos conjuntos de datos.

Para la correlación negativa, los valores de r también son negativos:





➔ La fórmula para hallar el coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

donde

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n},\ S_x = \sqrt{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}} \quad \text{y}$$

$$S_y = \sqrt{\sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}}.$$

Deberíamos reconocer esta fórmula de la sección anterior.

➔ Una forma rápida de interpretar el valor de r es:

Valor de r	Correlación
$0 < \lvert r \rvert \le 0{,}25$	Muy débil
$0{,}25 < \lvert r \rvert \le 0{,}5$	Débil
$0{,}5 < \lvert r \rvert \le 0{,}75$	Moderada
$0{,}75 < \lvert r \rvert \le 1$	Fuerte

Ejemplo 8

Susana quiere determinar la fuerza de la correlación entre el número de cucharadas de fertilizante para plantas que utiliza y el incremento en el número de orquídeas que crecen en la planta. Use la fórmula del coeficiente de correlación de Pearson para interpretar la relación.

Planta	Cucharadas de fertilizante x	Incremento en el número de orquídeas y
A	1	2
B	2	3
C	3	8
D	4	7

▶ Continúa en la página siguiente.

Respuesta

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n}$$

$$= 60 - \frac{10 \times 20}{4} = 10$$

$$S_x = \sqrt{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{30 - \frac{10^2}{4}} = \sqrt{5}$$

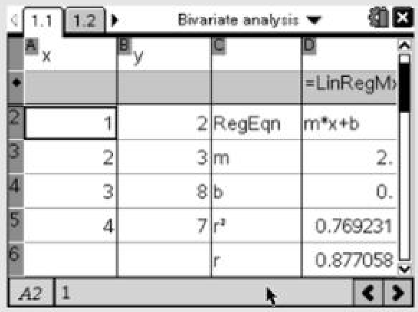
$$S_y = \sqrt{\sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{126 - \frac{20^2}{4}} = \sqrt{26}$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{26}} \approx 0{,}877$$

Una correlación positiva significa que a mayor número de cucharadas de fertilizante, mayor aumento en el número de orquídeas. El valor de r de 0,877 indica una correlación fuerte.

Planta	***x***	***y***	***xy***	***x²***	***y²***
A	*1*	*2*	*2*	*1*	*4*
B	*2*	*3*	*6*	*4*	*9*
C	*3*	*8*	*24*	*9*	*64*
D	*4*	*7*	*28*	*16*	*49*
Total	*10*	*20*	*60*	*30*	*126*



En el examen se espera que se utilice la CPG para calcular r. Aquí hemos mostrado la fórmula y una tabla para ayudar a comprender cómo se obtiene el valor. Véase la sección 5.16 en el capítulo 17.

La regresión y la correlación nos permiten comparar dos conjuntos de datos para ver si puede haber alguna conexión. Por ejemplo, podría ser interesante explorar la relación entre la expectativa de vida y el producto bruto interno de un país.

Si dos variables están correlacionadas, podemos predecir los valores de una basándonos en los valores de la otra. Por ejemplo, sabemos que existe una correlación positiva fuerte entre las calificaciones del Programa del Diploma del IB y los logros universitarios. Por lo tanto, un encargado de admisiones que procura seleccionar estudiantes con una alta probabilidad de buen rendimiento en la universidad, elegirá estudiantes con altas calificaciones en el IB.

Si bien la fórmula parece complicada a primera vista, hacer la tabla y evaluar el valor de r resulta bastante sencillo. A partir de ahora, usaremos la calculadora para hallar el valor de r.

¿Qué métodos estadísticos serían útiles para analizar el rendimiento de un negocio?

Ejercitación 10F

1 Nueve estudiantes hicieron un examen de francés y uno de español. La tabla muestra los resultados. Halle el valor de r y describa la correlación entre los dos conjuntos de resultados.

Materia	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Francés	56	56	65	65	50	25	87	44	35
Español	87	91	85	91	75	28	92	66	58

2 Una psicóloga social piensa que hay una correlación entre los ingresos y la educación. Encontró que la gente con mayores ingresos tiene más años de educación. Los resultados de su encuesta se muestran a continuación:

También se podría decir que la gente con más años de educación tiene mayores ingresos.

Persona	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Ingresos (miles de $)	125	100	40	35	41	29	35	24	50	60
Años de educación	19	20	16	16	18	12	14	12	16	17

a Halle el valor de r.
b ¿Qué puede decir acerca de la fuerza de la correlación?
c ¿Qué le indica el signo del valor de r?

3 ¿Un automóvil tarda más en frenar a medida que envejece? La tabla siguiente muestra la antigüedad (en años) de un auto y la distancia de frenado (en metros), a partir de una velocidad de $40\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

Antigüedad (meses)	9	15	24	30	38	46	53	60	64	76
Distancia de frenado (metros)	28,4	29,3	37,6	36,2	36,5	35,3	36,2	44,1	44,8	47,2

a Halle el valor de r.
b ¿Qué ocurre con la distancia de frenado a medida que el automóvil envejece?
c Describa la fuerza de la correlación.

4 A Catalina siempre se le ha dicho que deje de chatear en su computador y se concentre en sus estudios. Catalina primero quiere saber si esto tendrá algún efecto en sus calificaciones y decide encuestar a 10 amigos. Aquí se muestran los resultados obtenidos por Catalina:

Promedio de calificaciones	3,1	2,4	2,0	3,8	2,2	3,4	2,9	3,2	3,7	3,5
Tiempo de chat (horas/semana)	14	16	20	7	25	9	15	13	4	14

Una calificación A equivale a 4 puntos, una B a 3 puntos, una C a 2 puntos, una D a 1 punto y una F a 0 puntos.

a Halle el valor de r.
b Describa la correlación.
c Sobre la base de la encuesta, ¿aumentarían las calificaciones de Catalina si disminuyera el tiempo de chateo?

5 A Mauro siempre le dijeron que dejara de jugar con su computador y se dedicara a estudiar, por lo que decidió encuestar a 10 compañeros para ver el efecto en el promedio de calificaciones. Los resultados se muestran a continuación:

Promedio de calificaciones	2,7	3,8	1,5	3,6	2,2	3,8	2,0	1,9	2,5	3,0
Tiempo de juego (horas/semana)	10	24	25	17	5	26	14	30	22	7

a Halle el valor de *r*.

b Describa la correlación.

c Sobre la base de la encuesta, ¿aumentarían las calificaciones de Mauro si disminuyera el tiempo de juego?

Material de ampliación disponible en línea:
Hoja de ejercicios 10: Más sobre el análisis bidimensional

6 Halle e interprete el valor del coeficiente de correlación *r* para los datos de la torre inclinada de Pisa.

Ejercicios de revisión

1 Las frases **i**, **ii**, **iii**, **iv** y **v** representan descripciones de la correlación entre dos variables:

i Correlación lineal positiva alta

ii Correlación lineal positiva baja

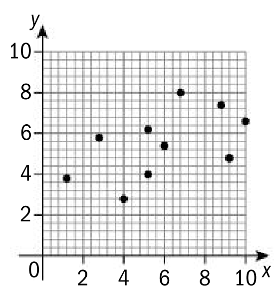
iii Correlación nula

iv Correlación lineal negativa baja

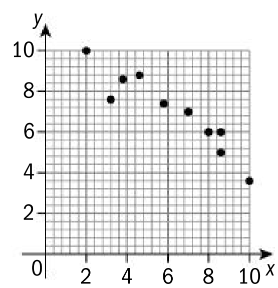
v Correlación lineal negativa alta

¿Qué frase representa mejor la relación entre las dos variables que se muestran en cada uno de los siguientes diagramas de dispersión?

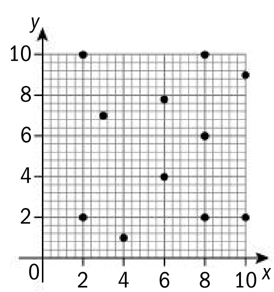
a



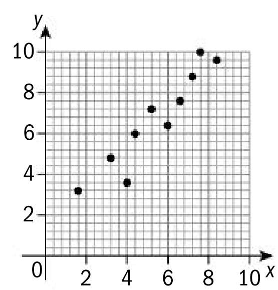
b



c

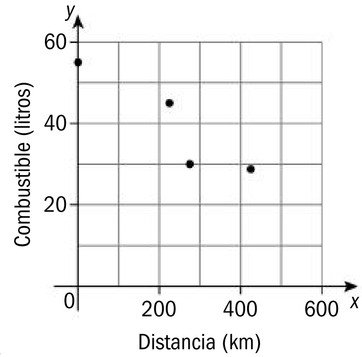


d



PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 La tabla siguiente da la cantidad de combustible en el tanque de un automóvil y el número de kilómetros recorridos después de haber llenado el tanque.



Distancia recorrida (km)	0	220	276	500	680	850
Cantidad de combustible en el tanque (litros)	55	43	30	24	10	6

a Copie el diagrama de dispersión y sitúe los puntos restantes. La distancia media recorrida, $\bar{x}$, es de 421 km, y la media de la cantidad de combustible en el tanque, $\bar{y}$, es de 28 litros. Este punto está situado en el diagrama.

b Dibuje aproximadamente la recta de regresión que pasa por el punto medio.

c Un automóvil recorrió 350 km. Use la recta de ajuste óptimo para estimar la cantidad de combustible que queda en el tanque.

3 Esta tabla muestra las edades de diez policías y el tiempo que tardan en correr 100 metros.

Edad	22	23	24	25	32	35	39	45	45	50
Tiempo	10,9	11,1	10,8	12,0	11,2	12,1	12,6	13	12,7	13,6

a Sitúe los datos en un diagrama de dispersión.

b Halle la edad media y el tiempo medio.

c Dibuje la recta de ajuste óptimo que pasa por el punto medio.

d ¿Cuánto tiempo prevé que tarde un policía de 30 años en correr 100 metros?

Ejercicio de revisión

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 La siguiente tabla muestra el número de flexiones que puede realizar David por minuto, durante 6 minutos.

Minutos	1	2	3	4	5	6
Flexiones	7	8	5	3	2	2

a Muestre los puntos en un diagrama de dispersión, junto con la recta de ajuste óptimo.

b ¿Qué ocurre con el número de flexiones a medida que transcurre el tiempo?

c Halle la ecuación de la recta de regresión.

d Halle el valor de r y úselo para describir la relación.

2 Las estaturas y los pesos de una muestra de 11 alumnos son:

Estatura (m) e	1,36	1,47	1,54	1,56	1,59	1,63	1,66	1,67	1,69	1,74	1,81
Peso (kg) p	52	50	67	62	69	74	59	87	77	73	67

a Escriba la ecuación de la recta de regresión de p sobre e.

b Use la recta de regresión para estimar el peso de una persona cuya estatura es de 1,6 m.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Una psicóloga quiere investigar la relación entre el CI (coeficiente intelectual) de un niño y el de su madre. Mide el CI de 8 niños y sus madres:

CI del niño *x*	87	91	94	98	103	108	111	123
CI de la madre *y*	94	96	89	102	98	94	116	117

a Escriba el coeficiente de correlación entre x e y.

b Halle la recta de regresión de y sobre x.

c Use la recta de regresión para estimar el CI de la madre cuyo hijo tiene un CI de 100.

Usando su respuesta al apartado **a**, explique cuán exacta considera que es esta estimación.

4 Ocho estudiantes tuvieron una prueba de matemáticas. Queremos saber si podríamos predecir el resultado de la prueba 2 a partir de los de la prueba 1. Los resultados se muestran a continuación (como porcentajes):

Prueba 1	54	72	32	68	55	80	45	77
Prueba 2	31	38	16	34	27	41	22	37

a Sitúe los resultados en un diagrama de dispersión.

b Describa la correlación a partir de su diagrama.

c Copie y complete la oración “Los estudiantes con calificaciones altas en la prueba 1 tienden a tener calificaciones .... en la prueba 2”.

d Halle la ecuación de la recta de ajuste óptimo.

e Si otro estudiante obtuvo una calificación de 40 puntos en la prueba 1, ¿qué nota podemos predecir para este estudiante en la prueba 2?

5 La altura de una planta se midió durante las primeras 8 semanas a partir de que fue comprada:

Semana *x*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Atura (cm) *y*	23,5	25	26,5	27	28,5	31,5	34,5	36	37,5

a Sitúe estos pares de valores en un diagrama de dispersión, haciendo que 1 cm represente 1 semana en el eje horizontal y 1 cm represente 2 cm en el eje vertical.

b Escriba el valor del punto medio.

c Sitúe el punto medio en el diagrama de dispersión. Rotúlelo L.

d **i** Escriba el coeficiente de correlación, r, para estos registros.

ii Comente acerca de este resultado.

e Halle la ecuación de la recta de regresión de y sobre x.

f Dibuje la recta de regresión en su diagrama de dispersión.

g Usando la ecuación, estime la altura de una planta después de $4\frac{1}{2}$ semanas.

h Alicia usa la ecuación para afirmar que una planta tendrá una altura de 62,8 cm luego de 30 semanas. Comente acerca de esta afirmación.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

6 Unos investigadores estudiaron el comportamiento de un grupo de 10 adolescentes. Evaluaron una variable de la personalidad llamada "agradabilidad", que es una medida de cuán agradable resulta una persona para los demás. Se preguntó cuán alegre, terca, amable, mandona y cooperativa era la persona. La tabla registra las medias de las puntuaciones obtenidas por cada adolescente en estas características.

Los investigadores también crearon una forma de medir los problemas de conducta. Los jóvenes reportaron varios problemas de conducta en los últimos seis meses, tales como el engaño, el lenguaje vulgar, el hurto y las peleas. La tabla registra la suma obtenida por cada adolescente en la medición de estos problemas.

Participante	Factor de agradabilidad	Problemas de conducta
Jorge	4,3	5
Guillermo	3,0	22
Oscar	3,4	10
Juan	3,3	12
Gerardo	2,9	23
Laura	4,0	21
Pilar	4,7	2
Nancy	2,4	35
Nora	2,9	12
Elizabeth	4,7	4

a Elabore un diagrama de dispersión y muestre la recta de regresión.

b ¿Qué ocurre a medida que aumenta el factor de agradabilidad?

c Halle el coeficiente de correlación.

d Describa la correlación.

e Copie y complete la oración "Los adolescentes más agradables tendieron a tener _________ problemas de conducta".

f Escriba la ecuación de la recta de regresión.

g Michelle estuvo ausente para las preguntas referidas a los problemas de conducta pero tuvo una puntuación de 4,5 en agradabilidad. Estime su puntuación para los problemas de conducta.

7 Cada día, una fábrica de ropa registra el número de abrigos que produce, x, y el costo de producción total en dólares, y. Los resultados obtenidos en nueve días se muestran en la siguiente tabla:

x	26	44	65	43	50	31	68	46	57
y	400	582	784	625	699	448	870	537	724

a Escriba la ecuación de la recta de regresión de y sobre x.

Use la recta de regresión como un modelo para responder a las siguientes preguntas.

b Interprete el significado de: **i** La pendiente **ii** La intersección con el eje y

c Estime el costo de producción de 70 abrigos.

d La fábrica vende las cajas a $19,99 cada una. Halle el menor número de abrigos que debería producir en un día para obtener una ganancia.

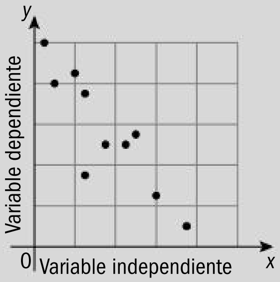
RESUMEN DEL CAPÍTULO 10

- El análisis bidimensional se ocupa de las relaciones entre pares de variables (x,y) en un conjunto de datos.

Diagramas de dispersión

- Los **diagramas de dispersión** (también llamados nubes de puntos) se usan para investigar posibles relaciones entre dos variables que se vinculan con un mismo "suceso".
- La relación entre dos variables recibe el nombre de **correlación**.
- Para dibujar un gráfico de dispersión, situamos los valores (x,y) de la tabla de datos con pequeños círculos. El patrón determinado por los círculos puede darnos alguna indicación acerca de la correlación.

  La **variable independiente** debe estar ubicada en el eje horizontal y la **variable dependiente** en el eje vertical.



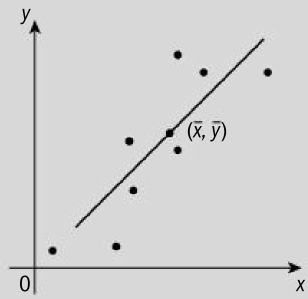
- Una tendencia general ascendente en el patrón de los círculos muestra una correlación **positiva**.
- Una tendencia general descendente en el patrón de los círculos muestra una correlación **negativa**.
- Un conjunto de círculos dispersos que no presentan ninguna tendencia puede indicar una correlación cercana a **cero**.
- Que exista una correlación entre dos conjuntos de datos no necesariamente significa que uno sea causado por el otro.

La recta de ajuste óptimo

- Una **recta de ajuste óptimo** se dibuja sobre un diagrama de dispersión para hallar la dirección en la asociación entre dos variables y mostrar su tendencia. Esta recta de ajuste óptimo puede luego usarse para hacer predicciones.
  - Si la recta va ascendiendo de izquierda a derecha, hay una correlación **positiva**.
  - Si la recta va descendiendo de izquierda a derecha, hay una correlación **negativa**.
  - Las correlaciones fuertes, sean positivas o negativas, presentan los puntos muy próximos a la recta de ajuste óptimo.
  - Las correlaciones débiles, sean positivas o negativas, presentan puntos que no están agrupados cerca de la recta de ajuste óptimo o sobre ella.

Continúa en la página siguiente.

- Para dibujar una recta de ajuste óptimo a ojo, se dibuja una recta que permita equilibrar el número de puntos que hay por encima de ella con el número de puntos que hay por debajo de ella. Se puede lograr un mejor trazado situando un punto de referencia que pertenezca a la recta. Este es el **punto medio** y se calcula hallando la media de las coordenadas *x* y la media de las coordenadas y de los puntos.



- La ecuación de la recta de ajuste óptimo, también llamada **recta de regresión**, puede usarse para realizar predicciones.

Regresión de mínimos cuadrados

- Se llama **residuo** a la distancia vertical entre un punto y el gráfico de la ecuación de regresión.
- La recta de regresión de mínimos cuadrados es aquella que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos.
- La fórmula para hallar la pendiente (m) de la recta de regresión es

$m = \dfrac{S_{xy}}{(S_x)^2}$, donde

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n} \quad \text{y} \quad (S_x)^2 = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}$$

- En los exámenes se espera que se utilice la CPG para hallar la ecuación de la recta de regresión.

Continúa en la página siguiente.

Cómo medimos la correlación

- El **coeficiente de correlación momento-producto de Pearson** (denotado por r) es una medida de la correlación entre dos variables X e Y, que da un valor entre +1 y −1 inclusive. Es ampliamente usado en las ciencias como una medida de la fuerza de la dependencia **lineal** entre dos variables.
- La fórmula para hallar el coeficiente de correlación de Pearson es: $r = \dfrac{S_{xy}}{S_x S_y}$

  donde

  $$S_{xy} = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n},\ S_x = \sqrt{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}} \quad \text{y} \quad S_y = \sqrt{\sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}}.$$

- Una manera rápida de interpretar el valor de r es:

Valor de r	Correlación
$0 < \lvert r \rvert \leq 0{,}25$	Muy débil
$0{,}25 < \lvert r \rvert \leq 0{,}5$	Débil
$0{,}5 < \lvert r \rvert \leq 0{,}75$	Moderada
$0{,}75 < \lvert r \rvert \leq 1$	Fuerte

¿Correlación o causalidad?

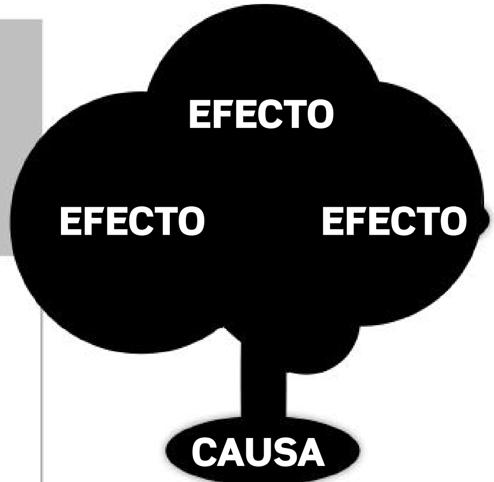
La **correlación** muestra en qué medida una variable varía con relación a otra. Por ejemplo, a medida que crece el valor de una, crece el valor de la otra.

La **causalidad** ocurre cuando dos variables tienen un efecto mutuo directo. Por ejemplo, la hora de ir a la cama afecta el número de horas de sueño.

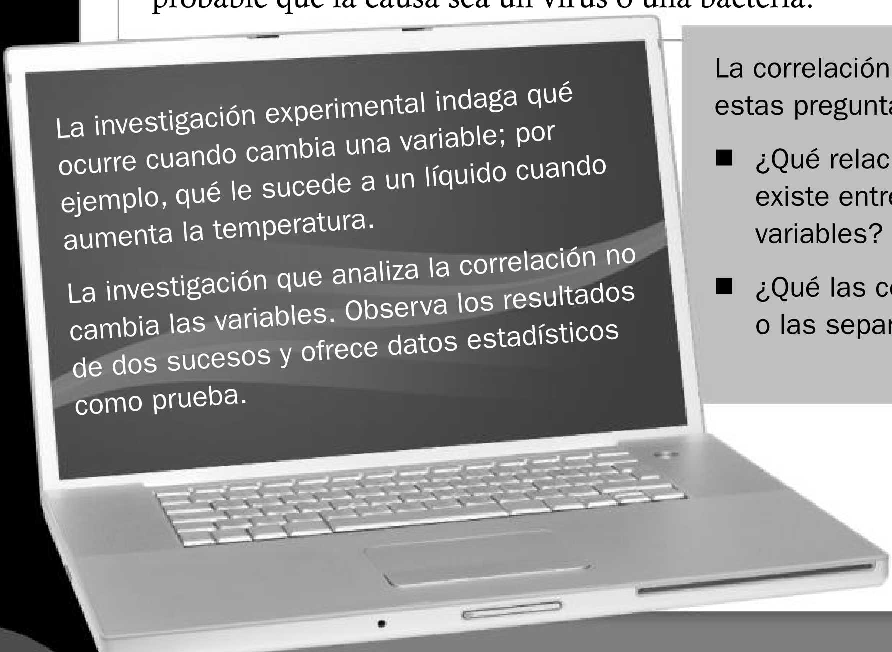
- Si hallamos una correlación fuerte entre el peso de un bebé al nacer y un alto rendimiento a los 24 años, ¿deberíamos sugerir que las embarazadas deben procurar que sus bebés nazcan con un peso alto porque los bebés más pesados alcanzan rendimientos más altos?

Algunas veces causa y efecto están íntimamente relacionados, pero no siempre. Es fácil suponer que dos sucesos fuertemente correlacionados también están conectados por alguna causalidad. Pero la correlación no significa que un suceso ha causado al otro.

Por ejemplo, si su gato permanece fuera toda la noche y luego se enferma, y esto ocurre muy a menudo, es probable que la enfermedad de su gato y el permanecer fuera toda la noche estén estrechamente conectados. Pero estar fuera toda la noche puede no ser la causa de la enfermedad. Es más probable que la causa sea un virus o una bacteria.



Que exista una correlación entre dos variables no es necesariamente prueba de causalidad.

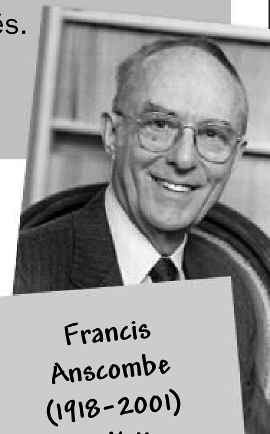


La correlación hace estas preguntas:

- ¿Qué relación existe entre dos variables?
- ¿Qué las conecta o las separa?

¿Cuál es causa y cuál es correlación?

- El acoso escolar daña la salud mental.
- El estrés ocasionado por ver eventos deportivos importantes puede ser peligroso para el corazón.
- La temperatura y el número de vendedores ambulantes de helado al cabo de ese día.
- La TV eleva la presión arterial en los adultos obesos.
- Los hombres de voz profunda tienen más hijos.
- Mirar demasiada violencia en la televisión conduce a que la gente actúe con mayor violencia en la vida real.
- Los cirujanos hábiles con los video-juegos se desempeñan mejor en las cirugías simuladas.
- Los que hablan sueco gozan de mejor salud que los que hablan neerlandés.



Francis Anscombe (1918–2001) estadístico británico

Los cuartetos de Anscombe

Los cuartetos de Anscombe son un grupo de cuatro conjuntos de datos que advierten contra la aplicación de métodos estadísticos individuales a los datos, sin antes representarlos gráficamente. Los conjuntos de datos tienen propiedades estadísticas sencillas idénticas (media, varianza, etc.) pero tienen representaciones gráficas totalmente distintas.

- Halle la media de *x*, la media de *y*, la varianza de *x*, la varianza de *y* y el valor de *r* para cada conjunto de datos.

Conjunto 1		Conjunto 2		Conjunto 3		Conjunto 4	
x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
4	4,26	4	3,1	4	5,39	8	6,58
5	5,68	5	4,74	5	5,73	8	5,76
6	7,24	6	6,13	6	6,08	8	7,71
7	4,82	7	7,26	7	6,42	8	8,84
8	6,95	8	8,14	8	6,77	8	8,47
9	8,81	9	8,77	9	7,11	8	7,04
10	8,04	10	9,14	10	7,46	8	5,25
11	8,33	11	9,26	11	7,81	8	5,56
12	10,84	12	9,13	12	8,15	8	7,91
13	7,58	13	8,74	13	12,74	8	6,89
14	9,96	14	8,1	14	8,84	19	12,5

- Escriba cómo cree que serán los gráficos y las rectas de regresión.
- Usando la CPG, dibuje aproximadamente el gráfico de cada conjunto de puntos en un sistema de ejes separado.
- Dibuje la recta de regresión de cada gráfico.
- Explique lo que observa.

11 Trigonometría

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

3.1 El círculo: medida de ángulos en radianes; longitud del arco; área del sector circular.

3.2 Definición de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ a partir del círculo de radio unidad; definición de $\tan\theta$ como $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$; valores exactos de las razones trigonométricas de 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ y sus múltiplos.

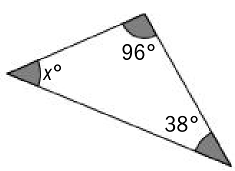
3.3 La relación fundamental $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

3.6 Resolución de triángulos; el teorema del coseno; el teorema del seno, incluido el caso ambiguo; área del triángulo $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}C$; aplicaciones.

Antes de comenzar

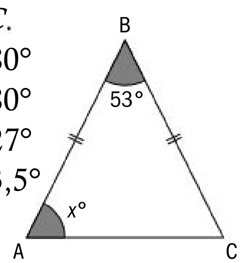
Qué necesitamos saber

1 Utilizar propiedades de triángulos, incluido el teorema de Pitágoras
Por ejemplo: Hallar el valor de x en cada diagrama

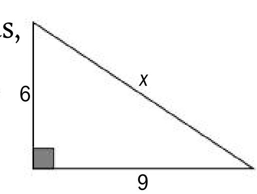


a $x° + 96° + 38° = 180°$
$x° = 180° - 96° - 38°$
$x = 46°$

b $\triangle ABC$ es isósceles, por lo tanto $\angle A = \angle C$.
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
$x° + 53° + x° = 180°$
$2x° = 180° - 53° = 127°$
$x = 63{,}5°$



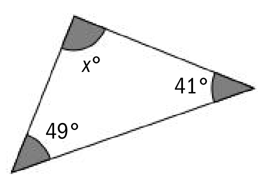
c Utilizando Pitágoras,
$x^2 = 6^2 + 9^2$
$x = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117}$
$\approx 10{,}8$



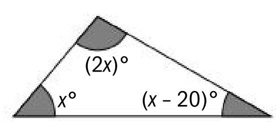
Comprobemos nuestras habilidades

1 Halle el valor de x en cada diagrama.

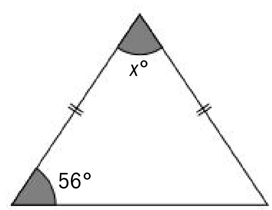
a



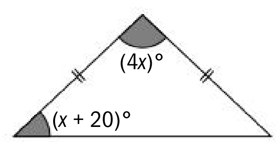
b



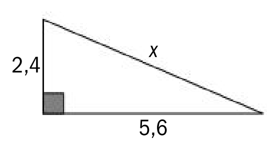
c



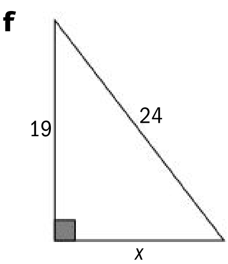
d



e



f



Algunas veces necesitamos conocer dimensiones (tales como la altura de un árbol o una montaña o el ancho de un cañón) que no podemos medir directamente. Los agrimensores pueden calcular estas dimensiones usando la trigonometría y el método de triangulación.

Por ejemplo, para hallar la distancia entre las laderas de un cañón, un agrimensor necesita un punto de referencia al otro lado del cañón, tal como un árbol o una formación rocosa. Luego mide la distancia exacta entre dos puntos conocidos, ubicados del lado en el que está parado, y también el ángulo formado entre estos puntos y el punto de referencia. Usando la trigonometría, esta información es suficiente para calcular la distancia al otro lado, sin siquiera tener que cruzar al otro lado del cañón.

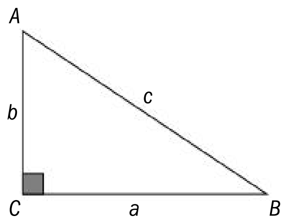
Algunos matemáticos usan la expresión “medida de un ángulo” en lugar de “amplitud de un ángulo”.

11.1 Trigonometría del triángulo rectángulo

Al principio de este capítulo examinaremos las relaciones entre las amplitudes de los ángulos y las longitudes de los lados de los triángulos rectángulos, y después pasaremos a tratar las áreas de triángulos y las aplicaciones cotidianas de la trigonometría.

Algunas personas dicen “triángulo recto” en lugar de “triángulo rectángulo”.

Comencemos por observar el triángulo rectángulo, con vértices en los puntos A, B y C. Los ángulos que se forman en los vértices son $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$, respectivamente.



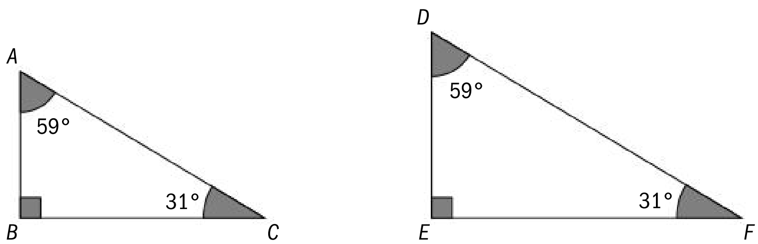
El lado AB, el lado opuesto al ángulo recto, se denomina **hipotenusa** del triángulo rectángulo.

Los ángulos pueden describirse de varias maneras. Este triángulo podría llamarse $\triangle ABC$; el ángulo en A podría llamarse $\hat{A}$; $B\hat{A}C$; $C\hat{A}B$; $\angle BAC$; $\angle CAB$. Los ángulos también pueden rotularse con letras griegas como θ (theta).

En este triángulo, vemos que el lado rotulado a (lado BC) es el lado opuesto a $\hat{A}$, el lado rotulado b (lado AC) es el lado opuesto a $\hat{B}$, y el lado rotulado c (lado AB) es el lado opuesto a $\hat{C}$. Es conveniente nombrar los lados en relación con sus ángulos opuestos.

Razones trigonométricas

Observemos los dos triángulos rectángulos siguientes:



$\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tienen ambos ángulos de amplitudes 59°, 31° y 90°. $\triangle DEF$ es más grande que $\triangle ABC$. Dos triángulos cuyos ángulos correspondientes son congruentes (iguales) se denominan **triángulos semejantes** y sus lados correspondientes son proporcionales.

En algunos libros de texto, los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo reciben el nombre de **catetos** del triángulo. La **hipotenusa** es el lado más largo del triángulo rectángulo.

Para $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}, \text{ y } \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}, \text{ y } \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

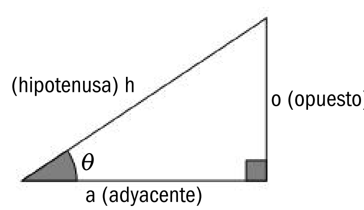
En los triángulos semejantes, sin importar cuán grandes o pequeños sean, los lados guardarán la misma proporción. En otras palabras, los lados correspondientes serán proporcionales entre sí.

El hecho de que los lados de triángulos semejantes determinen razones constantes nos ayuda a definir las tres razones trigonométricas: **seno**, **coseno** y **tangente**.

Estas razones varían según las amplitudes de los ángulos de los triángulos rectángulos.

En cualquier triángulo rectángulo:

- La **hipotenusa** (a menudo se abrevia **h** o **H**) es el lado más largo y se opone al ángulo recto.
- El lado que se opone al ángulo rotulado θ se llama lado **opuesto** (a menudo se abrevia **o** u **O**).
- El lado cercano al ángulo θ se llama lado **adyacente** (a menudo se abrevia **a** o **A**).

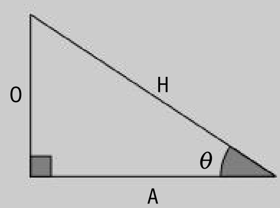


➔ Para cualquier triángulo rectángulo con un ángulo θ:

$$\text{seno } \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{O}}{\text{H}}$$

$$\text{coseno } \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{A}}{\text{H}}$$

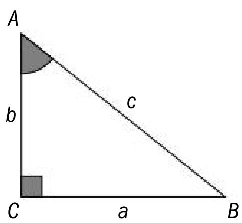
$$\text{tangente } \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{\text{O}}{\text{A}}$$



Una regla nemotécnica es una palabra o frase inventada que nos ayuda a recordar una lista o una fórmula. Podemos recordar estas fórmulas con la regla nemotécnica SOH-CAH-TOA.

Los nombres de estas razones trigonométricas se abrevian sen, cos y tan.

Observemos el siguiente triángulo rectángulo, con Â destacado.



$$\text{sen } A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

Podemos utilizar razones trigonométricas para calcular la medida de lados y ángulos en triángulos rectángulos.

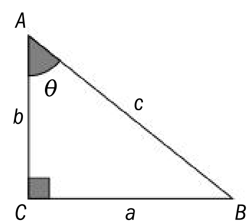
El astrónomo Aryabhata, que nació en la India aproximadamente en 476 d. C., creía que el Sol, los planetas y las estrellas giraban alrededor de la Tierra en órbitas diferentes. Comenzó a inventar cálculos trigonométricos para calcular la distancia de los planetas a la Tierra.

Relaciones entre seno, coseno y tangente

En el triángulo ABC:

$$\text{sen}\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$



Por lo tanto, $\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{b}$

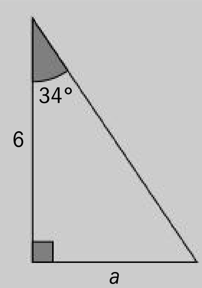
Pero $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

En consecuencia, $\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

➔ $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

Ejemplo 1

Para el siguiente triángulo, halle la longitud del lado *a*.



Aunque los matemáticos han estudiado triángulos durante miles de años, el término "trigonometría" fue utilizado por primera vez en 1595 por Bartholomaeus Pitiscus (alemán, 1561–1613).

▶ Continúa en la página siguiente.

Respuesta

$\tan 34° = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \dfrac{a}{6}$

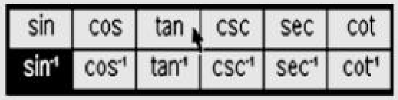
Usar la razón tangente

$a = 6 \tan 34°$

El lado que se opone al ángulo de 34° es el lado opuesto y el lado adyacente a 34° mide 6.

$a = 6 \tan 34° \approx 4{,}05$

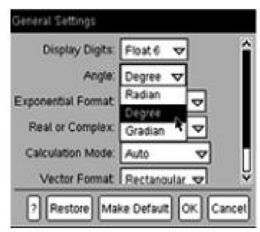
Podemos hallar el valor de tan 34° utilizando la calculadora de pantalla gráfica (CPG).



Para ingresar tan, presionar µ y luego seleccionar tan

Debemos asegurarnos de estar trabajando en **modo grados**.

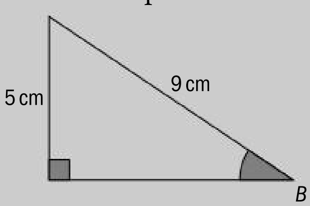
Para cambiar al modo grados, presionar [On] y seleccionar **5: Settings & Status** (configuraciones y estado) | **2: Settings** (configuraciones) | **1: General** (general). Utilizar la tecla [tab] para desplazarse a "Angle" (ángulo) y seleccionar **Degree** (grado). Presionar [enter] y luego seleccionar **4: Current** (actual).



Si conocemos las medidas de los lados de un triángulo rectángulo y queremos hallar la amplitud de los ángulos, necesitaremos utilizar las funciones trigonométricas inversas sen^{-1}, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$.

Ejemplo 2

Halle la amplitud de $\hat{B}$ en este triángulo.



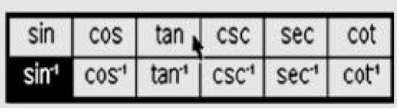
Respuesta

$\text{sen}\, B = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{5}{9}$

El lado opuesto $\hat{B}$ mide 5 cm y la hipotenusa mide 9 cm. Utilizar la razón seno

$\hat{B} = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{5}{9}\right) \approx 33{,}7°$

Para ingresar sen^{-1}, presionar µ y luego seleccionar sen^{-1}

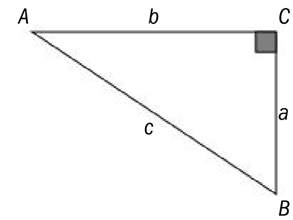


A sen^{-1} se le llama "arco seno", a $\cos^{-1}$, "arco coseno" y a $\tan^{-1}$, "arco tangente".

En este ejercicio tendremos que **resolver** triángulos rectángulos (calcular los ángulos y las medidas de los lados que no se conocen). Debemos asegurarnos de que la calculadora esté siempre en modo GRADOS.

Ejercitación 11A

Para cada pregunta, utilice el diagrama y la información dada para hallar todos los lados y ángulos que no se conocen. Todas las medidas están en centímetros. Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas donde sea necesario.



1 $a = 12$, $c = 20$

2 $b = 37$, $\hat{A} = 40°$

3 $c = 4{,}5$; $\hat{B} = 55°$

4 $b = 48$, $c = 60$

5 $a = 11$, $\hat{A} = 35°$

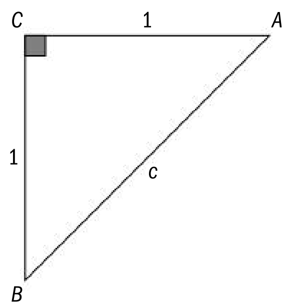
6 $a = 8{,}5$; $b = 9{,}7$

7 Si $a = 2x$, $b = 5x - 1$ y $c = x^2 + 1$ ($x \in \mathbb{Z}$), halle el valor de x, y los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$.

$x \in \mathbb{Z}$ significa que x es un número entero.

Triángulos rectángulos especiales

Observe el siguiente triángulo rectángulo isósceles.



Para resolver el triángulo, necesitamos hallar la longitud de AB y los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$.

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$1^2 + 1^2 = c^2$, entonces $c^2 = 2$, y $c = AB = \sqrt{2}$

Utilizando la razón tangente:

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\hat{A} = \tan^{-1}(1) = 45°$$

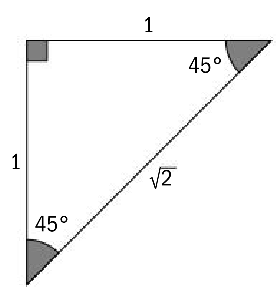
Este es un triángulo isósceles, por lo tanto, $\hat{A} = \hat{B}$, y $\hat{B} = 45°$.

Los siguientes son los valores de las razones trigonométricas del triángulo anterior.

➔ $\operatorname{sen} 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45° = \dfrac{1}{1} = 1$

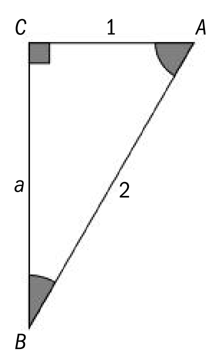


Ahora veamos el siguiente triángulo rectángulo, que es la mitad de un triángulo equilátero.

Para resolver este triángulo, necesitamos hallar BC, $\hat{A}$ y $\hat{B}$.

Utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$1^2 + a^2 = 2^2$, entonces $a^2 = 3$, y $a = BC = \sqrt{3}$



Utilizando la razón coseno:

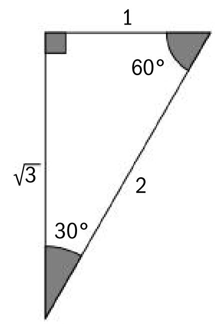
$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{A} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

$$\hat{B} = 180° - 90° - 60° = 30°$$

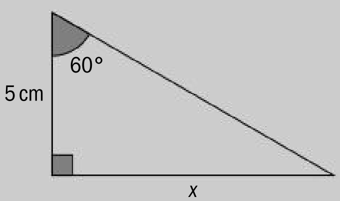
Los siguientes son los valores para todas las razones trigonométricas de este triángulo con ángulos de 30°, 60° y 90°.

➔ $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$	$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$
$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$



Ejemplo 3

Halle el valor **exacto** de x en el siguiente triángulo.



Respuesta

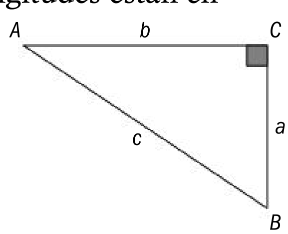
$\tan 60° = \frac{x}{5} = \sqrt{3}$

$x = 5\sqrt{3}$ cm

Cuando se pide una respuesta **exacta**, debe dejarse la raíz cuadrada o el radical en la respuesta y **no** cambiarlo a un decimal redondeado.

Ejercitación 11B

1 Utilice el diagrama para resolver cada triángulo rectángulo. Dé las respuestas en forma exacta. Las longitudes están en centímetros.

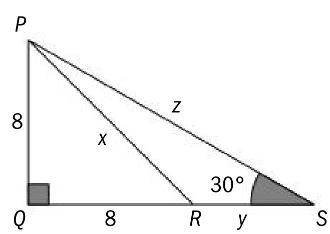


- **a** $a = 12$, $c = 24$
- **b** $b = 9$, $\hat{A} = 45°$
- **c** $c = 4{,}5$; $\hat{B} = 60°$
- **d** $b = 6$, $c = 4\sqrt{3}$
- **e** $a = 5\sqrt{2}$, $c = 10$

En este contexto, "resolver" significa hallar todos los lados y ángulos desconocidos.

El diagrama no siempre estará a escala.

2 Halle los valores exactos de x, y y z.



3 $\triangle ABC$ tiene $\hat{A} = 60°$, $\hat{C} = 90°$, $BC = x + 2$, y $AB = x^2 - 4$.

a Halle el valor exacto de x.

b Halle la longitud exacta del lado AC.

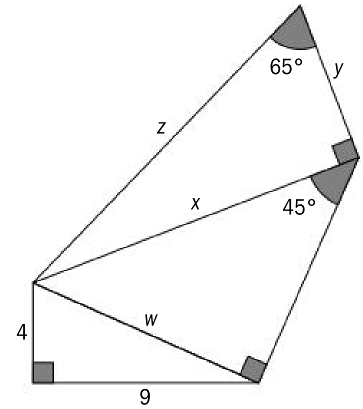
4 El triángulo ABC tiene $\hat{B} = 45°$, $\hat{C} = 90°$, $AC = 4x - 1$ y $BC = x^2 + 2$.

a Halle el valor exacto de x.

b Halle la longitud exacta del lado AB.

5 En el diagrama, halle el valor de w, x, y y z, con una aproximación de una cifra decimal. Las longitudes están en centímetros.

Comience por realizar un dibujo aproximado del triángulo.

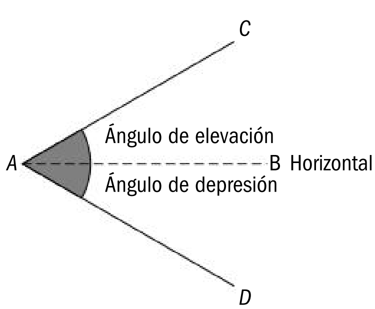


11.2 Aplicaciones de la trigonometría del triángulo rectángulo

En la sección anterior, hallamos longitudes y ángulos en triángulos rectángulos utilizando seno, coseno y tangente. En esta sección, veremos cómo aplicar esas razones trigonométricas para resolver problemas en situaciones cotidianas.

Comencemos con algo de terminología.

→ El **ángulo de elevación** es el ángulo "por encima" de la recta horizontal.
El **ángulo de depresión** es el ángulo "por debajo" de la recta horizontal.

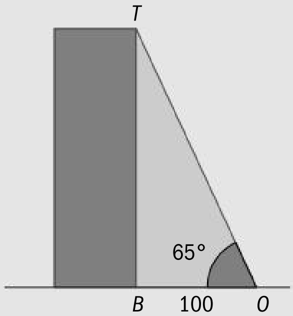


Ejemplo 4

Un observador se encuentra a 100 m de la base de un edificio. El ángulo de elevación de la parte superior del edificio es 65°. ¿Cuál es la altura del edificio, medida al metro más próximo?

▶ Continúa en la página siguiente.

Respuesta



Comenzar por dibujar un diagrama Sea O la posición del observador en la tierra, B la base del edificio y T la parte superior.
Marcar el ángulo de elevación de 65°

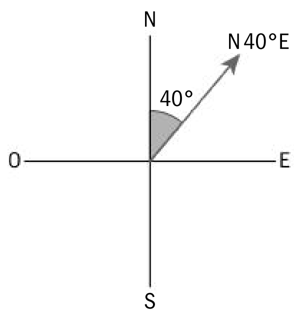
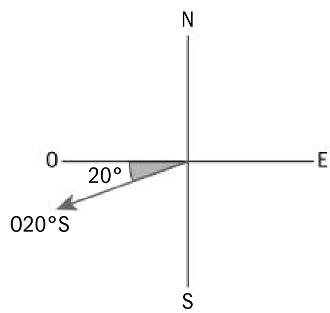
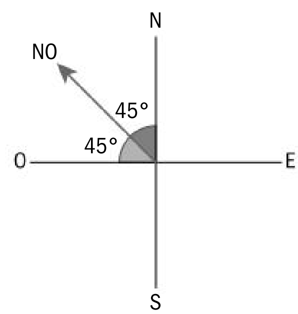
$\tan 65° = \dfrac{BT}{100}$, por lo tanto,
$BT = 100 \tan 65° \approx 214{,}45\ldots$
El edificio mide 214 m, al metro más próximo.

Estamos calculando la altura del edificio, la longitud BT.

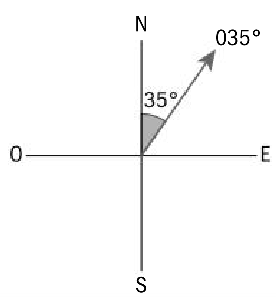
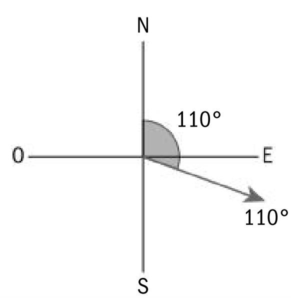
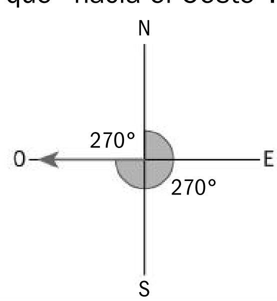
También es necesario resolver problemas utilizando puntos cardinales y rumbos (orientaciones).

➔ Los cuatro **puntos cardinales** son Norte (N), Sur (S), Este (E) y Oeste (O).
La medición del **rumbo**, que se expresa siempre utilizando tres cifras, se realiza en el sentido de las agujas del reloj, desde el Norte.

Cuando se utilizan los **puntos cardinales** para indicar una dirección, se verán expresiones como:

N40°E, que significa 40° al Este desde el Norte. 	**O20°S**, que significa 20° al Sur desde el Oeste. 	**NO**, que significa 45° entre Norte y Oeste. 

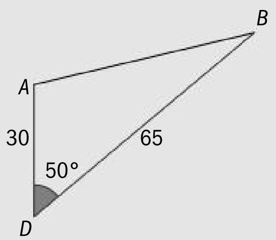
Cuando se utiliza el **rumbo** para indicar una dirección, se verán expresiones como:

035°, que significa 35° en sentido de las agujas del reloj, desde el Norte. 	**110°**, que significa 110° en sentido de las agujas del reloj, desde el Norte. 	**270°**, que significa 270° en sentido de las agujas del reloj, desde el Norte. Un rumbo de 270° es lo mismo que “hacia el Oeste”. 

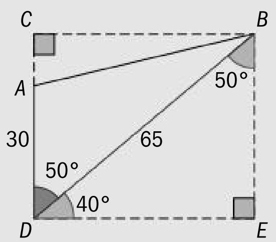
Ejemplo 5

Dos barcos zarpan al mismo tiempo.
El barco A navega 30 km en dirección Norte antes de soltar el ancla.
El barco B navega 65 km, siguiendo un rumbo de 050°, antes de soltar el ancla.
Halle la distancia entre los barcos cuando están quietos, al kilómetro más próximo.

Respuesta



Dibujar un diagrama donde el punto D representa el muelle desde el que las naves zarparon. El barco A se detiene en A y el barco B se detiene en B.
Necesitamos hallar la longitud AB, la distancia entre los barcos cuando están quietos.



No hay triángulos rectángulos en el diagrama; por lo tanto, habrá que señalarlos. La hipotenusa de cada triángulo rectángulo es la trayectoria de uno de los barcos. Añadir cualquier ángulo que conozcamos, utilizando propiedades de los ángulos

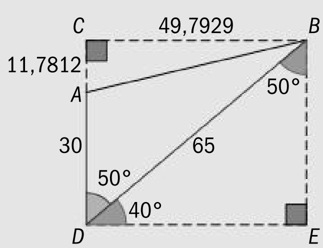
El ángulo *DBE* se halla utilizando la propiedad de ángulos alternos entre paralelas.

$\operatorname{sen} 40° = \dfrac{BE}{65}$ — *Hallar BE*

Por lo tanto, $BE = 65 \operatorname{sen} 40°$
$\approx 41{,}781\ldots$

$\cos 40° = \dfrac{DE}{65}$ — *Hallar DE*

Entonces $DE = 65 \cos 40°$ — *Almacenar estos valores en la CPG*
$= 49{,}7928\ldots$
$BC = DE = 49{,}7928\ldots$
$AC = BE - 30 = 11{,}7811\ldots$



Añadir la nueva información al diagrama

$AB^2 = (49{,}7928\ldots)^2 + (11{,}7811\ldots)^2$ — *Utilizar el teorema de Pitágoras en △ABC. Utilizar los valores almacenados*
Entonces $AB = 51{,}1677\ldots$
La distancia entre los barcos es de aproximadamente 51 km, al km más próximo.

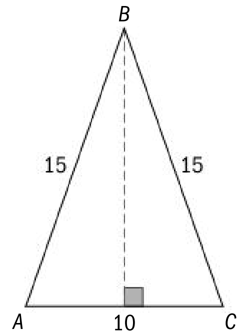
Utilizamos los valores exactos en los pasos intermedios y redondeamos únicamente la respuesta final.

Ejercitación 11C

1 Un triángulo isósceles *ABC* tiene lado $AC = 10\,\text{cm}$ y $AB = CB = 15\,\text{cm}$, tal como se muestra.

a Halle la altura del triángulo.

b Halle la amplitud de $B\hat{A}C$ y $A\hat{B}C$.

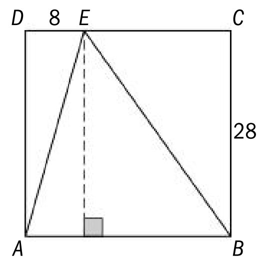


2 $\triangle ABE$ cabe exactamente dentro del cuadrado *ABCD*, tal como se muestra. $BC = 28\,\text{cm}$ y $DE = 8\,\text{cm}$.

a Halle las longitudes de los segmentos *AE* y *BE*.

b Halle la amplitud de $A\hat{E}D$, $E\hat{B}A$ y $A\hat{E}B$.

Dé las respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.



3 Un observador parado en la cima de un acantilado vertical, 120 m sobre el nivel del mar, observa un barco en el agua, con un ángulo de depresión de 9°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de la base del acantilado?

> Si el diagrama no se proporciona con la pregunta, deberemos primero dibujar uno nosotros mismos.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Un rectángulo tiene un largo de 25 mm y un ancho de 18 mm. Halle los ángulos formados por las diagonales del rectángulo.

5 Ana camina 2 km hacia el Norte, luego gira y camina otros 3 km en la dirección N35°O. Halle la distancia y el rumbo desde su punto de partida.

6 Desde una ventana del edificio A, a 12 m del nivel del suelo, el ángulo de elevación de la parte superior del edificio B, que se encuentra del otro lado de la calle, es de 40°. Si la distancia entre los edificios es de 70 m, ¿cuál es la altura del edificio B?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

7 Un barco sale del puerto y navega 35 km con rumbo 047°. Después gira y navega 15 km con rumbo 105°. ¿Qué distancia y con qué rumbo debe navegar el barco para regresar directamente al puerto?

8 Los edificios X e Y están en lados opuestos de la calle, a 95 m de distancia el uno del otro. Desde un punto en el techo del edificio X, el ángulo de depresión de la base del edificio Y es 55° y el ángulo de elevación de la parte superior del edificio Y es de 35°. ¿Qué altura tienen los dos edificios?

> Es una buena idea verificar las respuestas finales, para asegurarse de que el lado más corto es el opuesto al ángulo menor y el lado más largo es el opuesto al ángulo mayor.

9 Juan camina hacia el Norte por un camino recto y ve una torre en un campo a su derecha, sobre un rumbo de 018°. Después de caminar otros 240 m, se da cuenta de que la torre está sobre un rumbo de 066°. Si sigue caminando hacia el Norte, ¿qué tan cerca pasará de la torre?

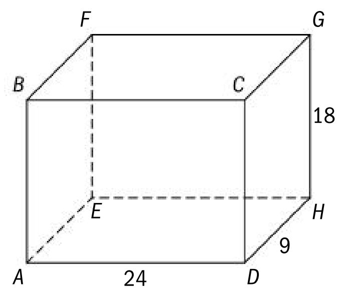
10 Desde una posición al nivel del suelo, Helena se da cuenta de que el ángulo de elevación de la parte superior de un edifico es de 40°. Cuando se acerca 20 metros más al edificio, el ángulo de elevación es de 55°. Halle la altura del edificio.

A menos que la pregunta indique lo contrario, debemos suponer que el suelo es horizontal.

11 Un automóvil está viajando a una velocidad constante sobre una carretera recta. Un pasajero que viaja en él observa un puente sobre la carretera, con un ángulo de elevación de 5°. Diez segundos más tarde, el ángulo de elevación del puente es de 17°. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el automóvil pase directamente bajo el puente?

12 El diagrama muestra un prisma rectangular *ABCDEFGH*. $AD = 24$ cm, $DH = 9$ cm, y $HG = 18$ cm. Halle estos ángulos.

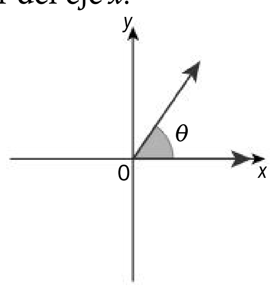
a $H\hat{A}D$
b $A\hat{B}E$
c $H\hat{A}G$
d $A\hat{G}D$



11.3 Utilización de los ejes de coordenadas en trigonometría

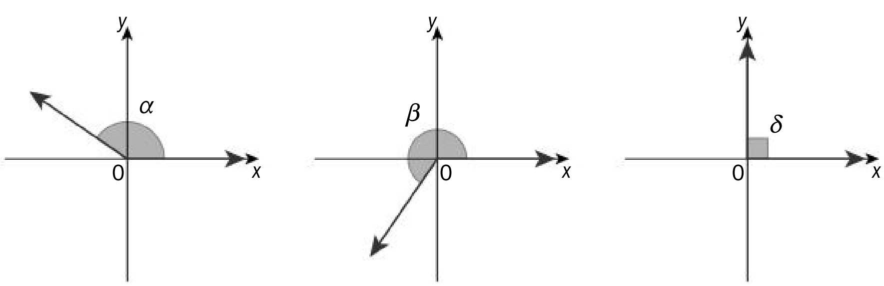
El ángulo θ en un sistema de coordenadas cartesianas tiene su vértice en el origen, como se muestra en el diagrama. Un ángulo positivo se mide en sentido antihorario a partir del eje x.

A veces se dice "antihorario" en lugar de "sentido contrario a las agujas del reloj".



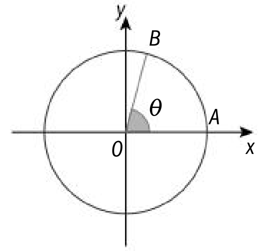
En algunos libros de texto, al lado del ángulo que se ubica sobre el eje x positivo se le llama **lado inicial**. Al otro lado se le llama **lado terminal**. Un ángulo como este, con su vértice en el origen y su lado inicial sobre el eje x positivo se dice que está en la **posición estándar**.

Aquí aparecen tres ángulos positivos α, β y δ.

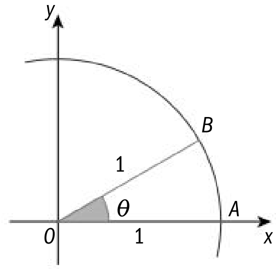


Las primeras cuatro letras del alfabeto griego son alfa α, beta β, gama γ y delta δ.

Este diagrama muestra un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. El centro del círculo está en el origen y su radio mide una unidad. Se le llama **círculo de radio unidad**.



En el diagrama, el ángulo θ es positivo. Ahora echemos un vistazo a los ángulos agudos en el primer **cuadrante** del círculo de radio unidad. OA y OB son radios del círculo de radio unidad, entonces $OA = OB = 1$.

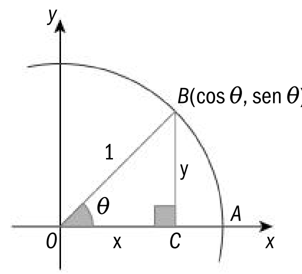


Luego, utilicemos el ángulo agudo θ para formar un triángulo rectángulo BOC.
Utilizando las razones trigonométricas en ΔBOC,

$\cos\theta = \dfrac{x}{1}$, por lo tanto $x = \cos\theta$,

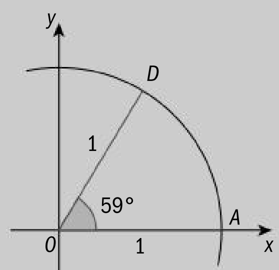
y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{1}$, por lo tanto $y = \operatorname{sen}\theta$.

En consecuencia, el punto B tiene coordenadas ($\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$).



Ejemplo 6

Halle las coordenadas exactas del punto D, luego dé esos valores con una aproximación de tres cifras significativas.

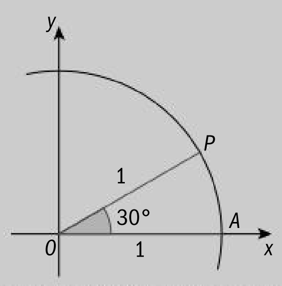


Respuesta

Las coordenadas exactas del punto D son (cos 59°, sen 59°).	*AÔD es un ángulo positivo.*
Con tres cifras significativas, las coordenadas de D son (0,515; 0,857).	*Utilizar la CPG para hallar los valores de cos 59° y sen 59°*

Ejemplo 7

En el diagrama, halle las coordenadas exactas del punto P.



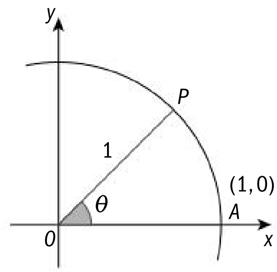
Respuesta

Las coordenadas exactas de P son $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

AÔP está en el primer cuadrante. Por lo tanto, las coordenadas del punto P son (cos 30°, sen 30°).

En la página 368 se pueden encontrar los valores exactos de seno 30° y coseno 30°.

Ejercitación 11D



1 Utilice el diagrama para hallar las coordenadas del punto P para cada valor de θ. Dé sus respuestas con una aproximación de tres figuras significativas.

a $\theta = 20°$
b $\theta = 17°$
c $\theta = 60°$
d $\theta = 74°$
e $\theta = 90°$

El diagrama no siempre estará a escala.

2 Utilice el diagrama de la pregunta 1 para hallar el valor de θ para las coordenadas del punto P dadas. Dé sus respuestas al grado más próximo.

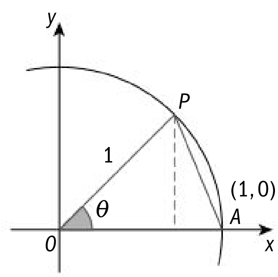
a $P(0{,}408;\ 0{,}913)$
b $P(0{,}155;\ 0{,}922)$
c $P(0{,}707;\ 0{,}707)$
d $P(0{,}970;\ 0{,}242)$

Estas coordenadas han sido redondeadas a 3 cifras significativas.

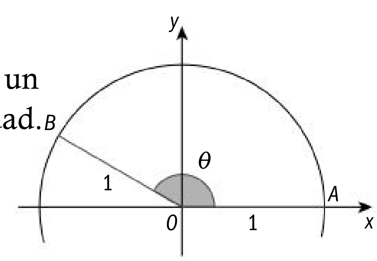
3 Utilice el diagrama para hallar el área de $\triangle AOP$ para el valor dado de θ. Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.

a $\theta = 70°$
b $\theta = 38°$
c $\theta = 24°$
d $\theta = 30°$

El segmento punteado es la altura del triángulo.



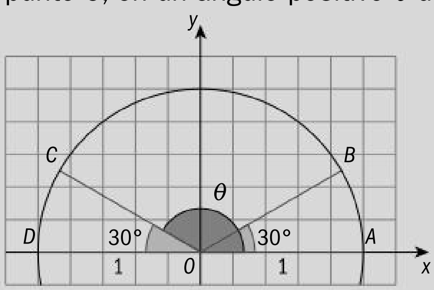
Ahora observemos los ángulos en el segundo cuadrante. Estos ángulos son obtusos (miden entre 90° y 180°). A la derecha vemos un ángulo obtuso en el segundo cuadrante de un círculo de radio unidad.



Cuando se trabaja con ángulos obtusos a veces es útil considerar cómo se relacionan con los ángulos del primer cuadrante (ángulos agudos).

Investigación: ángulos obtusos

El siguiente diagrama muestra al punto B, en un ángulo positivo de 30° desde OA, y al punto C, en un ángulo positivo θ desde OA.



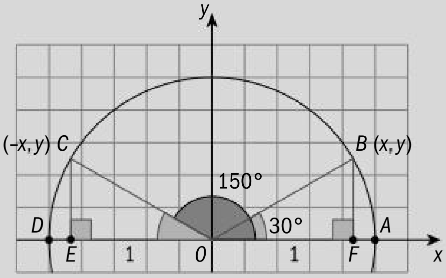
Halle el valor de θ.

¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

Utilice la simetría del círculo de radio unidad para escribir las coordenadas del punto C.

▶ Continúa en la página siguiente.

Ahora observe los triángulos formados por los lados *OB* y *OC* y el eje *x*.



$\triangle EOC$ es congruente con $\triangle FOB$. Ambos son triángulos con ángulos que miden 30°, 60° y 90°, y cuya hipotenusa mide 1. También podemos ver que si las coordenadas del punto *B* son (x, y), las coordenadas del punto *C* son (–x, y).

Las coordenadas de *B* son (cos 30°, sen 30°) o $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Por lo tanto, las coordenadas del punto *C* son (cos 150°, sen 150°), que coinciden con las coordenadas (–cos 30°, sen 30°) o $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Dibuje diagramas para mostrar los siguientes pares de ángulos en el círculo de radio unidad.

1 40° y 140°

2 25° y 155°

3 68° y 112°

Rotule las coordenadas de los puntos donde los lados no horizontales cortan al círculo de radio unidad. ¿Qué observa?

A partir de la investigación, conocemos una importante propiedad de los ángulos suplementarios.

Los ángulos suplementarios suman 180°.

➔ Para los ángulos suplementarios α y β, sen α = sen β, y cos α = –cos β.

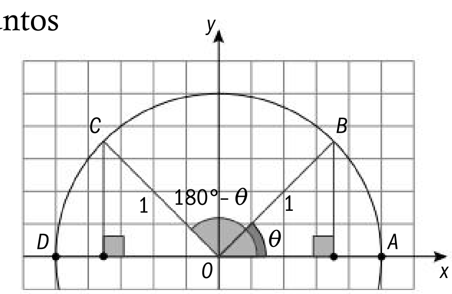
➔ Para cualquier ángulo θ, sen θ = sen $(180° - \theta)$, y cos $\theta = -\cos(180° - \theta)$.

Veremos cómo se ilustran gráficamente estas propiedades cuando estudiemos los gráficos de las funciones de seno y coseno en el capítulo 13.

Esta propiedad nos servirá más adelante.

Ejercitación 11E

1 Utilice el diagrama para hallar las coordenadas de los puntos *B* y *C* para los valores dados de θ. Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.



a $\theta = 30°$

b $\theta = 57°$

c $\theta = 45°$

d $\theta = 13°$

e $\theta = 85°$

2 Utilice el diagrama de la pregunta 1 para hallar el valor de θ para cada una de las posiciones del punto C dadas. Dé sus respuestas a la décima de grado más próxima.

a $C(-0{,}332; 0{,}943)$
b $C(-0{,}955; 0{,}297)$
c $C(-0{,}903; 0{,}429)$
d $C(-0{,}769; 0{,}639)$

Estas coordenadas han sido redondeadas a tres cifras significativas.

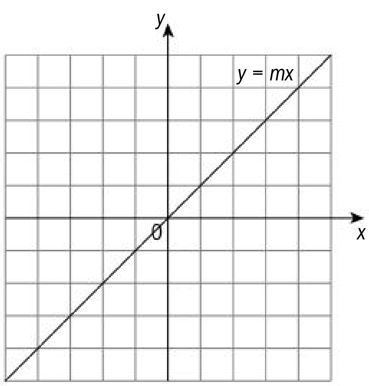
3 Halle el seno de cada ángulo agudo (aproximado a 4 cifras significativas), e indique el ángulo obtuso que tiene el mismo seno.

a 15°
b 36°
c 81°
d 64°

4 Halle un valor agudo y uno obtuso para $\hat{A}$.

a $\operatorname{sen} A = 0{,}871$
b $\operatorname{sen} A = 0{,}436$
c $\operatorname{sen} A = 0{,}504$
d $\operatorname{sen} A = 0{,}5$

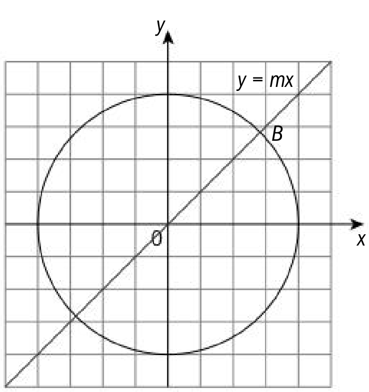
Observemos ahora la recta con ecuación $y = mx$:



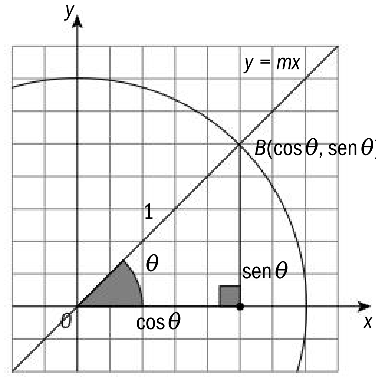
Cualquier recta con ecuación $y = mx$ tiene pendiente m y pasa por el origen.

Este es un caso especial de la ecuación estándar de la recta, $y = ax + b$ o $y = mx + c$.

Ahora veamos qué ocurre cuando la recta corta al círculo de radio unidad en el punto B, en el primer cuadrante.



En el primer cuadrante, la recta forma un ángulo θ con el eje x. Se forma un triángulo rectángulo del que el segmento OB (parte de la recta $y = mx$) es la hipotenusa.

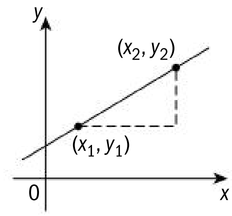


Esto ilustra algunas propiedades importantes que conciernen al triángulo rectángulo y a la recta $y = mx$.

Primero, aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos $(\text{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$. La forma habitual de escribir $(\text{sen}\,\theta)^2$ y $(\cos\theta)^2$ es $\text{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$, lo que resulta en

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Supongamos que queremos hallar la pendiente de la recta $y = mx$.



Esta recta pasa por los puntos O (0, 0) y B (sen θ, cos θ).

La pendiente de una recta $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Podemos entonces hallar la pendiente, m, utilizando las coordenadas de los puntos O y B:

$$m = \frac{\text{sen}\,\theta - 0}{\cos\theta - 0} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

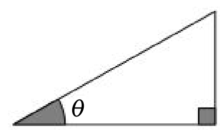
➔ Estas tres propiedades son válidas para cualquier ángulo θ:

1 $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2 $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

3 Para cualquier recta $y = mx$ que forma un ángulo de θ con el eje x, el valor de m (la pendiente de la recta) es $\tan\theta$.

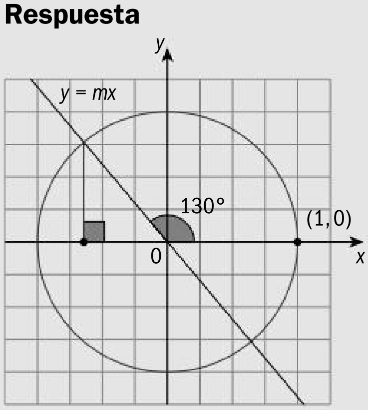
La propiedad número 1 es también conocida como la relación fundamental o la identidad pitagórica.



Ejemplo 8

Halle la pendiente de la recta que forma un ángulo positivo de 130° con el eje x.

Respuesta



La pendiente de la recta es $\tan 130° \approx -1{,}19$

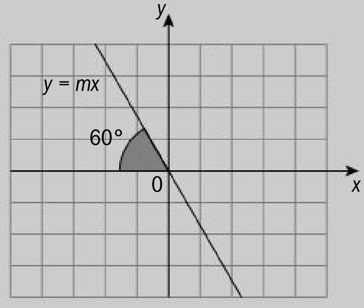
Pendiente = tan θ

Este valor se puede hallar usando la CPG.

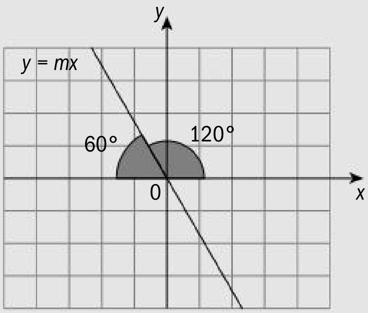
La propiedad número 2 a menudo es útil para realizar cálculos.

Ejemplo 9

Halle la pendiente de la recta que se muestra en el diagrama.



Respuesta



La pendiente de la recta es

$$\tan 120° = \frac{\text{sen } 120°}{\cos 120°} = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

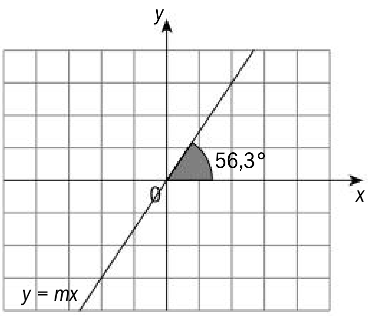
$$= -\sqrt{3} = -1{,}73$$

Hallar la "posición estándar" del ángulo formado por esta recta. El ángulo 60° es equivalente al ángulo obtuso positivo de 120°.
Esta recta forma un ángulo de 120°, en posición estándar.

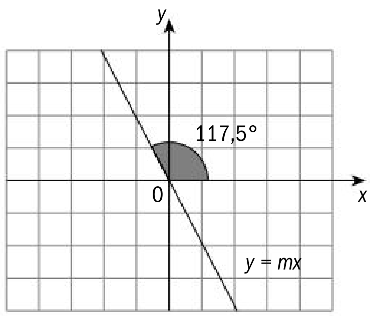
Ejercitación 11F

1 Halle la pendiente de la recta $y = mx$ en cada diagrama, dando sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.

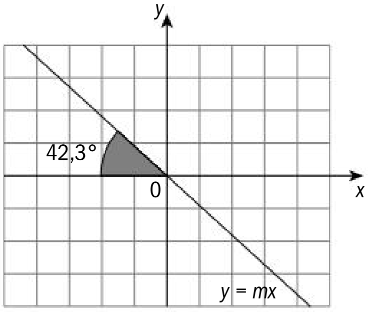
a



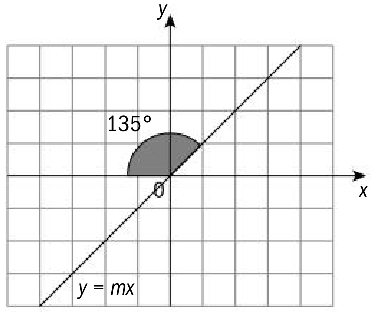
b



c

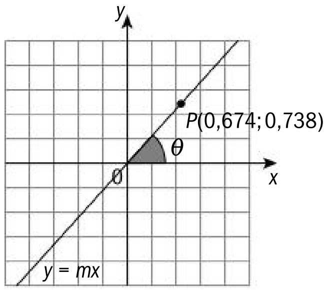


d

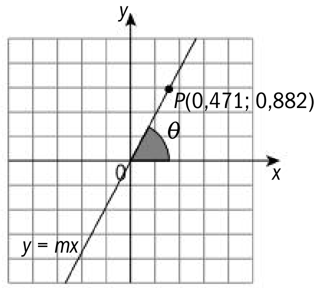


2 Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y el punto P. Halle el valor de θ al grado más próximo.

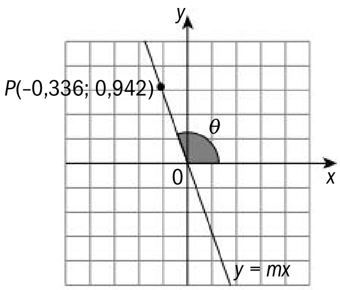
a



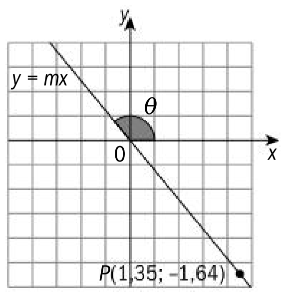
b



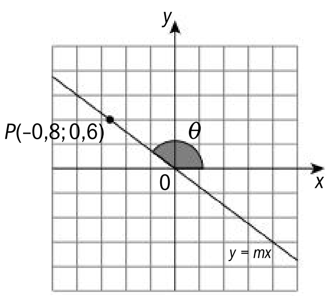
c



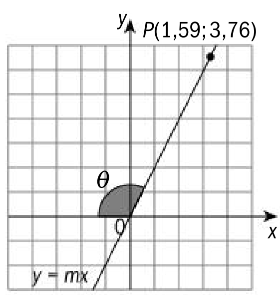
d



e



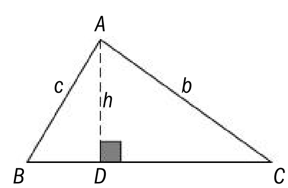
f



Material de ampliación disponible en línea:
Hoja de ejercicios 11: Sumas y restas de ángulos

11.4 El teorema del seno

La trigonometría puede usarse para resolver triángulos que no son rectángulos.



Observemos el $\triangle ABC$. La **altitud** (altura), h, del triángulo es AD, perpendicular a BC.

En el triángulo rectángulo ABC,

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{c}$$

Esto da $h = c \operatorname{sen} B$.

En el triángulo rectángulo ACD,

$$\operatorname{sen} C = \frac{h}{b}$$

Esto da $h = b \operatorname{sen} C$.

Igualamos los valores de h para obtener

$$c \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} C.$$

Reordenando esta ecuación, obtenemos $\frac{\text{sen}\,B}{b} = \frac{\text{sen}\,C}{c}$.

La razón entre el seno de cada ángulo y la longitud del lado opuesto es constante.

Ahora dibujemos la altitud desde B al lado AC, y desde C a AB, y hallemos las razones $\frac{\text{sen}\,A}{a} = \frac{\text{sen}\,C}{c} = \frac{\text{sen}\,B}{b}$ otra vez. Como antes, las razones que se obtienen son constantes.

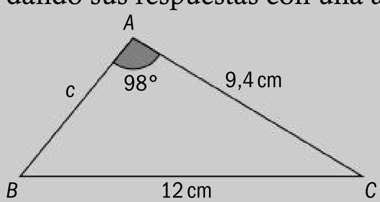
> → **El teorema del seno**
>
> Para cualquier $\triangle ABC$, donde a es la longitud del lado opuesto a $\hat{A}$, b es la longitud del lado opuesto a $\hat{B}$, y c es la longitud del lado opuesto a $\hat{C}$,
>
> $$\frac{\text{sen}\,A}{a} = \frac{\text{sen}\,B}{b} = \frac{\text{sen}\,C}{c} \quad \text{o} \quad \frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$$

Se proporciona esta fórmula en el cuadernillo de fórmulas que se utiliza en los exámenes.

Podemos utilizar el teorema del seno para resolver triángulos si conocemos al menos un ángulo y el lado opuesto, y una medida más (la longitud de un lado o la amplitud de un ángulo).

Ejemplo 10

Halle los ángulos y los lados que se desconocen en este triángulo, dando sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.



Respuesta

Utilizando el teorema del seno

$$\frac{\text{sen}\,98°}{12} = \frac{\text{sen}\,B}{9,4}$$

Se necesita hallar los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$, y la medida c.

Entonces $\text{sen}\,B = \frac{9,4\,\text{sen}\,98°}{12}$

$\hat{B} = 50,9°\ (3\,\text{cs})$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B}$, entonces

$\hat{C} = 31,1305533...$

$\hat{C} = 31,1°$ (3 cs)

La suma de los ángulos en cualquier triángulo es 180°.

$$\frac{\text{sen}\,98°}{12} = \frac{\text{sen}\,31,13055...}{c}$$

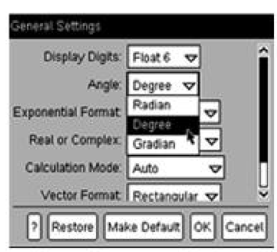
Utilizar el teorema del seno una vez más para hallar c

$$c = \frac{12\,\text{sen}\,31,13055...}{\text{sen}\,98°}$$

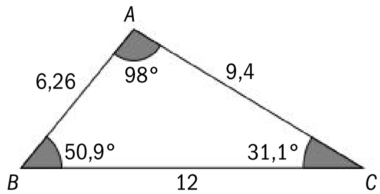
$c = 6,26$ cm (3 cs)

No se deben redondear los pasos intermedios, sino solo los valores finales de $\hat{B}$, $\hat{C}$ y c.

Hay que recordar configurar la CPG en **modo grados**.
Para cambiar a modo grados, presionar on y seleccionar **5: Settings & Status** (configuraciones y estado) | **2: Settings** (configuraciones) | **1: General** (general).
Utilizar la tecla tab para desplazarse a “Angle” (ángulo) y seleccionar **Degree** (grado).
Presionar enter y luego **4: Current** (actual).



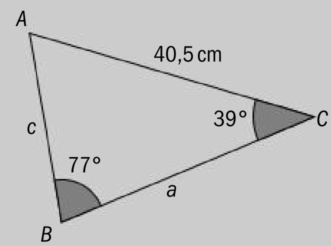
En el ejemplo 10, el triángulo con todas sus dimensiones rotuladas se vería de la siguiente manera:



Siempre hay que revisar las respuestas finales para asegurarse de que el lado más corto se opone al ángulo de menor amplitud y el lado más largo se opone al ángulo de mayor amplitud.

Ejemplo 11

Halle los ángulos y lados que se desconocen en este triángulo, aproximando sus respuestas a dos cifras decimales.



Respuesta

$\hat{A} = 180° - 77° - 39° = 64°$

$\frac{\text{sen } 77°}{40,5} = \frac{\text{sen } 64°}{a}$, $a = \frac{40,5 \text{ sen } 64°}{\text{sen } 77°}$

Entonces $a = 37,36$ cm (2 cd)

$\frac{\text{sen } 77°}{40,5} = \frac{\text{sen } 39°}{c}$

$c = \frac{40,5 \text{ sen } 39°}{\text{sen } 77°}$

Entonces $c = 26,16$ cm (2 cd)

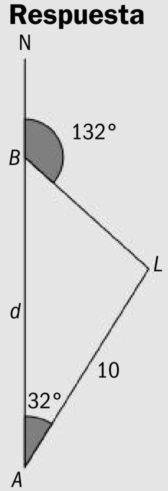
Necesitamos hallar el ángulo Â, y las longitudes a y c.
Utilizar el teorema del seno para hallar a y c

Revisar: el lado más corto (26,16) es el opuesto al ángulo menor (39°). El lado más largo (40,5) es el opuesto al ángulo mayor (77°).

Ejemplo 12

Un barco está navegando hacia el Norte. El capitán observa un faro a 10 km, sobre un rumbo de 032°. Más tarde, el capitán observa que el faro está sobre un rumbo de 132°.
¿Qué distancia navegó el barco entre estas dos observaciones?

Respuesta



Ángulo $ABL = 180° - 132° = 48°$

Dibujar un diagrama para modelizar la situación
A es la posición donde el capitán vio por primera vez el faro, y B, la posición donde lo vio por segunda vez. L es la posición del faro.
Lo que tenemos que hallar es d, la distancia que el barco navega desde el punto A al punto B.

▶ Continúa en la página siguiente.

$\hat{L} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 100°$

$$\frac{\text{sen}\,100°}{d} = \frac{\text{sen}\,48°}{10}$$

$$d = \frac{10\ \text{sen}\ 100°}{\text{sen}\ 48°}$$

$d = 13{,}251....$

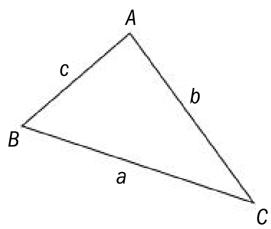
El barco navega aproximadamente 13,3 km entre los puntos A y B.

Ptolomeo (90–168 d. C.), en su obra de 13 volúmenes, *Almagesto*, escribió valores del seno para ángulos de 0° a 90°. También incluyó un teorema similar al teorema del seno.

Ejercitación 11G

1 Resuelva cada triángulo ABC. Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.

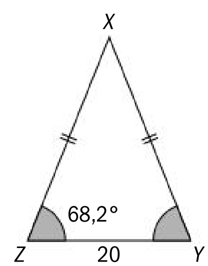
“Resolver” un triángulo significa hallar todos los lados y ángulos que se desconocen.



a $b = 24\,\text{cm}$, $\hat{A} = 47°$, $\hat{B} = 83°$
b $c = 2{,}5\,\text{cm}$, $\hat{A} = 40°$, $\hat{C} = 72°$
c $a = 4{,}5\,\text{cm}$, $b = 3{,}6\,\text{cm}$, $\hat{A} = 55°$
d $b = 60$, $\hat{B} = 15°$, $\hat{C} = 125°$
e $c = 5{,}8\,\text{cm}$, $\hat{A} = 27°$, $\hat{B} = 43°$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Un triángulo isósceles tiene una base de 20 cm; los ángulos de la base miden 68,2°, tal como se muestra. Utilice el teorema del seno para hallar la longitud de los lados XY y XZ.



3 Julia observa un árbol en un campo en dirección S40°E desde donde está parada. Luego camina 2 km hacia el Sur y nota que el árbol ahora está en dirección S75°E. ¿A qué distancia está el árbol de su primera y de su segunda posición en el camino?

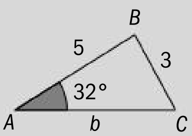
4 Alan y Kevin están en lados opuestos del mástil de una bandera, separados por una distancia de 35 m. Desde la posición de Alan, el ángulo de elevación de la punta del mástil es de 36°. Desde la posición de Kevin, el ángulo de elevación es de 50°. ¿Qué altura tiene el mástil?

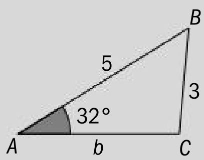
Los triángulos se usan a menudo en la arquitectura.
Izquierda: La Torre Hearst en la ciudad de Nueva York está construida a base de triángulos isósceles.
Derecha: Para fortalecer una estructura rectangular, se pueden construir varas diagonales en las esquinas, que forman triángulos.

Un triángulo es rígido: no podemos cambiar la forma. Las barras trasversales y los montantes dan rigidez a la estructura.

Investigación: triángulos ambiguos

Trate de dibujar un triángulo *ABC*, con $\hat{A} = 32°$, $a = 3\,\text{cm}$ y $c = 5\,\text{cm}$. Encontrará que hay en realidad dos triángulos posibles que cumplen con esta descripción:





Las medidas dadas no describen un único triángulo.

1 Halle la amplitud del ángulo *C* en cada triángulo (llámelos C_1 y C_2).
¿Cuál es la relación entre estos dos ángulos?

2 Utilizando estos ángulos para *C*, halle el ángulo *B* y la longitud *AC* en cada triángulo.

Esto se conoce como el **caso ambiguo**, y a veces puede suceder, cuando se dan dos lados y un ángulo del triángulo que no está comprendido entre estos dos lados.

Ejemplo 13

En un triángulo *ABC*, $\hat{A} = 40°$, a = 14 cm y $c = 20\,\text{cm}$. Resuelva este triángulo, dando todos los casos posibles. Dé las respuestas con una aproximación de una cifra decimal.

Respuesta

$\dfrac{\text{sen } 40°}{14} = \dfrac{\text{sen } C}{20}$	
$\text{sen } C = \dfrac{20 \text{ sen } 40°}{14}$	*Utilizar la CPG en modo grados*
$\hat{C}_1 = 66{,}7°$	*Redondear a un decimal*
$\hat{C}_2 = 180° - 66{,}7°$, entonces $\hat{C}_2 = 113{,}3°$	*Los ángulos suplementarios tienen el seno de igual valor.*
$\hat{B}_1 = 180° - 40° - 66{,}7° = 73{,}3°$	*Los dos valores posibles para C dan dos valores posibles para B.*
$\hat{B}_2 = 180° - 40° - 113{,}3° = 26{,}7°$	

▶ Continúa en la página siguiente.

$$\frac{\text{sen}\,40°}{14} = \frac{\text{sen}\,73{,}3°}{b_1}$$

$$b_1 = \frac{14\,\text{sen}\,73{,}3°}{\text{sen}\,140°}$$

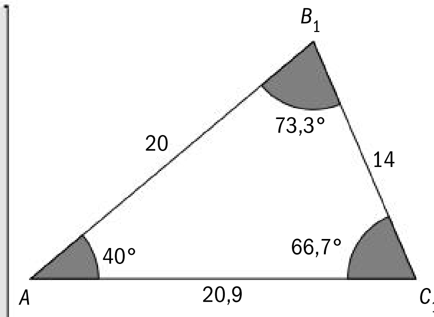
$$b_1 = 20{,}9\,\text{cm}$$

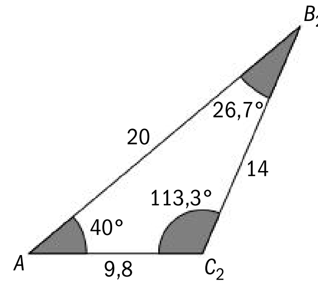
$$\frac{\text{sen}\,40°}{14} = \frac{\text{sen}\,26{,}7}{b_2}$$

$$b_2 = \frac{14\,\text{sen}\,26{,}7°}{\text{sen}\,40°}$$

$$b_2 = 9{,}8\,\text{cm}$$

Y finalmente, hallar dos valores para b, con una aproximación de un decimal





▲ Esto es lo que vemos si dibujamos los triángulos.

El caso ambiguo no se produce siempre que se resuelve un triángulo.

➔ Puede haber un caso ambiguo cuando utilizamos el teorema del seno si:

- Nos dan dos lados y un ángulo agudo no comprendido entre ellos.
- El lado opuesto al ángulo agudo dado es el menor de los dos lados dados.

Ejercitación 11H

1 Use la información dada para hallar los lados y ángulos que se desconocen en el triángulo *ABC*. Dé todas las soluciones posibles, con respuestas aproximadas a una cifra decimal. Todas las longitudes están en centímetros.

Algunos de estos no se relacionan con el caso ambiguo.

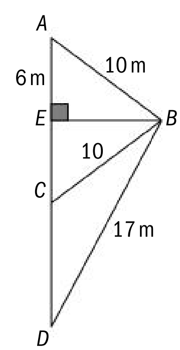
a $\hat{A} = 30°$, $a = 4$, y $c = 7$ **b** $\hat{B} = 50°$, $b = 17$, y $c = 21$

c $\hat{C} = 20°$, $b = 6{,}8$; y $c = 2{,}5$ **d** $\hat{A} = 42°$, $a = 33$, y $c = 25$

e $\hat{A} = 70°$, $a = 25$, y $b = 28$ **f** $\hat{A} = 70°$, $a = 25$, y $b = 26$

g $\hat{A} = 45°$, $a = 22$, y $b = 14$ **h** $\hat{B} = 56°$, $b = 45$, y $c = 50$

2 Observe el diagrama a la derecha:



a Halle *BE*, *CE* y *DE*.

b Halle las amplitudes de los ángulos $E\hat{A}B$, $B\hat{C}E$, $B\hat{C}D$, $B\hat{D}C$, $A\hat{B}D$ y $C\hat{B}D$.

c Explique cómo este diagrama se relaciona con el caso ambiguo del teorema del seno.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Un barco está navegando hacia el Oeste cuando el capitán ve un faro a una distancia de 20 km, sobre un rumbo de 230°.

a Dibuje un diagrama para mostrar la situación.

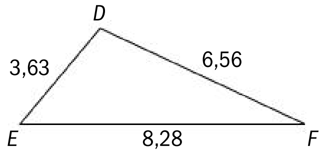
b ¿Qué distancia debe navegar el barco antes de que el faro esté a 16 km?

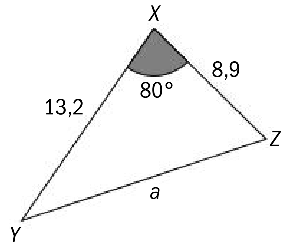
c ¿Qué distancia debe navegar el barco más allá del punto hallado en **b**, antes de que el faro esté nuevamente a una distancia de 16 km del barco?

d ¿Sobre qué rumbo está situado el faro respecto del barco la segunda vez que los separa una distancia de 16 km?

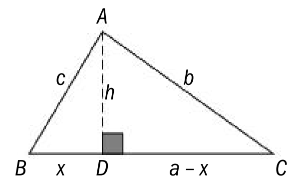
11.5 El teorema del coseno

Los siguientes triángulos no pueden resolverse con el teorema del seno:





Consideremos el triángulo ABC, con altura h desde A al lado BC.



En el triángulo ACD, el teorema de Pitágoras da

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2$$

En el triángulo ABD,

$$h^2 + x^2 = c^2$$

Por lo tanto, $h^2 = c^2 - x^2$.

Reemplazamos h^2 en la primera ecuación para obtener

$$b^2 = c^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2$$
$$= c^2 + a^2 - 2ax$$

En el triángulo ABD, $\cos B = \dfrac{x}{c}$, entonces $x = c\cos B$.

Reemplazando el valor de x, obtenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Esta ecuación es una forma del **teorema del coseno**.

➔ **El teorema del coseno**

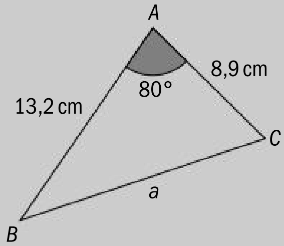
Para $\triangle ABC$, donde a es la longitud del lado opuesto a $\hat{A}$, b es la longitud del lado opuesto a $\hat{B}$, y c es la longitud del lado opuesto a $\hat{C}$:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, o bien
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, o bien
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Quizás hayamos visto $2bc \cos A$ escrito como $2bc \cdot \cos A$, donde el punto significa multiplicar. El teorema del coseno figura en el cuadernillo de fórmulas.

Ejemplo 14

Halle a y los ángulos que se desconocen del triángulo.



Respuesta

$a^2 = 13{,}2^2 + 8{,}9^2 - 2(13{,}2)(8{,}9)\cos 80°$ $a = \sqrt{13{,}2^2 + 8{,}9^2 - 2(13{,}2)(8{,}9)\cos 80°}$ $a = 14{,}6\,\text{cm}$	*Utilizar el teorema del coseno*
$\dfrac{\text{sen } 80°}{a} = \dfrac{\text{sen B}}{8{,}9}$ $\text{sen } B = \dfrac{8{,}9 \text{ sen } 80°}{14{,}6}$ Por lo tanto, $\hat{B} = 36{,}9°$ $\hat{C} = 180° - 80° - 36{,}9° = 63{,}1°$	*Utilizar el teorema del seno*

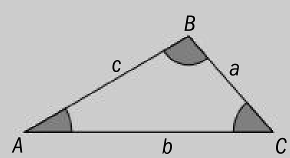
Cuando usamos el teorema del coseno para hallar ángulos, a veces es útil reordenar la fórmula de esta manera:

→ Teorema del coseno

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

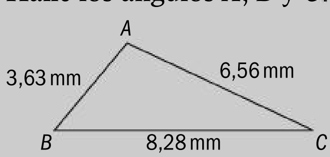
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



Ejemplo 15

Halle los ángulos A, B y C.



▶ Continúa en la página siguiente.

Respuesta

$$\cos A = \frac{(3,63)^2 + (6,56)^2 - (8,28)^2}{2(3,63)(6,56)}$$

$$\hat{A} = \cos^{-1}\left(\frac{(3,63)^2 + (6,56)^2 - (8,28)^2}{2(3,63)(6,56)}\right)$$

$\hat{A} = 105°$ (3 cs)

$$\cos B = \frac{(3,63)^2 + (8,28)^2 - (6,56)^2}{2(3,63)(8,28)}$$

$$\hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{(3,63)^2 + (8,28)^2 - (6,56)^2}{2(3,63)(8,28)}\right)$$

Por lo tanto, $\hat{B} = 49,9°$

$\hat{C} = 180° - 105° - 49,9°$
$= 25,1°$ (3 cs)

Utilizar el teorema del coseno

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

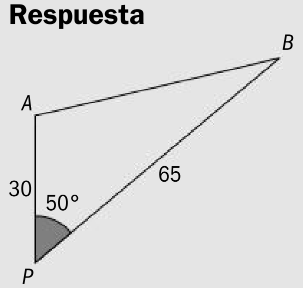
Teorema del coseno (aquí, se podría usar también el teorema del seno)

Volvamos al ejemplo 5 en la sección 11.2. Este problema se puede resolver más rápidamente utilizando el teorema del coseno.

Ejemplo 16

Dos barcos zarpan al mismo tiempo. El barco A navega 30 km en dirección Norte antes de soltar el ancla. El barco B navega 65 km siguiendo un rumbo de 050° antes de soltar el ancla. Halle, al km más próximo, la distancia entre los barcos cuando están quietos.

Respuesta



Dibujar el diagrama

$AB^2 = 30^2 + 65^2 - 2(30)(65) \times \cos 50°$

$AB = \sqrt{30^2 + 65^2 - 2(30)(65)\cos 50°}$
$= 51,17$

La distancia entre los barcos es de 51 km (al km más próximo).

Utilizar el teorema del coseno
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 50°$

El teorema de Pitágoras es un caso especial del teorema del coseno. Analice qué sucede con la expresión cuando se usa el teorema del coseno con un ángulo de 90°.

Ejercitación 11I

1 Utilice la información dada para hallar todos los ángulos y lados en cada triángulo. Dé sus respuestas con una aproximación de una cifra decimal. Todas las longitudes están en metros.

a $\hat{A} = 64°$, $b = 43$, y $c = 72$ **b** $a = 20$, $b = 33$, y $c = 41$

c $a = 3{,}6$; $b = 4{,}9$; y $c = 2{,}4$ **d** $\hat{B} = 31°$, $a = 10$, y $c = 14$

e $\hat{C} = 70°$, $a = 75$, y $b = 86$ **f** $a = 45$, $b = 50$, y $c = 58$

La trigonometría de triángulos tiene muchas aplicaciones en la vida cotidiana.

2 Un excursionista deja el campamento y camina 5 km siguiendo un rumbo de 058°. Se toma un descanso, luego camina otros 8 km siguiendo un rumbo de 103°. Se detiene de nuevo antes de regresar al campamento, tomando un camino directo. ¿Cuánto deberá caminar para regresar al campamento?

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Las diagonales de un paralelogramo forman un ángulo agudo de 62°. Las longitudes de las diagonales son 6 cm y 9 cm.
Halle las longitudes de los lados del paralelogramo.

4 La ciudad B está a 15 km de la ciudad A, en dirección N36°O. La ciudad C se encuentra en dirección N27°E de la ciudad A, y la distancia entre las ciudades A y C es de 20 km. Halle la distancia entre las ciudades B y C.

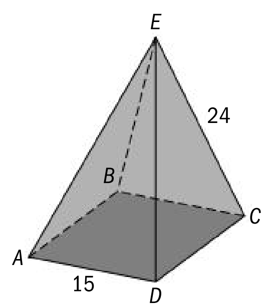
5 El barco A deja el puerto y navega 28 km en dirección Este. El barco B deja el mismo puerto y navega 49 km. La distancia entre los barcos es ahora de 36 km. ¿Con qué rumbo navegaba el barco B?

6 La pirámide $ABCDE$ tiene una base cuadrada de lado 15 cm.
Sus otras caras son triángulos isósceles **congruentes**, cuyos lados iguales miden 24 cm.
Halle estos ángulos.

a $A\hat{B}D$

b $E\hat{D}C$

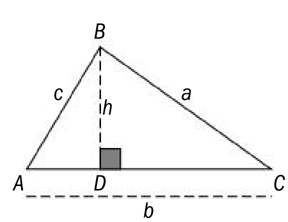
c $E\hat{A}C$



11.6 Área de un triángulo

Observe al triángulo ABC con base b y altura h.
Podemos hallar el área del triángulo utilizando la fórmula:

$$\text{área} = \frac{1}{2}bh$$



En $\triangle ADB$, $\operatorname{sen} A = \frac{h}{c}$, entonces $h = c \operatorname{sen} A$.

Reemplazando el valor de h en la fórmula, se obtiene área $= \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$.

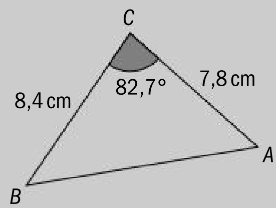
Observemos que para usar esta fórmula no hace falta conocer la altura del triángulo.

➔ El área de cualquier triángulo *ABC* viene dada por la fórmula:

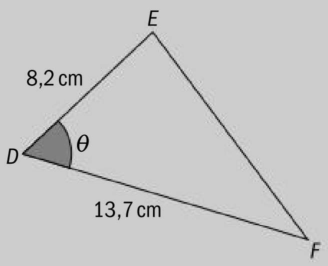
área $= \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$ o área $= \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B$ o área $= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$

Ejemplo 17

a Halle el área del triángulo *ABC*.



b El área de este triángulo es de 50 cm². Halle el ángulo θ.



Respuestas

a $\text{Área} = \frac{1}{2}(8{,}4)(7{,}8)\operatorname{sen} 82{,}7°$

$= 32{,}5\,\text{cm}^2$ (3 cs)

b $\frac{1}{2}(8{,}2)(13{,}7)\operatorname{sen}\theta = 50$

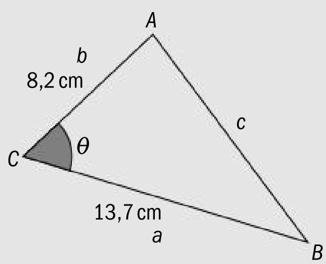
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{50}{\frac{1}{2}(8{,}2)\,(13{,}7)}$$

$$= \frac{100}{(8{,}2)\,(13{,}7)} = 0{,}8901\ldots$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} 0{,}8901$$

$$= 62{,}9°\,(3\,\text{cs})$$

Área $= \frac{1}{2}$ *ab sen C*

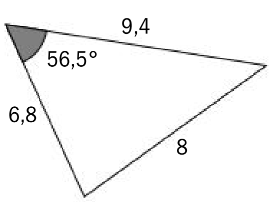


En el primer siglo de la era cristiana, Hero (o Herón) de Alejandría desarrolló un método diferente para hallar el área de un triángulo, utilizando solo la medida de sus lados.

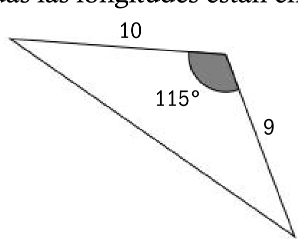
Ejercitación 11J

1 Halle el área de cada triángulo. Todas las longitudes están en centímetros.

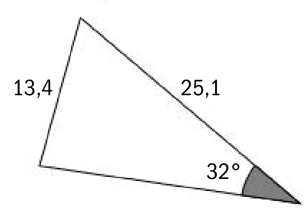
a



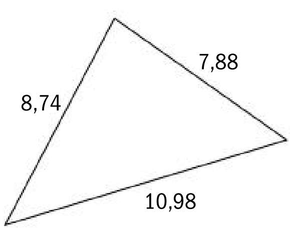
b



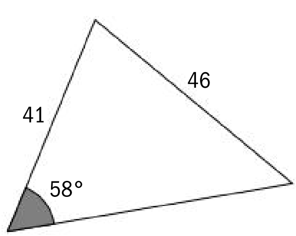
c



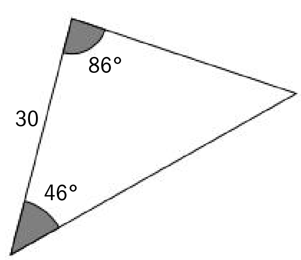
d



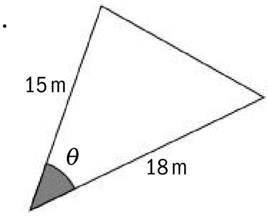
e



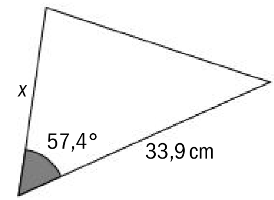
f



2 El triángulo mostrado tiene un área de 100 m². Halle el valor de θ.



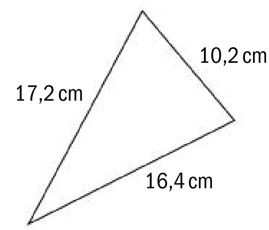
3 El triángulo mostrado tiene un área de 324 cm². Halle el valor de x.



PREGUNTAS TIPO EXAMEN

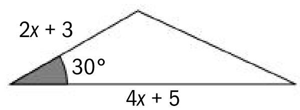
4 **a** Halle el ángulo mayor de este triángulo.

b A partir de lo anterior, halle el área del triángulo.



El término de instrucción "a partir de lo anterior" indica que se debe utilizar la respuesta al apartado **a** para responder al apartado **b**.

5 El triángulo mostrado tiene un área de 30 cm². Halle el valor de x.



6 El área de un triángulo es de 20 mm². Dos lados del triángulo miden 8 mm y 11 mm. Halle dos longitudes posibles para el tercer lado.

11.7 Radianes, arcos y sectores circulares

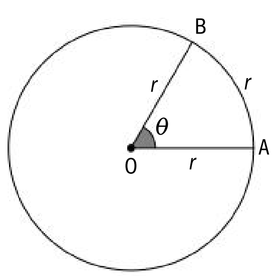
Los ángulos se pueden medir en **radianes** en lugar de grados.

Los babilonios creían que había 360 días en el año y utilizaron 360° para representar una revolución.

¿Por qué utilizamos radianes?

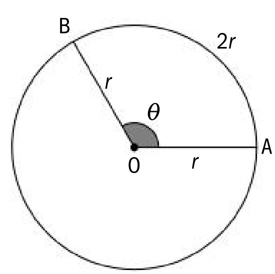
Una vuelta completa tiene 360°, pero el número 360 resulta una medida un tanto arbitraria. Los radianes, en cambio, están directamente relacionados con las medidas propias del círculo. En esta sección, veremos cómo los radianes están relacionados con la *longitud del arco* y el *área del sector circular*.

Un radián es el tamaño del ángulo central **subtendido** por un arco que tiene la longitud del radio del círculo.



θ = 1 radián

Dos radianes es el tamaño del ángulo central subtendido por un arco que mide el doble del radio del círculo.



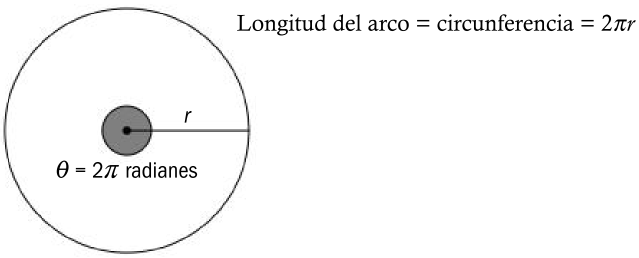
θ = 2 radianes

Un ángulo central subtendido por un arco es un ángulo cuyo vértice es el centro del círculo y cuyos lados pasan por los puntos extremos del arco.

Una vuelta completa alrededor del círculo es subtendida por un arco de igual longitud que la circunferencia del círculo.

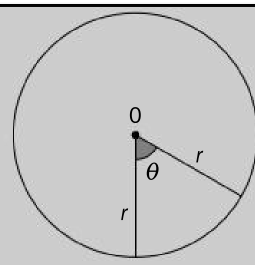
$$\text{circunferencia} = 2\pi r$$

Por lo tanto, el ángulo que subtiende la circunferencia del círculo es 2π radianes.



Cualquier ángulo central de un círculo es una fracción de 2π; por lo tanto, podemos calcular la longitud del arco del ángulo subtendido como una fracción de una circunferencia.

➔ Longitud del arco = $\left(\dfrac{\theta}{2\pi}\right)(2\pi r) = r\theta$,
donde r es el radio y θ es el ángulo central medido en radianes.



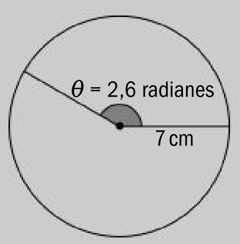
De manera similar, la fórmula para el área de un círculo es área = πr^2. El área de un sector circular con un ángulo central θ será una fracción del área del círculo.

➔ Área del sector circular = $\left(\dfrac{\theta}{2\pi}\right)(\pi r^2) = \dfrac{\theta r^2}{2}$,
donde r es el radio de un círculo y θ es el ángulo central, en radianes.

Ejemplo 18

a Halle la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 2,6 radianes (observe el diagrama) en un círculo con un radio de 7 cm.

b Halle el área del sector circular.



Respuestas

a Longitud del arco = 7(2,6) = 18,2 cm	*Longitud del arco* = $r\theta$
b Área del sector circular = $\dfrac{2{,}6(7^2)}{2}$ = 63,7 cm^2	*Área del sector circular* = $\dfrac{\theta r^2}{2}$

La abreviatura de “radianes” es **rad**. En el ejemplo anterior, en lugar de “2,6 radianes” podemos escribir “2,6 rad”. Si nos encontramos con un ángulo expresado sin unidades (p. ej., “sen 2,6”), podremos suponer que se trata de un ángulo de 2,6 radianes.

Otra manera de escribir ángulos en radianes es $2{,}6^c$, donde la *c* denota medida circular.

Ejemplo 19

Un círculo tiene un radio de 2,5 mm. Halle la amplitud del ángulo central subtendido por un arco de 9 mm de longitud.

Respuesta

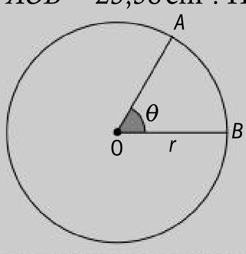
$9 = 2{,}5\theta$ — *Longitud del arco* $= r\theta$

$$\theta = \frac{9}{2{,}5}$$

$$= 3{,}6\,\text{rad}$$

Ejemplo 20

En este círculo, el arco $AB = 7{,}86$ cm y el área del sector circular $AOB = 23{,}58\,\text{cm}^2$. Halle el ángulo central θ y el radio r.



Algunos cultivos se siembran en patrones circulares. ¿Qué otras aplicaciones conocemos de los círculos, los arcos y los sectores circulares en la vida cotidiana?

Respuesta

$23{,}58 = \dfrac{\theta r^2}{2}$, entonces $47{,}16 = \theta r^2$ — *Área del sector circular* $= \dfrac{\theta r^2}{2}$

$7{,}86 = r\theta$, entonces $\theta = \dfrac{7{,}86}{r}$ — *Longitud del arco* $= r\theta$

$47{,}16 = \dfrac{7{,}86}{r}(r^2) = 7{,}86r$, entonces — *Reemplazar la expresión de* θ *de la ecuación anterior*

$$r = \frac{47{,}16}{7{,}86}$$

$$= 6\,\text{cm}$$

$\theta = \dfrac{7{,}86}{6}$, entonces $\theta = 1{,}31$ rad — *Utilizar el resultado* $\theta = \dfrac{7{,}86}{r}$

Ejercitación 11K

1 Halle la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 1,7 radianes, en un círculo de 5,6 cm de radio.

2 Halle la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 3,25 radianes, en un círculo de 24 cm de diámetro.

3 Un arco de longitud 12,5 mm subtiende un ángulo central θ. Halle el valor de θ, si el círculo tiene un radio de 2,5 mm.

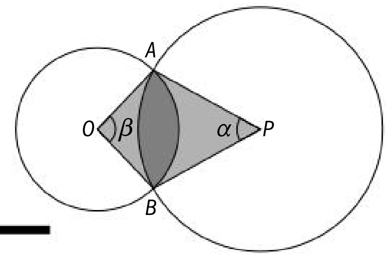
4 Un arco AB subtiende un ángulo central de 2,4 radianes, en un círculo de centro O y radio 50 cm. Halle el área y el perímetro del sector circular AOB.

5 Un arco WX subtiende un ángulo central de 5,1 radianes, en un círculo de centro P y radio 3 cm. Halle el área y el perímetro del sector circular WPX.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 En el círculo con centro P, el arco QR subtiende un ángulo central θ. Si la longitud del arco QR es 27,2 cm y el área del sector circular PQR es 217,6 cm^2, halle θ y el radio del círculo.

7 El círculo O tiene un radio de 4 cm, y el círculo P tiene un radio de 6 cm. La distancia entre los centros de los círculos es de 8 cm. Si las circunferencias se cortan en A y en B, halle el área del sombreado oscuro en el diagrama.



Grados y radianes

Hemos visto que una rotación completa en un círculo resulta en un ángulo central de 2π, y que una rotación completa es igual a 360°. Podemos utilizar estos resultados para convertir radianes a grados.

Se da por sentado que cualquier ángulo expresado como múltiplo de π está medido en radianes, por lo tanto, no se necesita escribir “rad”.

$360° = 2\pi$, entonces $180° = \pi$.

y $\dfrac{180°}{\pi} = 1$ radián

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianes

➔ Para convertir grados a radianes, multiplicar por $\dfrac{\pi}{180}$

➔ Para convertir radianes a grados, multiplicar por $\dfrac{180}{\pi}$

Ejemplo 21

a Convierta estos ángulos a radianes: 30°, 45°, 60°. Dé respuestas exactas.

b Convierta estos ángulos a grados: $\dfrac{2\pi}{5}$ rad, $\dfrac{\pi}{9}$ rad. Dé respuestas exactas.

▶ Continúa en la página siguiente.

Los valores exactos de los ángulos medidos en radianes se escriben como múltiplos de π.

Respuestas

a $30° = 30\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$	*Multiplicar por* $\frac{\pi}{180}$
$45° = 45\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$	
$60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$	
b $\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 72°$	*Multiplicar por* $\frac{180}{\pi}$
$\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 20°$	

Ejemplo 22

a Convierta estos ángulos a radianes: 43°, 70°, 136°.
Dé los valores con una aproximación de tres cifras significativas.

b Convierta estos ángulos a grados: 1 rad; 2,3 rad.
Dé los valores con una aproximación de una cifra decimal.

Respuestas

a $43° = 43\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{43\pi}{180} = 0{,}750 \text{ rad (3 cs)}$

$70° = 70\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{70\pi}{180} = 1{,}22 \text{ rad (3 cs)}$

$136° = 136\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{136\pi}{180} = 2{,}37 \text{ rad (3 cs)}$

b $1 \text{ rad} = 1\left(\frac{180}{\pi}\right) = 57{,}3° \text{ (1 cd)}$

$2{,}3 \text{ rad} = 2{,}3\left(\frac{180}{\pi}\right) = 131{,}8° \text{ (1 cd)}$

Ejercitación 11L

1 Convierta estos ángulos a radianes.
Dé valores exactos.

a 75° **b** 240° **c** 80° **d** 330°

2 Convierta estos ángulos a radianes.
Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.

a 56° **b** 107° **c** 324° **d** 230°

3 Convierta estos ángulos a grados.
Dé valores exactos.

a $\frac{5\pi}{6}$ **b** $\frac{5\pi}{3}$ **c** $\frac{3\pi}{2}$ **d** $\frac{5\pi}{4}$

4 Convierta estos ángulos a grados.
Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.
a 1,5 rad **b** 0,36 rad **c** 2,38 rad **d** 3,59 rad

En la sección 11.1, vimos algunos ángulos “especiales” en triángulos rectángulos: 30°, 45°, 60° y 90°. Estos ángulos, y sus múltiplos, se utilizan con frecuencia en trigonometría y también pueden expresarse en radianes. Es útil recordar estos ángulos, para no tener que hacer cada vez la conversión. Las tablas muestran algunos ángulos especiales en grados y sus equivalentes en radianes, como múltiplos de π.

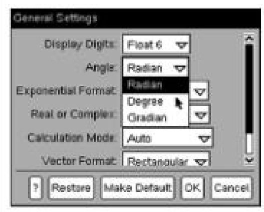
Ángulo en grados	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°
Ángulo en radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$

Los ángulos que son múltiplos de 30°, 45°, 60° y 90° generalmente se escriben como valores exactos, en radianes, utilizando π.

Cuando resolvemos problemas trigonométricos deberemos prestar atención a si los ángulos están dados en grados o radianes.

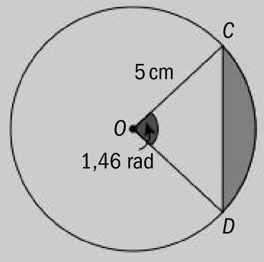
Para hallar los valores de seno, coseno y tangente de ángulos medidos en radianes, se debe utilizar la CPG en modo RADIANES.

Para cambiar a **modo radianes**, presionar On y seleccionar **5: Settings & Status** (configuraciones y estado) | **2: Settings** (configuraciones) | **1: General** (general). Utilizar la tecla tab para desplazarse a “Angle” (ángulo) y seleccionar **Radian** (radián). Presionar enter y luego seleccionar **4: Current** (actual) para volver al documento.



Ejemplo 23

El diagrama muestra el círculo de centro O y radio 5 cm.
Halle el área de la región sombreada, con una aproximación de tres cifras significativas.



Respuesta

Área del sector $OCD = \dfrac{(1,46)(5^2)}{2}$

$= 18,25\,\text{cm}^2$

Área de $\triangle OCD$

$= \frac{1}{2}(5)(5)\,\text{sen}(1,46)$

$\approx 12,42335\ldots$

Área sombreada

$= 18,25 - \frac{1}{2}(5)(5)\,\text{sen}(1,46)$

$= 5,83\,\text{cm}^2$ (3 cs)

Área de la región sombreada = área del sector OCD – área de $\triangle OCD$

Área $= \frac{1}{2} ab\,\text{sen}\,C$

Ejercitación 11M

1 Halle el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.

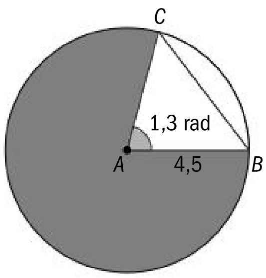
a $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ **b** $\cos\frac{2\pi}{3}$ **c** $\tan\frac{\pi}{6}$ **d** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

2 Halle el valor de las siguientes razones trigonométricas, con una aproximación de tres cifras significativas.

a cos 0,47 **b** sen 1,25 **c** tan 2,3 **d** cos 0,84

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 El diagrama muestra el círculo, centro A, radio 4,5 cm y $B\hat{A}C$ = 1,3 radianes.

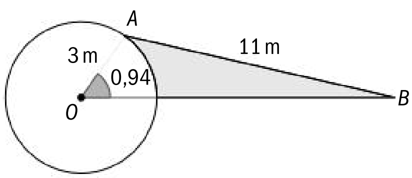


a Halle el área de $\triangle ABC$.

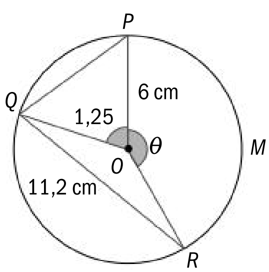
b Halle la longitud BC.

c Halle el área de la región sombreada.

4 El diagrama muestra el círculo, centro O, con un radio de 3 m, AB = 11 y $A\hat{O}B$ = 0,94 radianes. Halle el área sombreada.



5 El diagrama muestra el círculo, centro O, con un radio de 6 cm, QR = 11,2 cm y $P\hat{O}Q$ = 1,25 radianes.



a Halle el área de $\triangle POQ$.

b Halle el área de $\triangle QOR$.

c Halle θ ($P\hat{O}R$).

d Halle la longitud del arco PMR.

Ejercicio de revisión

1 En el triángulo ABC, $\hat{A} = \hat{B}$ = 45°. La longitud de AC es 7 cm. Halle la longitud de AB.

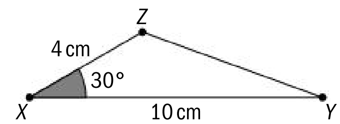
2 En el triángulo XYZ, XY = 8 cm, XZ = 16 cm y $X\hat{Y}Z$ = 90°.

a Halle $X\hat{Z}Y$. **b** Halle YZ.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Una recta pasa por el origen (0, 0) y por el punto (5, 2).
La recta forma un ángulo agudo θ con el eje x.
Halle el valor de $\tan\theta$.

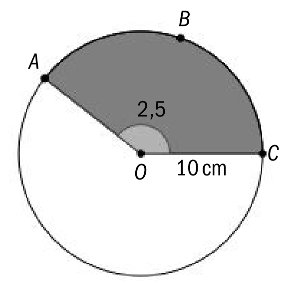
4 El diagrama muestra un triángulo XYZ, con $XZ = 4$ cm, $XY = 10$ cm y $\hat{X} = 30°$.
Halle el área del triángulo XYZ.



5 El diagrama muestra un círculo, centro O y radio de 10 cm.
$A\hat{O}C = 2{,}5$ radianes.

a Halle la longitud del arco ABC.

b Halle el área del sector circular sombreado.



Ejercicio de revisión

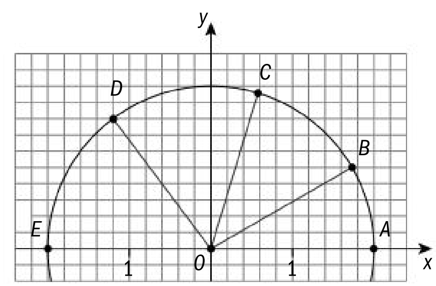
1 Un observador parado a 100 m de la base de un edificio observa la parte más alta del edificio con un ángulo de elevación de 36°.
¿Qué altura tiene el edificio?

2 El diagrama muestra parte de un círculo de radio unidad (radio 1 unidad) con centro O.

a Ángulo $AOB = 32°$. Escriba las coordenadas de B.

b El punto C tiene coordenadas (0,294; 0,956).
Halle el ángulo AOC.

c Ángulo $COD = 54°$. Halle las coordenadas de D.

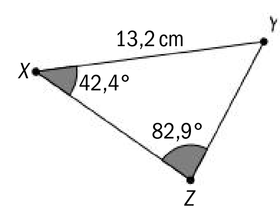


PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 El diagrama muestra un triángulo XYZ, con $\hat{X} = 42{,}4°$; $\hat{Z} = 82{,}9°$ y $XY = 13{,}2$ cm.

a Halle $\hat{Y}$.

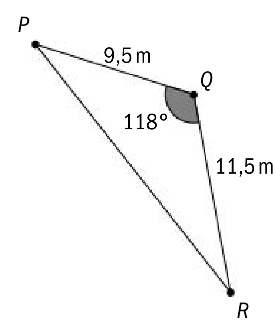
b Halle XZ.



4 El diagrama muestra un triángulo PQR, con $\hat{Q} = 118°$, $PQ = 9{,}5$ m y $QR = 11{,}5$ m.

a Halle PR.

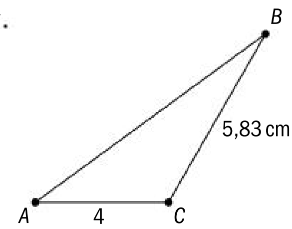
b Halle $\hat{P}$.



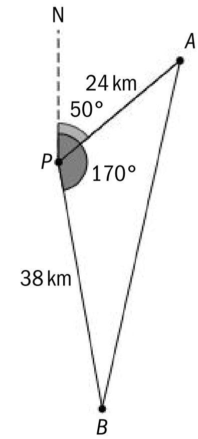
5 El diagrama muestra el triángulo ABC, que tiene un área de $10\,\text{cm}^2$.

a Halle $A\hat{C}B$, sabiendo que es un ángulo obtuso.

b Halle AB.



6 Dos barcos zarpan del puerto P al mismo tiempo.
El barco A navega 24 km, siguiendo un rumbo de 050° antes de soltar el ancla.
El barco B navega 38 km, siguiendo un rumbo de 170° antes de soltar el ancla.
Halle la distancia entre los dos barcos cuando están quietos.



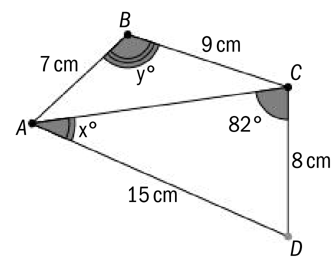
7 El diagrama muestra un cuadrilátero $ABCD$, con $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 9\,\text{cm}$, $CD = 8\,\text{cm}$ y $AD = 15\,\text{cm}$. Ángulo $ACD = 82°$, ángulo $CAD = x°$ y ángulo $ABC = y°$.

a Halle el valor de x.

b Halle AC.

c Halle el valor de y.

d Halle el área del triángulo ABC.



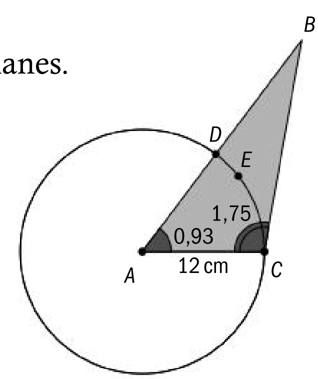
8 El diagrama muestra un círculo con centro A y un radio de 12 cm. Ángulo $DAC = 0{,}93$ radianes y ángulo $BCA = 1{,}75$ radianes.

a Halle BC.

b Halle DB.

c Halle la longitud del arco DEC.

d Halle el perímetro de la región $BDEC$.



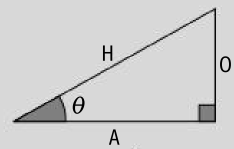
RESUMEN DEL CAPÍTULO 11

Trigonometría del triángulo rectángulo

Para cualquier triángulo rectángulo con un ángulo θ:

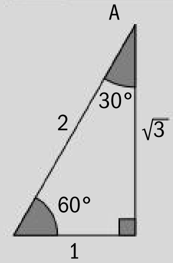
- seno $\theta = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{\text{O}}{\text{H}}$; coseno $\theta = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{\text{A}}{\text{H}}$;

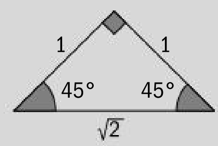
  tangente $\theta = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \dfrac{\text{O}}{\text{A}}$



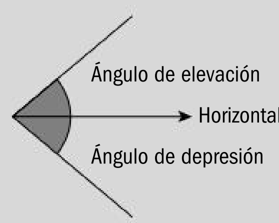
- $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$
- Las razones trigonométricas de los "ángulos especiales" son:

Amplitud del ángulo	Seno	Coseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1} = 1$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$



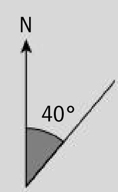


Aplicaciones de la trigonometría del triángulo rectángulo



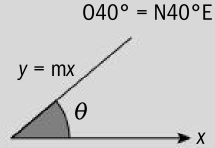
- El **ángulo de elevación** es el ángulo "por encima" de la recta horizontal.
- El **ángulo de depresión** es el ángulo "por debajo" de la recta horizontal.
- Los cuatro **puntos cardinales** son Norte (N), Sur (S), Este (E) y Oeste (O).
- La medición del **rumbo**, que se expresa siempre utilizando tres cifras, se realiza en el sentido de las agujas del reloj, desde el Norte.

Utilización de los ejes de coordenadas en trigonometría



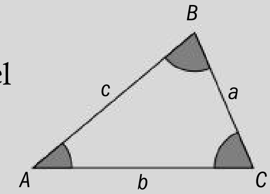
040° = N40°E

- Para los ángulos suplementarios α y β, sen α = sen β, y $\cos\alpha = -\cos\beta$.
- Para cualquier ángulo $\theta°$, sen θ = sen$(180° - \theta)$, y $\cos\theta = -\cos(180° - \theta)$.
- Estas tres propiedades son válidas para cualquier ángulo θ:
  1. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  2. $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$
  3. Para cualquier recta $y = mx$ que forma un ángulo θ con el eje x, el valor de m (la pendiente de la recta) es $\tan\theta$.



Continúa en la página siguiente.

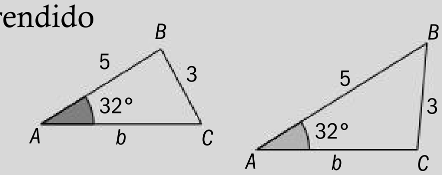
El teorema del seno



- Para cualquier $\triangle ABC$, donde a es la longitud del lado opuesto a $\hat{A}$, b es la longitud del lado opuesto a $\hat{B}$, *y* c es la longitud del lado opuesto a $\hat{C}$,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \text{ o } \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

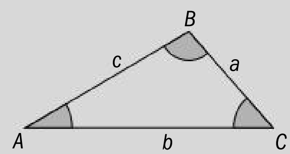
- Puede haber un caso ambiguo cuando se utiliza el teorema del seno si:
  - Se dan dos lados y el ángulo agudo no comprendido entre ellos.
  - El lado opuesto al ángulo agudo dado es el menor de los dos lados dados.



El teorema del coseno

- El teorema del coseno establece que:

  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$, o bien
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \mathrm{B}$, o bien
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C}$



- $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

  $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

  $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Área de un triángulo

- El área de cualquier triángulo viene dada por la fórmula:

  área = $\frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A$ o bien, área = $\frac{1}{2}ac\operatorname{sen} B$ o bien, área = $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$

Radianes, arcos y sectores circulares

Para un sector circular con ángulo central θ radianes en un círculo de radio r:

- Longitud del arco del sector circular = $r\theta$
- Área del sector circular = $\dfrac{\theta r^2}{2}$
- Para convertir grados a radianes, multiplicar por $\dfrac{\pi}{180}$
- Para convertir radianes a grados, multiplicar por $\dfrac{180}{\pi}$

Unidades de medidas

Se suele considerar a las matemáticas un "lenguaje universal". Sin embargo, este lenguaje adopta realmente muchas formas.

Los ángulos se pueden medir en diferentes unidades: grados o radianes. ¿Por qué necesitamos más de una unidad de medida?

A decir verdad, no las necesitamos pero lo que sucede es que, en diferentes partes del mundo y épocas, se han desarrollado distintas formas de medir los ángulos.

La idea de un círculo completo de 360° se atribuye a los antiguos babilonios quienes, hace miles de años, utilizaron un sistema de numeración *sexagesimal* (base 60). También puede estar relacionada con el hecho de que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es de cerca de 360 días.

Además del sistema decimal (base 10) que utilizamos, existen otros sistemas numéricos.

Por ejemplo, uno importante es el binario, cuya base es 2.

- ¿Dónde se usa comúnmente el sistema binario?

La tabla Plimpton 322 data de la época de la antigua Babilonia, alrededor del 1800 a. C. Los eruditos han traducido la escritura cuneiforme a dígitos modernos y descubrieron que todos los números están escritos en base 60.

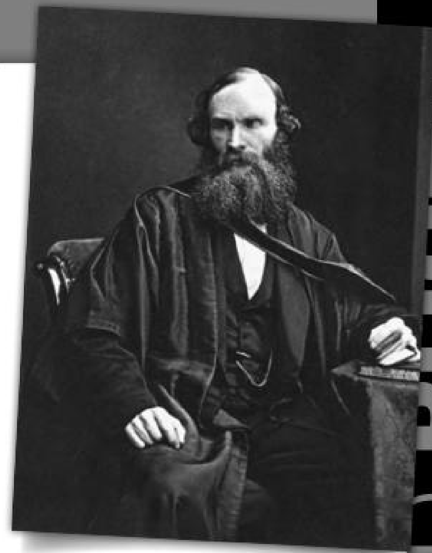
Los números se organizan en columnas y muestran tripletes pitagóricos: los babilonios ya los utilizaban más de 1000 años antes de la época de Pitágoras.

- ¿Qué es un triplete pitagórico?
- ¿Por qué la tabla se llama Plimpton 322?

- ¿Qué medimos en base 60?

El radián parece ser una unidad mucho más apropiada para medir ángulos, puesto que está estrechamente relacionada con las medidas propias del círculo. Si bien algunos matemáticos ya habían utilizado esta medida, el término "radián" no se empleó ampliamente hasta la década de 1870. Hoy en día el radián se utiliza comúnmente como unidad de medida en la geometría, la trigonometría y el análisis.

- ¿Cómo se relacionan los radianes con las medidas de un círculo?
- ¿Quién mide ángulos en **gradianes**?



▲ El término **radián** fue utilizado por James Thomson en sus escritos académicos a principios de la década de 1870, en Belfast.

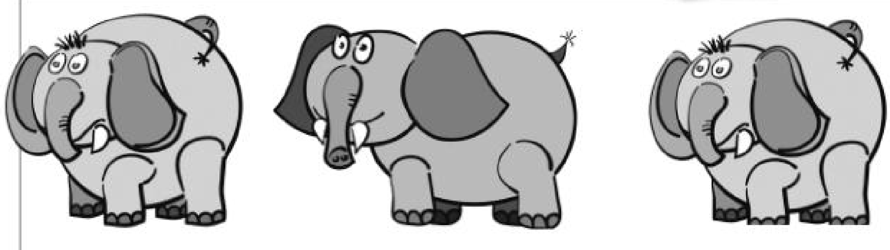
La medición de ángulos no es la única área en la que es común utilizar diferentes unidades de medida.
Un vistazo a las unidades monetarias, de distancia y de masa mostrará que el "lenguaje universal de las matemáticas" no es tan universal como podemos llegar a pensar.

ZONA

Esta señal de tránsito le avisa a un conductor de Estados Unidos y a otro de España que la velocidad máxima es 30, pero no especifica las unidades.

- ¿Cuál velocidad es realmente mayor?

¿Preferiríamos ser millonarios en Estados Unidos, en el Reino Unido o en China?



6000 kg **7 toneladas (EE. UU.)** **11 000 libras**

- ¿Cuál elefante es el más pesado?

- ¿Es posible que exista un lenguaje verdaderamente "universal"?
- ¿Qué tipo de información matemática ha sido enviada a la profundidad del espacio, para quizás comunicarnos con otras formas de vida inteligente?

12 Vectores

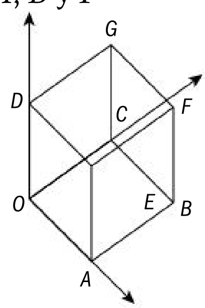
OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

4.1 Los vectores como desplazamientos en el plano y en el espacio; componentes de un vector; representación en columna; suma y diferencia de dos vectores; el vector nulo, el vector –**v**; multiplicación por un escalar; módulo de un vector; vectores unitarios; la base ***i***, ***j***, ***k***; vectores de posición.
4.2 Producto escalar de dos vectores; vectores perpendiculares; vectores paralelos; ángulo entre vectores.
4.3 Ecuación vectorial de una recta en dos y tres dimensiones; ángulo entre dos rectas.
4.4 Rectas coincidentes y paralelas; punto de intersección entre dos rectas; determinación de la posición relativa de dos rectas.

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

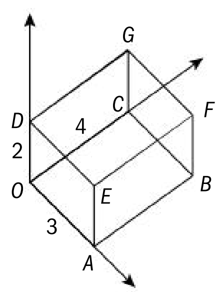
1 Usar coordenadas en tres dimensiones
Por ejemplo: *OABCDEFG* es un cubo de lado 2 unidades. *A* pertenece al eje *x*, *C* pertenece al eje *y* y *D* pertenece al eje *z*. Escribir las coordenadas de *A*, *B* y *F*
A tiene coordenadas $(2, 0, 0)$.
B tiene coordenadas $(2, 2, 0)$.
F tiene coordenadas $(2, 2, 2)$.



2 Usar el teorema de Pitágoras
Por ejemplo: Hallar la longitud de la hipotenusa, *x*, de un triángulo cuyos otros lados miden 4 cm, 7 cm
$x^2 = 7^2 + 4^2 = 65$
$x = \sqrt{65} = 8{,}06\text{ cm}$

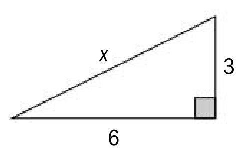
Comprobemos nuestras habilidades

1 El prisma *OABCDEFG* es tal que *OA* mide 3 unidades, *OC* 4 unidades y *OD* 2 unidades. *A* pertenece al eje *x*, *C* al eje *y* y *D* al eje *z*.



Dé las coordenadas de
a *A* **b** *B*
c *E* **d** *F*
e *H*, el punto medio de *GF*

2 Halle la longitud de la hipotenusa, *x*.



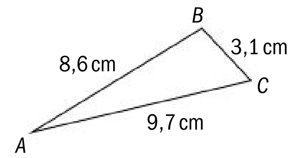
3 Usar el teorema del coseno
Por ejemplo: En el triángulo PQR, $PQ = 6\,\text{cm}$, $QR = 11\,\text{cm}$ y $\hat{Q} = 95°$.
Calcular la longitud de PR

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ \times QR \times \cos 95°$$
$$= 6^2 + 11^2 - 2 \times 6 \times 11 \times \cos 95°$$
$$= 168{,}50\ldots$$
$$PR = 13{,}0\,\text{cm (3 cs)}$$

3 **a** En el triángulo ABC, $AB = 9\,\text{cm}$, $BC = 15\,\text{cm}$ y el ángulo $ABC = 110°$. Calcule la longitud de AC al centímetro más próximo.

b En el triángulo ABC, $AB = 8{,}6\,\text{cm}$, $BC = 3{,}1\,\text{cm}$ y $AC = 9{,}7\,\text{cm}$.

Diagrama no dibujado a escala



Calcule el ángulo ABC, al grado más próximo.

Algunas cantidades pueden describirse mediante un número: solo se requiere un dato. Por ejemplo, la temperatura normal del cuerpo humano es de 37 °C, la longitud del río Amazonas es de 6400 km, la densidad del agua es de $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Estas cantidades quedan determinadas por la magnitud (medida) solamente y se denominan **escalares**.

Sin embargo, otras cantidades requieren, para su definición completa, no solamente de una magnitud sino también de una dirección. Tales cantidades se denominan **vectores**. Si queremos volar de Londres a París y nos dicen que la distancia es de 340 km, esta información resulta inútil hasta que nos digan en qué dirección necesitamos viajar.

Los vectores se emplean comúnmente en una rama de la física llamada mecánica. Se usan para representar cantidades tales como el desplazamiento, la fuerza, el peso, la velocidad y el momento. En matemáticas, los vectores nos interesan principalmente para representar desplazamientos y velocidades. El ejercicio final de este capítulo tiene una serie de preguntas donde podremos ver estas aplicaciones tanto en problemas de dos dimensiones (plano) como de tres dimensiones (espacio). Este capítulo trata de los conceptos básicos, el vocabulario y la notación de vectores, y a continuación, de las operaciones básicas y la geometría de vectores.

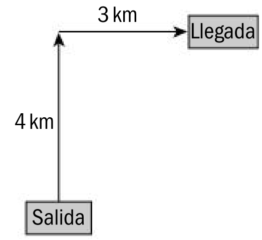
La función de los vectores en la mecánica puede ser un tema interesante para explorar.

12.1 Vectores: conceptos básicos

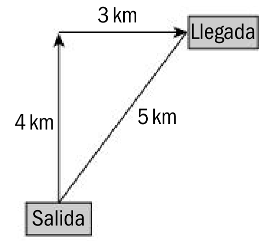
Si nos trasladamos 4 km hacia el Norte y 3 km hacia el Este, ¿qué distancia recorrimos?

Quizás se trate de una pregunta sencilla, pero podemos contestarla de dos maneras igualmente válidas:

- Una respuesta para esta pregunta es decir que recorrimos 7 km. Esta es la **distancia** total que recorrimos (4 + 3 = 7 km).



- Una segunda respuesta a esta pregunta es decir que recorrimos 5 km. Este valor se halla usando el teorema de Pitágoras ($\sqrt{4^2+3^2}$ = 5 kilómetros). A este valor se le llama **desplazamiento**. El desplazamiento mide la diferencia entre la posición de salida y la de llegada.



Vectores y escalares

➔ Un **vector** es una cantidad que tiene **medida** (magnitud) y **dirección**. El desplazamiento y la velocidad son dos cantidades vectoriales.

➔ Un **escalar** es una cantidad que tiene medida pero no dirección. La distancia y la celeridad son dos cantidades escalares.

Como se vio anteriormente, la distancia y el desplazamiento tienen distintos significados. Esto también es cierto para la velocidad y la celeridad. La celeridad se refiere a cuán rápido viaja un objeto, mientras que la velocidad se refiere a la razón a la cual cambia su posición.

Por ejemplo, si un automóvil viaja a 90 kilómetros por hora, esta es su celeridad.

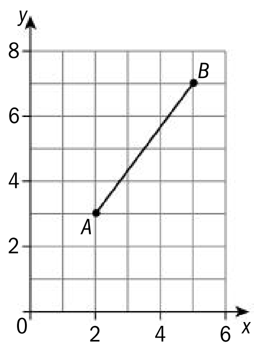
Si ese automóvil recorriera una pista cuyo punto de partida coincide con el de llegada, su velocidad cuando regresa al punto de partida sería 0.

Si el mismo automóvil estuviese recorriendo un camino recto en dirección Oeste, después de una hora diríamos que su velocidad es de 90 kilómetros por hora en dirección Oeste.

Representación de vectores

Los vectores se representan mediante segmentos orientados. La longitud del segmento indica la medida de la cantidad que representa el vector, y la dirección del segmento (representada por una flecha) indica la dirección del vector.

Considere los puntos $A(2, 3)$ y $B(5, 7)$ en el plano cartesiano:



Para describir el movimiento desde A hasta B podríamos decir "nos movemos 3 unidades en la dirección positiva del eje x y 4 unidades en la dirección positiva del eje y". El 3 se denomina la **componente horizontal** (o x), el 4 es la **componente vertical** (o y). Tanto la dirección como la longitud del movimiento tienen importancia y, por lo tanto, el uso de un vector se presta para describir la situación.

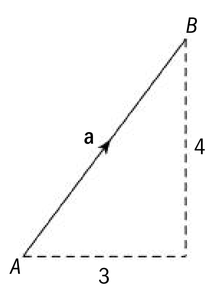
Este vector puede representarse en una variedad de formas:

En el diagrama, el segmento AB representa el vector $\overrightarrow{AB}$, donde la flecha por encima de las letras indica la dirección del movimiento (desde A hasta B). Las componentes del vector se representan aquí usando un **vector columna**.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los vectores también pueden representarse usando una letra minúscula en **negrita**.
Por ejemplo, podríamos usar **a** para representar el vector $\overrightarrow{AB}$.

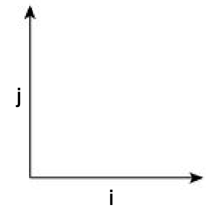
$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



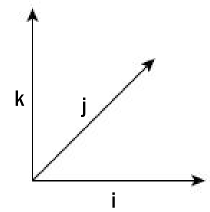
En un vector columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la x representa un movimiento en la dirección positiva del eje x y la y un movimiento en la dirección positiva del eje y.

Es difícil escribir las letras en negrita a mano; por eso, debemos subrayarlas para indicar que se trata de un vector. Así, **a** escrito a mano sería $\underline{a}$.

Finalmente, el vector se puede representar mediante **vectores unitarios** o versores. Podemos escribir $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ como 3**i** + 4**j**, donde **i** y **j** son vectores de medida 1 en las direcciones de los ejes *x* e *y* respectivamente. A **i** y **j** se les llama vectores base.



Por consiguiente, el vector 3**i** + 4**j** representa un movimiento de 3 unidades en la dirección positiva del eje *x* y 4 en la dirección positiva del eje *y*.



Del mismo modo en que consideramos objetos que se mueven sobre el plano, también podemos pensar en objetos que se mueven en el espacio tridimensional. Podemos representar un vector en tres dimensiones de forma similar, pero necesitamos introducir la letra **k** para el vector de longitud 1 en la dirección del eje *z*.

Por lo tanto, ahora tenemos tres componentes.

$\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ representa un movimiento de 3 unidades en la dirección positiva del eje *x*, 2 unidades en la dirección negativa del eje *y* y 1 unidad en la dirección positiva del eje *z*.

➔ El vector unitario en la dirección del eje *x* es **i**.

En dos dimensiones, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y en tres dimensiones, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

➔ El vector unitario en la dirección del eje *y* es **j**.

En dos dimensiones, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ y en tres dimensiones, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

➔ En tres dimensiones, el vector unitario en la dirección del eje *z* es $\mathbf{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Los vectores **i**, **j** y **k** se llaman **vectores base**.

Ejemplo 1

a Escriba $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$ utilizando vectores unitarios.

b Escriba $-\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ en forma de vector columna.

Respuestas:

a $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

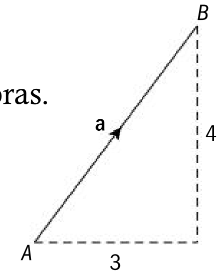
b $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$

Aquí el coeficiente de la componente ***j*** *es 0.*

La magnitud de un vector

La **magnitud** de $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del vector y se denota con $|\overrightarrow{AB}|$.
La magnitud se calcula usando el teorema de Pitágoras.

Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$



Otros nombres para la magnitud son módulo, longitud, norma y medida.

➔ Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2}$.

En tres dimensiones esto se transforma en:

➔ Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Ejemplo 2

Halle la magnitud de estos vectores:

a $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Respuestas

a $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(-5)^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$

b $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{14} = 3{,}74\ (3\,\text{cs})$

Cuando los físicos resuelven problemas de "aceleración uniforme" y "caída libre bajo el efecto de gravedad", necesitan considerar la magnitud y la dirección del vector aceleración. Este es un concepto interesante para explorar con mayor profundidad.

Ejercitación 12A

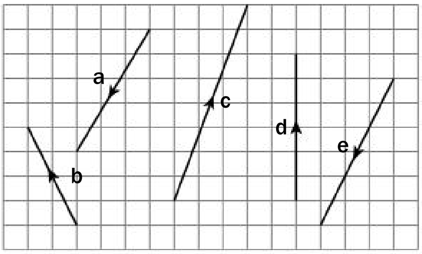
1 Escriba estos vectores utilizando vectores unitarios.

a $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b** $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ **c** $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 Escriba estos vectores en forma de vectores columna.

a $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **b** $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **c** $\overrightarrow{EF} = \mathbf{k}$

3 Escriba los vectores **a**, **b**, **c**, **d** y **e** utilizando vectores unitarios y en forma de vectores columna.



4 Halle la magnitud de cada vector.

a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c** $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **d** $\begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ **e** $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

5 Halle la magnitud de cada vector.

a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c** $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **d** $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ **e** $\mathbf{j} - \mathbf{k}$

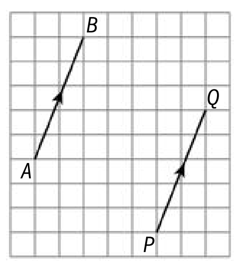
Vectores iguales, negativos y paralelos

➔ Dos vectores son **iguales** si tienen igual dirección, sentido y magnitud; sus componentes $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, y $\boldsymbol{k}$ son iguales también y, por lo tanto, los vectores columna son iguales.

No importa en qué lugar del plano cartesiano se encuentran estos vectores: siguen siendo iguales.

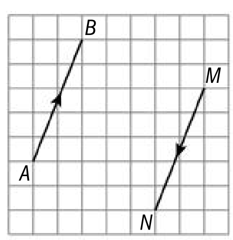
Considere lo siguiente:

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ tienen igual dirección (son paralelos) y sentido, y tienen igual magnitud. En consecuencia, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.



Si dos vectores paralelos tienen igual longitud, tendrán las mismas componentes. Aquí $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Los dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MN}$ tienen igual magnitud pero distintos sentidos.
Por lo tanto, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{MN}$.



Aquí, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ y, por lo tanto, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{MN}$.

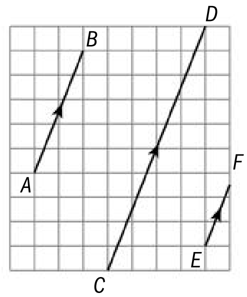
$\overrightarrow{MN}$ se llama el **vector opuesto**.

La dirección de un vector es importante, no solamente su longitud.

➔ Podemos escribir $\overrightarrow{AB}$ como $-\overrightarrow{BA}$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son todos **paralelos** pero tienen distintas magnitudes.

Aquí, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EF}$.



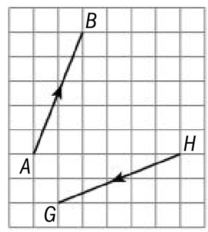
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = 1\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j}$

> ➔ Dos vectores son **paralelos** si uno es un múltiplo escalar del otro.
> Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{RS}$ son paralelos si $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{RS}$, donde k es una cantidad escalar. Lo dicho puede escribirse como $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GH}$ tienen igual magnitud (29), pero diferentes direcciones. Por lo tanto, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{GH}$.



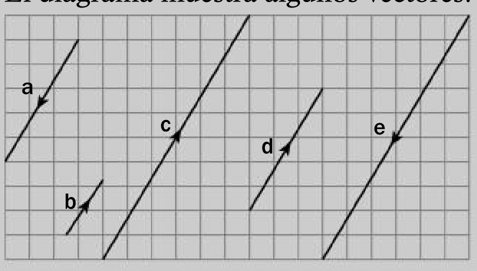
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

No podemos multiplicar $\overrightarrow{AB}$ por un escalar para obtener $\overrightarrow{GH}$.

Ejemplo 3

El diagrama muestra algunos vectores:



Escriba cada uno de los demás vectores en función del vector **a**.

Respuesta

Del diagrama podemos observar lo siguiente:

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix}$;

▶ Continúa en la página siguiente.

Por tanto,	
$\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}$	***b*** *es paralelo a* ***a****, en sentido opuesto; la magnitud de* ***b*** *es la mitad de la de* ***a****.*
$\mathbf{c} = -2\mathbf{a}$	***c*** *tiene sentido opuesto al de* ***a****; la magnitud de* ***c*** *es el doble de la de* ***a****.*
$\mathbf{d} = -\mathbf{a}$	***d*** *tiene sentido opuesto al de de* ***a****; la magnitud de* ***d*** *es igual a la de* ***a****.*
$\mathbf{e} = 2\mathbf{a}$	***e*** *tiene igual dirección y sentido que* ***a****; la magnitud de* ***e*** *es el doble de la de* ***a****.*

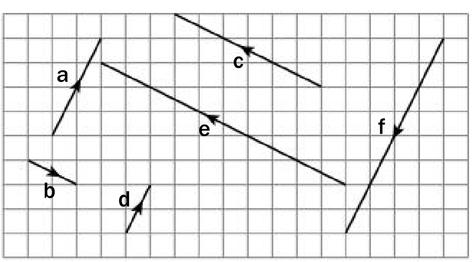
Ejemplo 4

¿Para qué valores de s y t estos dos vectores resultan paralelos?
$\mathbf{m} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{n} = 9\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + s\mathbf{k}$

Respuesta	
Por ser vectores paralelos, $\mathbf{m} = k\mathbf{n}$ $3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = k(9\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + s\mathbf{k})$ $3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = 9k\mathbf{i} - 12k\mathbf{j} + sk\mathbf{k}$	*Aplicar la propiedad distributiva e igualar los coeficientes*
$3 = 9k$ $k = \frac{1}{3}$	*Igualando las componentes* ***i***
Por lo tanto, $t = -12 \times \frac{1}{3} = -4$	*Igualando las componentes* ***j***
$-6 = s \times \frac{1}{3} \Rightarrow s = -18$	*Igualando las componentes* ***k***

Ejercitación 12B

1 El diagrama muestra algunos vectores.



a Escriba los vectores **c**, **d**, **e** y **f** en función de los vectores **a** o **b**.

b ¿De qué manera se relacionan **a** y **b**?

2 ¿Cuáles de estos vectores son paralelos a $\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$?

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -0{,}05 \\ -0{,}03 \end{pmatrix}$

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -10 \\ 70 \end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{e} = 60\mathbf{i} + 420\mathbf{j}$ $\quad\mathbf{f} = 6\mathbf{i} - 42\mathbf{j}$

$\mathbf{g} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

3 ¿Para qué valor de t estos dos vectores resultan paralelos?

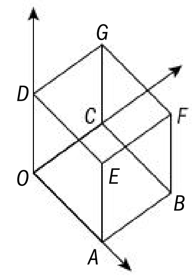
a $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ y $\mathbf{s} = 14\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$

b $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t \\ -8 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$

4 ¿Para qué valores de t y s estos dos vectores resultan paralelos?

$\mathbf{v} = t\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + s\mathbf{k}$

5 En el cubo *OABCDEFG* la longitud de cada arista es de una unidad.
Exprese estos vectores en función de **i**, **j** y **k**.



a $\overrightarrow{OG}$

b $\overrightarrow{BD}$

c $\overrightarrow{AD}$

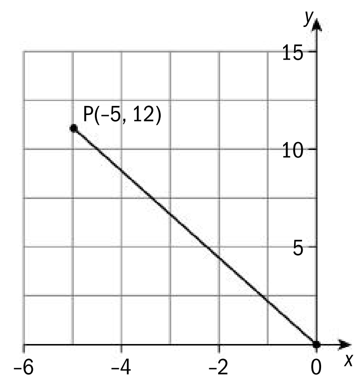
d $\overrightarrow{OM}$ donde M es el punto medio de GF.

6 Repita la pregunta 5 sabiendo que *OABCDEFG* es un prisma rectangular donde OA = 5 unidades, OC = 4 unidades y OD = 3 unidades.

Vectores de posición

Los **vectores de posición** son vectores que dan la posición relativa de un punto respecto de un punto fijo O.

El punto P con coordenadas (–5,12) tiene vector de posición $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

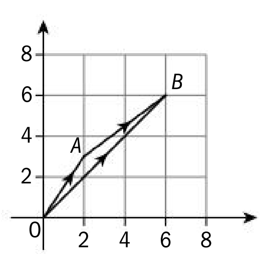


➔ El punto P con coordenadas (x, y) tiene vector de posición

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Vectores resultantes

Considere los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, 6)$.
El diagrama muestra los vectores de posición de A y B. Podemos ver que el vector $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
También vemos que el movimiento desde A hasta B podría describirse como un movimiento directo de A a B, o como un movimiento de A a O seguido de un movimiento de O a B.



Recordemos que $\overrightarrow{AB}$ debe escribirse como vector, no como par ordenado.

Así, podríamos escribir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ se llama resultante de los vectores $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{OB}$.

Recordemos que $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$,

y por lo tanto,

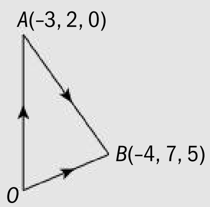
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

➔ Para hallar el **vector resultante** $\overrightarrow{AB}$ entre dos puntos A y B podemos restar el vector de posición de A del vector de posición de B.

Ejemplo 5

Los puntos A y B tienen coordenadas $(-3, 2, 0)$ y $(-4, 7, 5)$.
Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

Respuesta



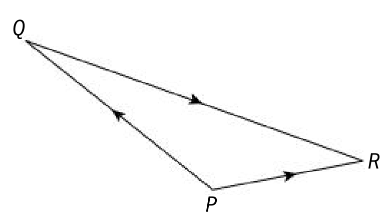
Primero escribimos los vectores de posición $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}-4\\7\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-4\\7\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\5\end{pmatrix}$$

De manera similar, si conocemos el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector $\overrightarrow{PR}$, conocemos la posición de cada uno de los puntos Q y R respecto del punto P.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}\\ &= \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

Ejemplo 6

Dados $\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{XZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}$,

halle los vectores: **a** $\overrightarrow{YZ}$ **b** $\overrightarrow{ZY}$

Respuestas

a $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{ZY} = -\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ejercitación 12C

1 P tiene coordenadas (7, 4), Q tiene coordenadas (2, 3).
Halle los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$.

2 El punto A tiene vector de posición $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, B tiene vector de posición $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y C tiene vector de posición $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Escriba como vector columna:

a $\overrightarrow{AB}$ **b** $\overrightarrow{BA}$ **c** $\overrightarrow{AC}$ **d** $\overrightarrow{CB}$

3 Escriba estos vectores en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.
a $\overrightarrow{OP}$, donde P es (2, –3, 5)
b El vector que une (1, –5, 6) con el origen
c El vector que va desde (2, –3, 5) hasta (1, 2, –1)
d El vector que va desde (1, 2, –1) hasta (2, –3, 5)

4 $\overrightarrow{LN} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{NM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Halle $\overrightarrow{LM}$.

5 Dados $\overrightarrow{TS} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\overrightarrow{TU} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, halle $\overrightarrow{US}$.

6 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2x \\ -3 \\ z \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ x+y \end{pmatrix}$.
Halle los valores de las constantes x, y y z.

Los ejemplos siguientes ilustran cómo mostrar que tres puntos son **colineales**.

Los puntos son colineales si pertenecen a una misma recta.

Ejemplo 7

Muestre que los puntos A, B y C con vectores de posición $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, respectivamente, son colineales.

Respuesta

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (-2 - 1)\mathbf{i} + (3 - (-2))\mathbf{j} + (-1 - 3)\mathbf{k}$

$= -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

Comenzar por hallar el vector determinado por dos puntos cualesquiera, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= (4-1)\mathbf{i} + (-7 - (-2))\mathbf{j} + (7-3)\mathbf{k}$

$= 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Ahora repetir el procedimiento usando otros dos puntos, por ejemplo, $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$

Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos y dado que tienen un punto en común, A, los puntos A, B y C deben pertenecer a la misma recta.

Podríamos haber hallado $\overrightarrow{BC} = 6\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, que resulta ser un múltiplo escalar tanto de $\overrightarrow{AB}$ como de $\overrightarrow{AC}$, demostrando así que AB y AC son paralelos a BC.

Ejercitación 12D

1 Muestre que los puntos A, B y C con vectores de posición $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, respectivamente, son colineales.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Los puntos A, B y C tienen coordenadas $(2, 3, -3)$, $(5, 1, 5)$ y $(8, -1, 13)$, respectivamente.

a Halle $\overrightarrow{AB}$.

b Muestre que A, B y C son colineales.

3 Muestre que los puntos $P_1(1, 2, 4)$, $P_2(-2, 1, 4)$ y $P_3(-5, 0, 4)$ son colineales.
Sabiendo que P_4 también es colineal con P_1, P_2 y P_3 y que la coordenada x de P_4 es 2, halle las coordenadas y y z.

4 Los vectores de posición de A, B y C están dados por $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $x\mathbf{i}$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, respectivamente. Halle el valor de x tal que A, B y C sean colineales y halle la razón $AB : BC$.

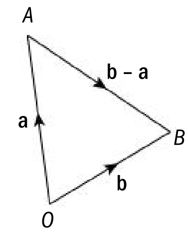
Distancia entre dos puntos en tres dimensiones

→ Si $A = (x_1, y_1, z_1)$, entonces $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$

y si $B = (x_2, y_2, z_2)$, entonces $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= \mathbf{b} - \mathbf{a}\\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Distancia $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



Ejemplo 8

Halle el vector desde $A(1, 3, 4)$ hasta $B(4, 2, 7)$ y, a partir de lo anterior, determine la distancia entre los dos puntos.

Respuesta

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{OB} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

Primero escribir los vectores de posición de cada punto

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\\ &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

Distancia $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19} = 4{,}36$ (3 cs)

Ejercitación 12E

1 Halle el vector $\overrightarrow{AB}$ desde $A(-1, 5, 1)$ hasta $B(4, 5, -1)$ y, a partir de lo anterior, determine la distancia entre los dos puntos.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 El punto A tiene vector de posición $\begin{pmatrix}-5\\2\\4\end{pmatrix}$, B tiene vector de posición $\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}$ y C tiene vector de posición $\begin{pmatrix}8\\10\\1\end{pmatrix}$.

Muestre que el triángulo ABC es isósceles y calcule el ángulo CAB.

3 Si el vector de posición $\mathbf{a}$ del punto $(2, -3, t)$ es tal que $|\mathbf{a}| = 7$, halle dos valores posibles de t.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Sabiendo que $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $|\mathbf{a}| = 3x$, halle dos valores posibles de x.

5 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}a\\-a\\2a\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$. Sabiendo que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$, halle los posibles valores de a.

6 **a** y **b** son dos vectores y $|\mathbf{a}| = 5$. Halle el valor de $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ cuando:

a $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$

b $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}$

c **b** es perpendicular a **a** y $|\mathbf{b}| = 12$

Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector de longitud 1 en una dirección dada. Para hallar un vector unitario en la dirección de un vector **a**, primero debemos hallar la longitud del vector **a**, es decir, $|\mathbf{a}|$, y luego multiplicar el vector **a** por $\frac{1}{|\mathbf{a}|}$. Este vector tendrá la misma dirección, dado que es un múltiplo escalar de **a**, y tendrá longitud 1, dado que mide $\frac{1}{|\mathbf{a}|} \times$ la longitud del vector original.

> ➔ Para hallar un vector de longitud 1 en la dirección de **a** se usa la fórmula $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

Empleando este método podemos también hallar un vector de cualquier longitud, digamos de longitud k, en la dirección de **a**. Primero debemos hallar el vector unitario y luego multiplicarlo por este valor de k.

> ➔ Para hallar un vector de longitud k en la dirección de **a** se usa la fórmula $k\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

Ejemplo 9

a Halle el vector unitario en la dirección del vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

b Halle un vector de longitud 10 en la dirección del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Respuestas

a El vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ tiene longitud $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Por lo tanto, un vector de longitud 1 será $\frac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$.

b El vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ tiene longitud $\sqrt{10}$. El vector $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ tiene longitud 1.

Por lo tanto, el vector de longitud 10 es $\frac{10}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

que puede simplificarse si se requiere:

$$\frac{10}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{10}\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{10}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercitación 12F

1 Muestre que $\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}$ es un vector unitario.

Muestre que la magnitud es 1.

2 Muestre que $\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$ es un vector unitario.

3 Halle un vector unitario paralelo a $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$.

4 Halle un vector unitario paralelo al vector $\begin{pmatrix}-1\\-5\\4\end{pmatrix}$.

5 Halle un vector unitario en la dirección del vector determinado por los puntos $P_1(1,0,1)$ y $P_2\,(3,2,0)$.

6 $a\mathbf{i}+2a\mathbf{j}$ es un vector unitario. Sabiendo que $a>0$, halle el valor de a.

7 Halle un vector de magnitud 5 que resulte paralelo al vector $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

8 Halle un vector de magnitud 7 en la dirección del vector $\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

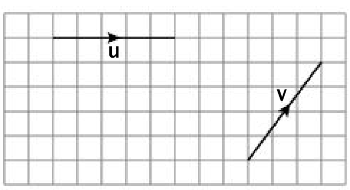
9 Halle un vector unitario en la dirección del vector:

a $\begin{pmatrix}2\cos\theta\\2\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix}1\\\tan\alpha\end{pmatrix}$

12.2 Suma y diferencia de vectores

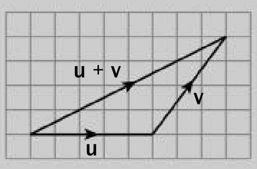
Suma de vectores

Supongamos que tenemos dos vectores $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

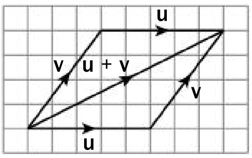


$\mathbf{u}+\mathbf{v}$ se interpreta geométricamente como un primer movimiento a lo largo del vector $\mathbf{u}$, seguido de un movimiento a lo largo del vector $\mathbf{v}$.

➔ El vector resultante, **u** + **v**, es el tercer lado del triángulo formado cuando **u** y **v** se disponen de forma tal que el origen de **v** coincide con el extremo de **u**.



Vemos también que la suma de vectores es conmutativa, dado que **u** + **v** = **v** + **u**. Esto da lugar al paralelogramo de la suma de vectores.



El vector resultante **u** + **v** en este caso es $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Observemos que es fácil obtener este resultado sumando las componentes correspondientes.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

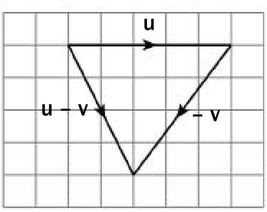
El término “conmutar” significa intercambiar o permutar.
En matemáticas, la propiedad conmutativa implica que se puede intercambiar el orden sin alterar el resultado.
Luego de considerar los siguientes cálculos (suma, diferencia, multiplicación y división), ¿cuáles operaciones parecerían ser conmutativas?
10 + 5 y 5 + 10
10 ÷ 5 y 5 ÷ 10
10 – 5 y 5 – 10
10 × 5 y 5 × 10

Diferencia de vectores

Consideremos nuevamente los dos vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

u – **v** se interpreta geométricamente como un movimiento a lo largo del vector **u**, seguido de un movimiento a lo largo del opuesto del vector **v**, o **u** + (–**v**).

u – **v** = **u** + (–**v**)



El vector resultante es **u** – **v** y, en este caso específico, es $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

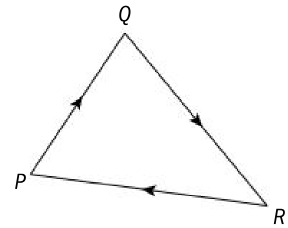
Nuevamente, vemos que podemos calcular sencillamente este resultado, restando las componentes.

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La resta no es conmutativa.
$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{u} - \mathbf{v}$

➔ Los vectores se restan sumando el vector opuesto.

El vector nulo



Considere el triángulo PQR.

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}$ debe ser igual a cero ya que el recorrido total resulta en una vuelta al punto de partida. Esto se escribe como $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \mathbf{0}$

El vector nulo se escribe en negrita para indicar que es un vector.

$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en dos dimensiones y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en tres dimensiones.

Equilibrio es el nombre que se da al estado donde un número de fuerzas están balanceadas: su resultante es cero. El concepto de equilibrio es un tema interesante para explorar con mayor profundidad.

Ejemplo 10

Dados $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, halle los vectores:

a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **b** $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **c** $2\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$

Respuestas

a $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2 + 4)\mathbf{i} + (-3 + (-2))\mathbf{j} + (3 + (-1))\mathbf{k}$
$= 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

b $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (4 - 2)\mathbf{i} + (-2 - (-3))\mathbf{j} + (-1 - 3)\mathbf{k}$
$= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

c $2\mathbf{b} - 3\mathbf{a} = (2(4) - 3(2))\mathbf{i} + (2(-2) - 3(-3))\mathbf{j} + (2(-1) - 3(3))\mathbf{k}$
$= 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

Ejercitación 12G

1 Dados $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, halle estos vectores:

a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **b** $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ **c** $\mathbf{c} + \mathbf{d}$
d $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}$ **e** $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ **f** $\mathbf{d} - \mathbf{b} + \mathbf{a}$

2 Dados $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$, halle estos vectores:

a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **b** $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ **c** $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$
d $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$ **e** $3\mathbf{c} - 2\mathbf{b} + 5\mathbf{a}$

3 Dados $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{k}$, halle estos vectores:

a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **b** $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

c $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ **d** $4(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + 2(\mathbf{b} + \mathbf{c})$

4 Dados los vectores $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{q} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, halle los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$, donde:

a $2\mathbf{x} - 3\mathbf{p} = \mathbf{q}$ **b** $4\mathbf{p} - 3\mathbf{y} = 7\mathbf{q}$ **c** $2\mathbf{p} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$

5 Los vectores **a** y **b** son tales que $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6-y \\ -2x-3 \end{pmatrix}$.

Sabiendo que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, halle los valores de x e y.

6 Los vectores **a** y **b** son tales que $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ u \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} t-s \\ 3s \\ t+s \end{pmatrix}$.

Sabiendo que $3\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, calcule los valores de s, t y u.

El método que consiste en calcular la acción combinada de dos o más fuerzas mediante la suma se denomina regla del paralelogramo y se ha conocido desde la época del filósofo y erudito griego Aristóteles (384–322 a. C.). El matemático holandés Simon Stevin (1548–1620) la empleó en su tratado *Principios del arte del peso* que permitió grandes avances en el desarrollo de la mecánica. No fue sino hasta alrededor de 1800 que Caspar Wessel (danés-noruego, 1745–1818) y Jean-Robert Argand (suizo, 1768–1822) comenzaron a formalizar el concepto de "vector".

Demostraciones geométricas

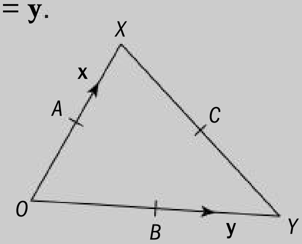
Aun cuando no contemos con vectores específicos, se pueden utilizar sumas, diferencias y múltiplos de vectores para deducir algunos resultados geométricos.

Ejemplo 11

En el triángulo OXY, A, B y C son los puntos medios de OX, OY y XY respectivamente, $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$ y $\overrightarrow{OY} = \mathbf{y}$.

a Halle expresiones para $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{CO}$ en función de **x** e **y**.

b Halle una expresión para $\overrightarrow{AB}$ en función de **x** e **y**. ¿Cuál es la relación entre la recta XY y la recta AB?



c P es el punto tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XB}$. Halle $\overrightarrow{OP}$.

d ¿Qué puede concluir acerca de la posición de P?

Respuestas

a $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}\mathbf{x}$ $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}\mathbf{y}$	*Usar la información del diagrama*
$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$	*Usar suma de vectores*

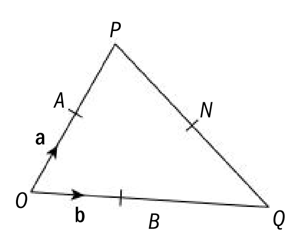
▶ Continúa en la página siguiente.

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XC} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XY}$	*Usar suma de vectores* *Del diagrama,* $\overrightarrow{XC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XY}.$
$= \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$	
$= \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}$	
$= \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$	
$\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$	
b $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$	$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$
$= \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$	
Como $\overrightarrow{XY} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ y $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, la longitud de AB es la mitad de la de XY y ambos vectores tienen la misma dirección. Por lo tanto, las rectas son paralelas.	
c $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XB}$	
$= \mathbf{x} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB})$	*Usar suma de vectores* $\overrightarrow{XO} = -\overrightarrow{OX}$
$= \mathbf{x} + \frac{2}{3}(-\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y})$	
$= \frac{1}{3}\mathbf{x} + \frac{1}{3}\mathbf{y}$	
$= \frac{1}{3}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$	
Por lo tanto, $OP : OC = 2 : 3$.	
d P se encuentra a $\frac{2}{3}$ del camino entre O y C.	

Ejercitación 12H

1 En este triángulo, $OA = AP$, $BQ = 3OB$, N es el punto medio de PQ y $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

Muestre que:



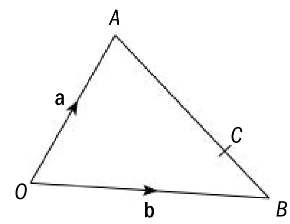
a $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a}$ **b** $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

c $\overrightarrow{PQ} = 4\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$ **d** $\overrightarrow{PN} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$

e $\overrightarrow{ON} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ **f** $\overrightarrow{AN} = 2\mathbf{b}$

2 En este triángulo, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ y $AC : CB = 3:1$.

Muestre que:

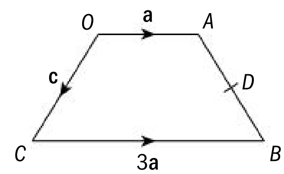


a $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ **b** $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

c $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ **d** $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{4}{4}\mathbf{b}$

3 *OABC* es un trapecio. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ y $\overrightarrow{CB} = 3\mathbf{a}$. *D* es el punto medio de *AB*.

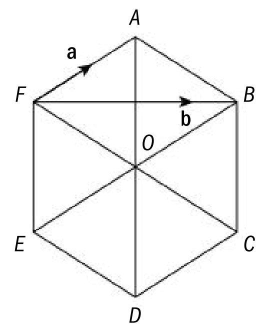
Muestre que:



a $\overrightarrow{OB} = \mathbf{c} + 3\mathbf{a}$ **b** $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} + 2\mathbf{a}$

c $\overrightarrow{OD} = 2\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ **d** $\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$

4 *ABCDEF* es un hexágono regular con centro en *O*. $\overrightarrow{FA} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{FB} = \mathbf{b}$.



a Exprese cada uno de estos vectores en función de **a** y/o **b**.

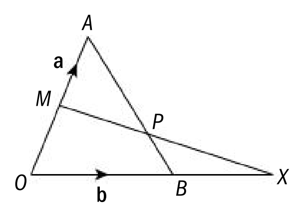
i $\overrightarrow{AB}$ **ii** $\overrightarrow{FO}$ **iii** $\overrightarrow{FC}$

iv $\overrightarrow{BC}$ **v** $\overrightarrow{FD}$

b ¿Qué cuestiones geométricas puede deducir sobre los segmentos *AB* y *FC*?

c Usando vectores, determine si (*FD*) y (*AC*) son paralelas.

5 En el diagrama $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. *M* es el punto medio de *OA* y *P* pertenece a *AB* de modo tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



Muestre que:

a $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

b $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$ y $\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{6}\mathbf{a}$.

c Si *X* es un punto tal que $OB = BX$, muestre que $\overrightarrow{MX} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

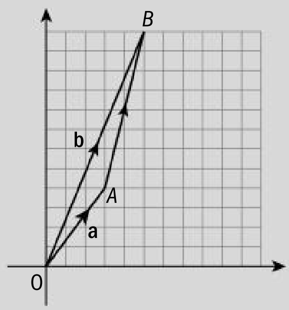
d Demuestre que *MPX* es una recta.

12.3 Producto escalar

A menudo, necesitamos calcular el ángulo entre dos vectores cuando resolvemos problemas.

Investigación: el teorema del coseno

Considere dos vectores $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.



Ahora va a usar el teorema del coseno para calcular θ, el ángulo entre los dos vectores.

1 Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

2 Halle las longitudes OA, OB y AB ($|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ y $|\overrightarrow{AB}|$).

3 Recuerde el teorema del coseno y aplíquelo a esta situación.

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|}$$

4 Halle θ, calculando $\cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|}\right)$.

Debería hallar que $\theta = 14{,}3°$.

Ahora repita este procedimiento usando $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$.

En el paso **3**, es posible simplificar la expresión obtenida, para llegar a

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

o, alternativamente, $a_1b_1 + a_2b_2 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$.

$a_1b_1 + a_2b_2$, se llama el **producto escalar** de los dos vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$.

Se lo puede hallar multiplicando los coeficientes de **i** y los coeficientes de **j** y (en el caso de tres dimensiones) los coeficientes de **k** y sumando los resultados.

El producto escalar se conoce también como producto punto.

→ Producto escalar

Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
De forma similar, si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

El producto escalar es conmutativo; esto significa que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

➔ El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores.

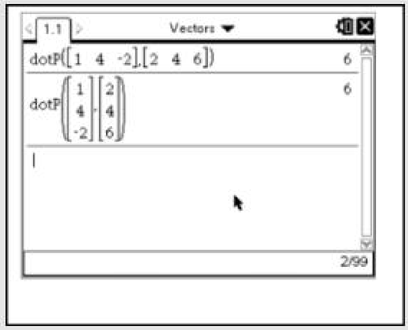
Ejemplo 12

Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, halle $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Respuesta

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1 \times 2) + (4 \times 4) + (-2 \times 6)$$
$$= 2 + 16 - 12 = 6$$

El resultado es un número escalar, no un vector.



También se puede usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG) para calcular el producto escalar entre dos vectores.

El ángulo entre dos vectores

Si no conocemos el valor del ángulo θ entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, podemos usar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta \text{ o } \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

para hallar θ, en lugar de desarrollar por completo el teorema del coseno.

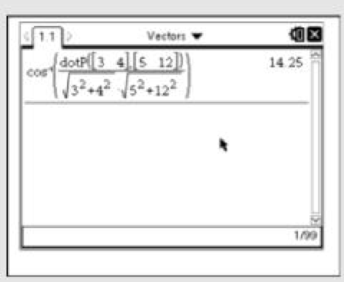
Ejemplo 13

Halle el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, sabiendo que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

Respuesta

Usando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times 5 + 4 \times 12 = 63$$
$$|\mathbf{a}| = 5, \ |\mathbf{b}| = 13$$
$$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos\theta = 5 \times 13 \times \cos\theta$$
$$= 65\cos\theta$$
$$\Rightarrow 63 = 65\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{63}{65}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{63}{65}\right)$$
$$= 14{,}3°$$



Propiedades especiales del producto escalar

Vectores perpendiculares

Dos vectores son perpendiculares si y solo si su producto escalar es cero.

Esto es porque si $\theta = 90°$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos 90° \\ &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

➔ Para vectores **perpendiculares**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

A los vectores perpendiculares también se los llama ortogonales.

Observe que, dado que **i**, **j** y **k** son perpendiculares entre sí, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$.

Vectores paralelos

Si dos vectores **a** y **b** son paralelos, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos 0° \\ &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \end{aligned}$$

➔ Para vectores **paralelos**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$

Dado que **i** y **j** y **k** son todos vectores unitarios, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$.

Vectores coincidentes

Dado un vector **a**

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}|\,\cos 0° \\ &= a^2 \end{aligned}$$

➔ Para vectores **coincidentes**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$

En 1686 Newton publicó su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, en la cual detalló tres **leyes del movimiento**. Para poder comprender y aplicar estas leyes necesitamos saber cómo descomponer una fuerza en direcciones perpendiculares y cómo hallar la resultante de fuerzas perpendiculares. Las leyes de Newton son un tema interesante para explorar con mayor profundidad.

Ejercitación 12I

1 Dados $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, halle:

a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$
b $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$
c $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$
d $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$
e $(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$

2 Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, halle:

a $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ **b** $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})$ **c** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
d $2\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ **e** $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{w})$

3 Determine si estos pares de vectores son perpendiculares, paralelos o ninguna de las dos opciones.

a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

b $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

e $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ y $\mathbf{m} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

g $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4 Halle $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$ si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

5 Dados $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, halle el vector $\mathbf{d}$ tal que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = -9$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{d} = 11$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 6$.

6 Halle el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ si $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 2$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{6}$.

7 Halle los ángulos entre estos vectores, dando sus respuestas en grados, con una aproximación de una cifra decimal.

a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

8 Considere los puntos $A(2,4)$, $B(1,9)$ y $C(3,2)$. Halle:

a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

b $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

c El coseno del ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

9 Halle el ángulo entre los siguientes pares de vectores.

a $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

10 Los puntos A, B y C forman un triángulo. Sus vectores de posición son $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Halle:

- **a** Las longitudes de los lados AB y AC
- **b** El valor exacto del coseno del ángulo BAC
- **c** El área del triángulo

11 Halle el ángulo entre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el eje x.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

12 Los vectores de posición de A y B son $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, respectivamente, respecto de un origen O.

- **a** Muestre que OA y OB son perpendiculares.
- **b** Halle la longitud AB.

13 Halle λ si los vectores $2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ son perpendiculares.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

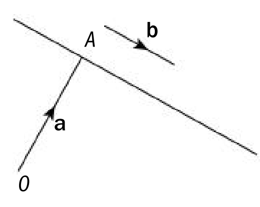
14 Sean $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$. Halle λ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sea perpendicular a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

15 Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} p \\ 2 \\ -p \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -p \\ -3 \end{pmatrix}$.

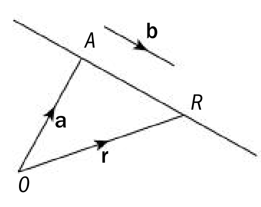
Halle el valor de p tal que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ sean perpendiculares.

12.4 Ecuación vectorial de la recta

Supongamos que una recta pasa por el punto A, donde A tiene vector de posición $\mathbf{a}$, y que la recta es paralela al vector $\mathbf{b}$.



Ahora, si R es cualquier punto que pertenece a la recta, $\overrightarrow{AR}$ es paralelo a $\mathbf{b}$. Por lo tanto, debe existir un número t tal que $\overrightarrow{AR} = t\mathbf{b}$.



Cualquier punto R que pertenece a la recta puede hallarse partiendo del origen y desplazándose por el vector $\mathbf{a}$ hasta alcanzar la recta.
A partir de lo anterior,

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

➔ La **ecuación vectorial** de la recta está dada por $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición general de un punto que pertenece a la recta, $\mathbf{a}$ es el vector de posición de un punto de la recta y $\mathbf{b}$ es un **vector director** paralelo a la recta. A t se le llama parámetro.

Ejemplo 14

a Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 3)$ y es paralela al vector $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, -4)$ y $B(-2, 1, 1)$.

c Halle el ángulo agudo entre estas dos rectas.

Respuestas

a $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Una ecuación vectorial es

$\mathbf{r} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$

b $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Escribir los vectores de posición de A y B

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ es un vector que tiene la misma dirección que la recta.

A partir de lo anterior, una ecuación de la recta es

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c Los vectores directores son $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Para hallar el ángulo entre estas dos rectas, hay que hallar el ángulo entre sus vectores directores.

Usando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$

En la ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ es el vector director.

$-1 \times -3 + 3 \times 1 + -1 \times 5$

$= \sqrt{11} \times \sqrt{35}\cos\theta$

$1 = \sqrt{11}\sqrt{35}\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{35}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{35}}\right)$$

$= 87{,}1°$

Ejercitación 12J

1 Halle una ecuación de la recta que es paralela al vector **a** y que pasa por el punto B, con vector de posición **b**:

a $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

b $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

c $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$

d $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ $\mathbf{b}=2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

2 Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a $(4, 5)$ y $(3, -2)$ **b** $(4, -2)$ y $(5, -2)$

c $(3, 5, 2)$ y $(2, -4, 5)$ **d** $(0, 0, 1)$ y $(1, -1, 0)$

3 Halle una ecuación vectorial de una recta perpendicular al vector **a** y que pasa por el punto B con vector de posición **b**.

a $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$

b $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

c $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$

d $\mathbf{a}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ $\mathbf{b}=5\mathbf{k}$

4 Determine si el punto dado pertenece a la recta dada.

a $(4, 5)$ $\mathbf{r}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

b $(5, -2)$ $\mathbf{r}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

c $(-3, 5, 1)$ $\mathbf{r}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

d $(2, 1, 1)$ $\mathbf{r}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k}+t(-2\mathbf{j}-3\mathbf{k})$

5 Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(2, 4, 5)$ en la dirección $-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+8\mathbf{k}$.
Halle p y q tales que el punto $(p, 10, q)$ pertenezca a la recta.

6 Halle una ecuación vectorial de una recta vertical que pase por el punto (–6, 5).

7 ¿Son las rectas representadas por estas ecuaciones vectoriales coincidentes, paralelas o perpendiculares, o ninguna de estas opciones?

a $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

b $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

d $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

8 Halle el ángulo entre estos pares de rectas.

a $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $\mathbf{r} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

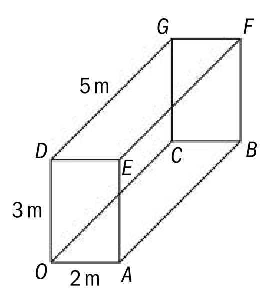
PREGUNTAS TIPO EXAMEN

9 Los puntos A y B tienen coordenadas (–2, –3, –4) y (–6, –7, –2), respectivamente. La recta l_1 tiene ecuación $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a Muestre que el punto A pertenece a la recta l_1.

b Muestre que $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a la recta l_1.

10 La figura muestra un prisma en el cual $OA = 2\,\text{m}$, $OC = 5\,\text{m}$ y $OD = 3\,\text{m}$. Considere O como el origen y vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la dirección OA, OC y OD respectivamente.



a Exprese estos vectores en función de los vectores unitarios.

i $\overrightarrow{OF}$ **ii** $\overrightarrow{AG}$

b Calcule el valor de:

i $|\overrightarrow{OF}|$ **ii** $|\overrightarrow{AG}|$

iii Halle el producto escalar de $\overrightarrow{OF}$ y $\overrightarrow{AG}$.

c A partir de lo anterior, halle el ángulo entre las diagonales OF y AG.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

11 Los puntos A y B tienen vectores de posición $\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, respectivamente, respecto de un origen fijo O.

a Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

b Halle el coseno del ángulo OAB.

c Muestre que, para todos los valores de μ, el punto P con vector de posición $(1 + 7\mu)\mathbf{i} + (5 - 8\mu)\mathbf{j} + (-2 + 8\mu)\mathbf{k}$ pertenece a la recta que pasa por A y B.

d Halle el valor de μ para el cual OP resulta perpendicular a AB.

e A partir de lo anterior, halle el punto en el que la perpendicular desde O hasta AB corta a AB.

Punto de intersección entre dos rectas

Si nos dan las ecuaciones vectoriales de dos rectas, podemos hallar el punto donde se cortan.

Ejemplo 15

Dos rectas tienen ecuaciones $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Muestre que las rectas se cortan y halle las coordenadas del punto de intersección.

Respuesta

Los dos vectores son iguales si sus correspondientes componentes son iguales.

$\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se cortan si existe un valor de t y un valor de s tales que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 + s \\ y = s \\ z = -1 + s \end{array}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 2 + 4t \\ z = 8t \end{array}$$

$$3 + s = 6 \quad (1)$$
$$s = 2 + 4t \quad (2)$$
$$-1 + s = 8t \quad (3)$$

Igualar componentes y resolver el sistema de ecuaciones

La ecuación (1) da $s = 3$

Sustituyendo $s = 3$ en la ecuación (2):

$3 = 2 + 4t$ por lo tanto $t = \frac{1}{4}$

Sustituyendo $s = 3$ en la ecuación (3)

$-1 + 3 = 8t$ por lo tanto $t = \frac{1}{4}$

Dado que el valor de s y el valor de t satisfacen las tres ecuaciones, las dos rectas se deben cortar.

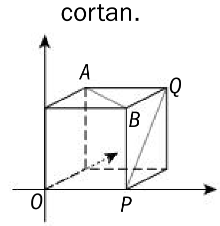
▶ Continúa en la página siguiente.

En tres dimensiones, dos rectas pueden:

1 Cortarse: si el valor de los parámetros satisface todas las ecuaciones.

2 Ser paralelas: tendrán vectores directores que son múltiplos uno del otro.

3 Ser alabeadas: si las rectas no son paralelas y los valores no son consistentes, las rectas no se cortan.



AB y *PQ* son alabeadas, nunca se cortan.

Sustituyendo $s = 3$ en $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x = 3 + 3 = 6$ $y = 0 + 3 = 3$ $z = -1 + 3 = 2$ Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección son (6,3,2).	*Para hallar el punto de intersección, reemplazar el valor de s en $\mathbf{r}_1$ para hallar el vector de posición del punto de intersección*
$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $x = 6$ $y = 2 + 4\left(\frac{1}{4}\right) = 3$ $z = 0 + 8\left(\frac{1}{4}\right) = 2$	*Alternativamente podríamos reemplazar el valor de t en $\mathbf{r}_2$.* *Esto nos da las mismas coordenadas y es una manera útil de verificar la respuesta.*

Ejercitación 12K

1 Halle las coordenadas del punto donde $\mathbf{r}_1 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \lambda(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ corta a $\mathbf{r}_2 = 11\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + \mu(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$.

2 Las ecuaciones vectoriales de dos rectas están dadas por

$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$. Las rectas se cortan en el punto P. Halle el vector de posición del punto P.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Una ecuación de la recta l_1 es:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una ecuación de la recta l_2 es:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Muestre que las rectas l_1 y l_2 se cortan y halle las coordenadas del punto de intersección.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Halle el punto donde las rectas con ecuaciones $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t(3\mathbf{i} - \mathbf{j})$ y $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} + s\mathbf{j}$ se cortan.

5 Muestre que las dos rectas $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y

$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son alabeadas.

6 Las ecuaciones vectoriales de las rectas L y M son:
L: $\mathbf{l} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} + s(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$

M: $\mathbf{m} = 14\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

- **a** Muestre que las rectas L y M se cortan y halle el vector de posición del punto de intersección.
- **b** Muestre que las rectas L y M son perpendiculares.

7 La ecuación de la recta L es $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

El punto A tiene coordenadas $(5, 7, a)$, donde a es una constante.

El punto B tiene coordenadas $(b, 13, -1)$, donde b es una constante.

Los puntos A y B pertenecen a la recta L.

- **a** Halle los valores de a y b.

El punto P pertenece a la recta L de modo tal que OP es perpendicular a L.

- **b** Halle las coordenadas de P.
- **c** A partir de lo anterior, halle la distancia exacta OP.

8 Los puntos A y B tienen vectores de posición $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, respectivamente, respecto de un origen fijo O.

- **a** Determine una ecuación vectorial de la recta L_1 que pase por los puntos A y B.

Una ecuación vectorial de la recta L_2 es $\mathbf{r} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{k} + s(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

- **b** Muestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan y halle el vector de posición del punto de intersección C.
- **c** Halle la longitud del segmento AC.
- **d** Halle, a la décima de grado más próxima, el ángulo agudo entre las rectas L_1 y L_2.

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 12: La ecuación de una recta en tres dimensiones*

12.5 Aplicaciones de los vectores

Los vectores se aplican a situaciones de la vida cotidiana que contemplan cantidades vectoriales tales como los desplazamientos y las velocidades.

Ejemplo 16

El vector de posición de un bote, A, t horas después de dejar el puerto está dado por $\mathbf{r}_1 = t\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$. Un segundo bote, B, pasa cerca del puerto. Su vector de posición en un tiempo t está dado por $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix}50\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$.

a ¿Qué distancia hay entre los botes en el momento en que el primero deja el puerto?

b ¿Qué celeridad tiene cada bote?

c ¿Existe peligro de que los botes colisionen si uno de ellos no cambia de dirección?

Respuestas

a En $t = 0$, el bote A está en el origen, con vector de posición $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y el bote B tiene vector de posición $\begin{pmatrix}50\\5\end{pmatrix}$, por lo tanto, la distancia que los separa es de $\sqrt{50^2 + 5^5} = \sqrt{2525} = 50{,}2\,\text{km}$.

b La celeridad de los botes se halla calculando la magnitud de sus vectores directores, esto es, del vector velocidad de cada bote.

Para el bote A, el vector que recorrerá en una hora es $\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$, cuya longitud es $\sqrt{30^2 + 15^2} = \sqrt{1125} = 33{,}5\,\text{km}$.

Por lo tanto, el bote A tiene una celeridad de $33{,}5\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

Para el bote B, el vector que recorrerá en una hora es $\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$, cuya longitud es $\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 14{,}1\,\text{km}$.

Por lo tanto, el vector B tiene una celeridad de $14{,}1\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

c Para que los botes colisionen debería existir un valor de t para el cual los vectores de posición de los dos botes coincidieran.

Componentes de x: $30t = 50 + 10t \Rightarrow t = 2{,}5\,\text{h}$

Componentes de y: $15t = 5 + 10t \Rightarrow t = 1\,\text{h}$

En consecuencia, los botes no colisionarán.

Ejercitación 12L

1 El vector de posición del barco S es 30 km Norte y 60 km Este. El vector de posición de la boya B es 20 km Norte y 45 km Este. Halle:

a La posición del barco respecto de la boya

b La distancia exacta entre el barco y la boya

2 Una partícula P está en el origen O en el instante $t = 0$. La partícula se mueve con una velocidad constante y llega al punto Q, con vector de posición $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix}$ m, 4 segundos más tarde. Halle:

a La velocidad de P

b La posición de P, si continúa moviéndose durante 6 segundos más

Otra partícula T se mueve con una velocidad constante de $(12\mathbf{i} - 5\mathbf{j})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Pasa por el punto A, cuyo vector de posición es $(4\mathbf{i} - \mathbf{j})\,\mathrm{m}$ cuando $t = 0$.

c Halle la celeridad de la partícula.

d Halle la distancia de T a O, cuando $t = 3$ s.

e ¿Colisionarán las partículas?

3 En esta pregunta las distancias están dadas en kilómetros y el tiempo en horas. Un vector unitario representa un desplazamiento de 1 km. A las 3 de la tarde una persona está parada en lo alto de un peñasco mirando el mar y observando el paso de dos barcos. La posición del barco A respecto de un punto en la costa está dada por $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y viaja con una velocidad de $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. La posición del barco B está dada por $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y viaja a una velocidad de $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Halle:

a El instante en el cual los dos barcos colisionarán si alguno de los dos no cambia de dirección

b El punto en el cual los dos barcos colisionarán

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Las posiciones de dos helicópteros X e Y en el instante t están dadas por las fórmulas

$\mathbf{r}_x = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Las distancias están dadas en metros.

a Halle la celeridad de los dos helicópteros.

b Muestre que los dos helicópteros no colisionarán.

c Halle la distancia entre los helicópteros cuando $t = 10$.

Ejercicio de revisión

1 Demuestre, usando un método vectorial, que los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 3, 5)$ y $C(7, 0, -1)$ son colineales.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Muestre que los puntos A, B y C, con vectores de posición $5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ respectivamente, forman un triángulo rectángulo.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Dados $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, muestre que los vectores

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ son perpendiculares.

4 Dos rectas con ecuaciones $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ se cortan en el punto P. Halle las coordenadas de P.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 Un triángulo tiene sus vértices en $A(-2, 4)$, $B(1, 7)$ y $C(-3, 2)$.

a Halle $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b Halle $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c Muestre que $\cos B\hat{A}C = \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$.

6 Dos rectas L_1 y L_2 están dadas por $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a P es el punto de L_1 cuando $s = 4$. Halle el vector de posición de P.

b Muestre que P pertenece también a L_2.

7 La recta L_1 tiene ecuación vectorial $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L_2 es paralela a L_1 y pasa por el punto B(2, 2, 4).

a Escriba una ecuación vectorial para L_2 en la forma $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$.

Una tercera recta L_3 es perpendicular a L_1 y está representada por

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 7 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$.

b Muestre que $x = -3$.

c Halle las coordenadas del punto C, la intersección entre L_1 y L_3.

d Halle $\overrightarrow{BC}$.

e Halle $|\overrightarrow{BC}|$ en la forma $a\sqrt{b}$, donde a y b son enteros que deberá determinar.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

8 (En esta pregunta las distancias se miden en kilómetros y el tiempo en horas.) Al mediodía, el cuidador de un faro observa dos barcos A y B.

La posición del barco A en el instante t está dada por $r_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$.

La posición del barco B en el instante t está dada por $r_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Muestre que A y B colisionarán y halle el instante y el vector de posición del punto de colisión. A fin de evitar la colisión, a las 12.15, el barco A cambia su dirección a $\begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

b Halle la distancia entre A y B a las 12.30.

Ejercicio de revisión

1 Halle la amplitud del ángulo entre los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Dé su respuesta al grado más próximo.

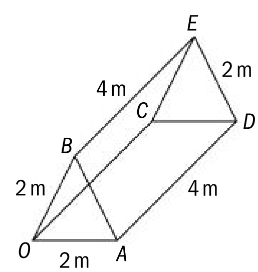
PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 Los vértices de un triángulo PQR se definen por los vectores de posición

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Halle:

a $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QP}$ **b** $P\hat{Q}R$ **c** El área del triángulo PQR

3 Una carpa $OABCDE$ tiene forma de prisma triangular, con una sección transversal constante que es un triángulo equilátero de 2 m de lado. La carpa tiene 4 m de largo. La base $OADC$ es horizontal. Los postes de soporte se colocarán a lo largo de las diagonales BC y BD.



Tome O como el origen y considere vectores unitarios **i** y **j** en la dirección de OA y OC respectivamente; **k** es un vector unitario en sentido vertical hacia arriba.

a Exprese estos vectores en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

i $\overrightarrow{OC}$ **ii** $\overrightarrow{OB}$ **iii** $\overrightarrow{OD}$

b A partir de lo anterior, halle los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

c Calcule los valores de:

i $|\overrightarrow{BC}|$ **ii** $|\overrightarrow{BD}|$

iii El producto escalar entre $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$

d A partir de lo anterior, halle el ángulo entre los dos postes de soporte.

4 Dados $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (x-2)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = x^2\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - 12x\mathbf{k}$, donde x es una variable escalar, halle:

a Los valores de x para los cuales **a** y **b** son perpendiculares

b El ángulo entre **a** y **b**, cuando $x = -1$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 Los puntos P y Q tienen vectores de posición $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ respectivamente, respecto de un origen O.

a Muestre que $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$.

b Escriba una ecuación vectorial de la recta L_1, que pasa por los puntos P y Q.

Una ecuación de la recta L_2 es $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c Muestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan y halle el vector de posición del punto de intersección.

d Calcule, al grado más próximo, el ángulo agudo entre las rectas L_1 y L_2.

6 (Todas las distancias en esta pregunta están en metros y el tiempo en segundos.) Un insecto vuela a una altura constante. En el instante $t = 0$, el insecto está en el punto A, con coordenadas (0, 0, 6). Dos segundos más tarde, el insecto está en el punto B, con coordenadas (6, –2, 6).

a Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

El insecto continúa volando en la misma dirección con la misma celeridad.

b Muestre que el vector de posición del insecto en el tiempo t está dado por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En el instante $t = 0$, un pájaro emprende vuelo desde el suelo. El vector de posición del pájaro en el tiempo t está dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c Escriba las coordenadas del punto de partida del pájaro.

d Halle la celeridad del pájaro.

El pájaro alcanza al insecto en el punto C.

e Halle el tiempo que tarda el pájaro en alcanzar al insecto.

f Halle las coordenadas de C.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 12

Vectores: conceptos básicos

- Un **vector** es una cantidad que tiene **medida** (magnitud) y **dirección**.
  El desplazamiento y la velocidad son ejemplos de vectores.
- Un **escalar** es una cantidad que tiene medida pero no dirección.
  La distancia y la celeridad son ejemplos de escalares.
- El vector unitario en la dirección del eje x es $\mathbf{i}$.

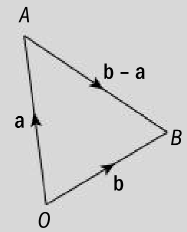
  En dos dimensiones, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y en tres dimensiones, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- El vector unitario en la dirección del eje y es $\mathbf{j}$.

  En dos dimensiones, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y en tres dimensiones, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- En tres dimensiones, el vector unitario en la dirección del eje z es $\mathbf{k}$, donde
  $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se denominan **vectores base**.
- Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

  Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Dos vectores son **iguales** si tienen igual magnitud y dirección; sus componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ también son iguales y, por lo tanto, sus vectores columna son iguales.
- Podemos escribir el vector $\overrightarrow{AB}$ como $-\overrightarrow{BA}$.
- Dos vectores son **paralelos** si uno es un múltiplo escalar del otro.
  Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{RS}$ son paralelos si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{RS}$ donde k es una cantidad escalar.
  Esto puede escribirse como $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$.
- El punto con coordenadas (x, y) tiene **vector de posición** $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
- Para calcular el **vector resultante** $\overrightarrow{AB}$ entre dos puntos A y B, se resta el vector de posición de A del vector de posición de B.

Continúa en la página siguiente.

- Si $A = (x_1, y_1, z_1)$, entonces $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$
y si $B = (x_2, y_2, z_2)$, entonces $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= \mathbf{b} - \mathbf{a}\\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$
Distancia $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

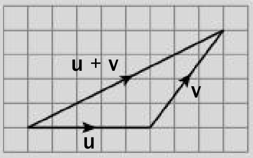


- Para hallar un vector de longitud 1 en la dirección de **a**, se usa la fórmula $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

- Para hallar un vector de longitud k en la dirección de a, se usa la fórmula $k\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

Suma y diferencia de vectores

- El vector resultante, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, es el tercer lado de un triángulo formado cuando **u** y **v** se ubican uno a continuación de otro haciendo coincidir el extremo de **u** con el origen de **v**.



- Para hallar la diferencia entre dos vectores, se suma el vector opuesto.

Producto escalar

- **Producto escalar**
Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
De manera similar, si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$,
entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
- El **producto escalar** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores.
- Para vectores **perpendiculares**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.
- Para vectores **paralelos**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.
- Para vectores **coincidentes**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$.

Ecuación vectorial de la recta

- La **ecuación vectorial** de la recta es $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, donde **r** es el vector de posición general de un punto de la recta, **a** es un vector de posición de un punto dado y **b** es un **vector director** paralelo a la recta. t se denomina parámetro.

Teoría del **Conocimiento**

¿Unidos o separados?

A menudo se divide a las matemáticas en diferentes ramas o campos de conocimiento.

- Enumere las ramas de las matemáticas que conoce.
- ¿Por qué los seres humanos sienten la necesidad de categorizar y compartimentar el conocimiento?

Álgebra y geometría

En este capítulo representamos vectores geométricamente y los usamos para demostrar propiedades geométricas. También empleamos el álgebra vectorial para describir y generalizar propiedades geométricas.

- ¿Puede pensar ejemplos de cómo usó los vectores en cada una de estas formas?
- Entonces, ¿los vectores pertenecen al álgebra o a la geometría?

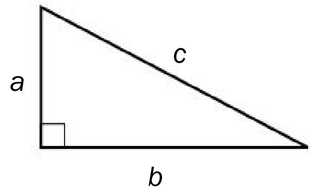
Conectar para comprender

Establecer conexiones entre diferentes dominios matemáticos (álgebra y geometría por ejemplo) desarrolla la comprensión. El matemático francés René Descartes (1596–1650) fue uno de los primeros en usar el álgebra para resolver problemas geométricos. Su mayor aportación fue la geometría cartesiana o de coordenadas.

Cada vez que el álgebra y la geometría estuvieron separadas, sus progresos han sido lentos y sus usos limitados, pero cuando estas dos ciencias se unieron, compartieron mutuamente sus fuerzas y marcharon juntas hacia la perfección.

Joseph Louis Lagrange, matemático francés, 1736–1813

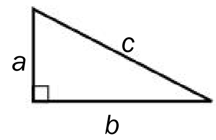
Demostración del teorema de Pitágoras



Podemos ver estas conexiones entre el álgebra y la geometría cuando se usan para abordar el mismo problema.

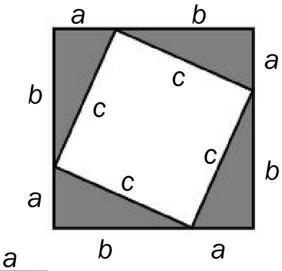
DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA

Dibuje y recorte cuatro triángulos idénticos a este.



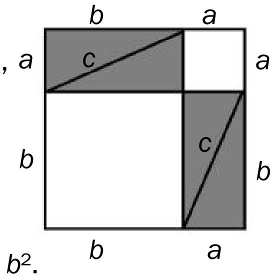
Dispóngalos de manera de formar un cuadrado con lados a + b, como este:

- ¿Cuál es el área del cuadrado del centro?



Reubique los triángulos para formar otro cuadrado, con la misma longitud de lado, como este:

- ¿Qué área tienen los dos cuadrados blancos?



El área del cuadrado central del primer diagrama debe ser igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados del segundo diagrama. Esto es, $c^2 = a^2 + b^2$.

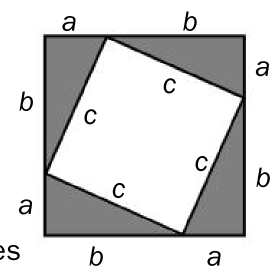
DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA

Use el mismo diagrama, pero ahora observe los triángulos en lugar de los cuadrados.

- Use estos dos métodos para hallar el área del cuadrado grande, con lados $a + b$.

  Método 1. Eleve al cuadrado la longitud de los lados: $(a + b)^2$

  Método 2. Calcule el área de los cuatro triángulos congruentes y súmela a c^2, el área del cuadrado.

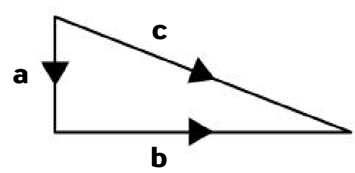


En ambos casos, se obtienen expresiones para el área del cuadrado grande.

Igualando estas expresiones, se obtiene $b^2 + 2ab + a^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

DEMOSTRACIÓN VECTORIAL

Represente los lados del triángulo rectángulo mediante vectores **a**, **b** y **c**.



Dado que forman un triángulo,	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$
Por lo tanto	$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$
Aplicando propiedad distributiva	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0$, porque **a** y **b** son perpendiculares

Por lo tanto	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$
O bien	$a^2 + b^2 = c^2$

- ¿Cuál método de demostración prefiere?
- ¿Cuál fue el más sencillo?
- ¿Cuál fue el más hermoso?

13 Funciones circulares

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

3.2 Definición de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ a partir del círculo de radio unidad; definición de $\tan\theta$ como $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

3.2 Valores exactos de las razones trigonométricas de 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ y sus múltiplos

3.3 Relación fundamental $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

3.3 Identidades del ángulo doble para el seno y el coseno

3.3 Relación entre las razones trigonométricas

3.4 Funciones trigonométricas (circulares) $\operatorname{sen}x$, $\cos x$ y $\tan x$: dominios y recorridos; amplitud; periodicidad; gráficos.

3.4 Funciones compuestas de la forma $f(x) = a\operatorname{sen}(b(x + c)) + d$

3.4 Transformaciones

3.4 Aplicaciones de las funciones trigonométricas

3.5 Resolución de ecuaciones trigonométricas en un intervalo finito, tanto de forma gráfica como analítica

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Hallar los valores exactos de ciertas razones trigonométricas
Por ejemplo: Hallar el valor exacto de $\operatorname{sen}30°$
$\operatorname{sen}30° = 0{,}5$
Por ejemplo: Hallar el valor exacto de $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

2 Trabajar con las funciones gráficas de la calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG)
Por ejemplo: Usar las funciones gráficas de la CPG para hallar las raíces del gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ $\quad x \approx -0{,}732;\ 1;\ 2{,}73$
Por ejemplo: Usar las funciones gráficas de la CPG para resolver la ecuación $4x^2 - 7 = 2\ln x$ $\quad x \approx 0{,}0303;\ 1{,}38$

Comprobemos nuestras habilidades

1 Calcule el valor exacto de:
a $\operatorname{sen}45°$ **b** $\tan 60°$
c $\cos 150°$ **d** $\operatorname{sen}225°$

2 Halle el valor exacto de:
a $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **b** $\tan\frac{3\pi}{4}$
c $\cos\pi$ **d** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$

3 Use las funciones gráficas de la CPG para hallar las raíces del gráfico de cada función:
a $f(x) = 2x^3 - x + 5$ **b** $f(x) = \ln(x^2 - 3)$

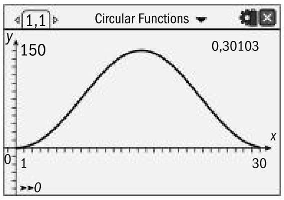
4 Use las funciones gráficas de la CPG para resolver cada ecuación:
a $x^3 - 5x = \sqrt{x+1}$ **b** $x^4 = 3 - x^2$

La rueda giratoria llamada "London Eye", que está situada en la ribera sur del río Támesis, abrió sus puertas al público en el año 2000. Cada una de las 32 cabinas puede transportar hasta 25 personas. Es una importante atracción turística y cada año recibe un promedio de 3,5 millones de visitantes.

La rueda da una vuelta aproximadamente cada 30 minutos. Tiene una altura de 135 metros en su punto más alto. Un pasajero en una de las cabinas viaja alrededor de una circunferencia en una vuelta completa. La altura del pasajero respecto de la plataforma de ascenso se puede modelizar mediante la función

$$a(t) = 67{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{30}(t-15)\right) + 67{,}5;$$

donde *a* es la altura en metros y *t* es el tiempo en minutos después de que un pasajero se sube la cabina. Este es un ejemplo de las funciones circulares que estudiaremos en este capítulo.

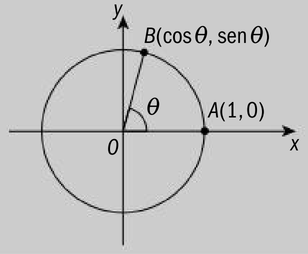


▲ Este es el gráfico de la función que modeliza la altura del pasajero por encima de la plataforma de ascenso.

13.1 Utilización del círculo de radio unidad

En esta sección continuaremos trabajando con el círculo de radio unidad.

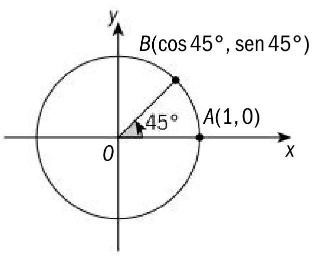
➔ El círculo de radio unidad tiene centro en el origen (0,0) y radio de longitud 1. El lado terminal de cualquier ángulo θ en la posición estándar cortará al círculo en un punto con coordenadas $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

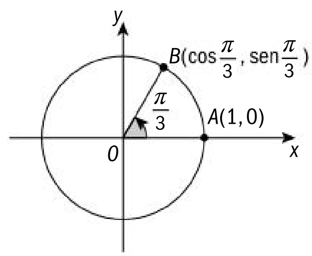


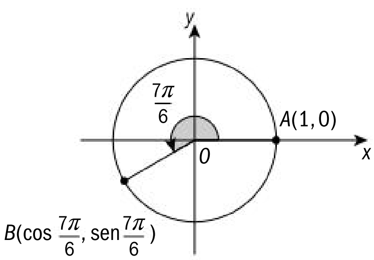
Recordemos que el círculo de radio unidad tiene ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

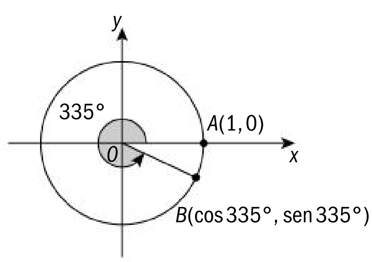
En este diagrama, AÔB (θ) está en la posición estándar. El punto *A* tiene coordenadas (1, 0), y el punto *B* tiene coordenadas $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

A continuación vemos algunos ángulos en la posición estándar en el círculo de radio unidad. Si el ángulo θ se abre en sentido antihorario (desde el eje x positivo), entonces θ es positivo.
Estos ángulos pueden medirse en grados o en radianes.

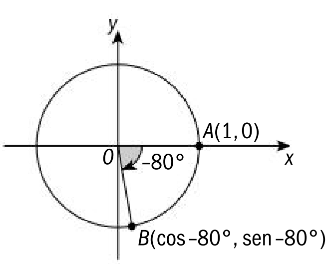


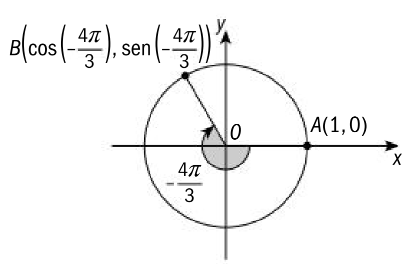




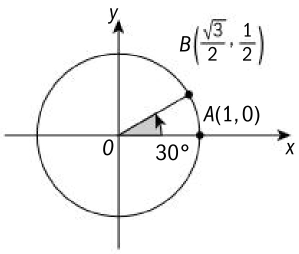


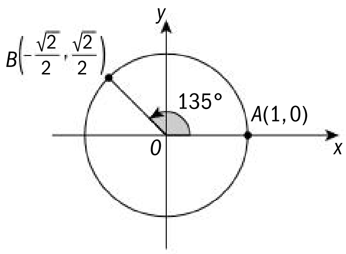
Si el ángulo θ se abre en sentido horario (desde el eje x positivo), entonces θ es negativo.





Si conocemos los valores del seno y el coseno de un ángulo, podemos asignarles valores numéricos a las coordenadas del punto donde el ángulo corta al círculo de radio unidad.





Investigación: seno, coseno y tangente en el círculo de radio unidad

También se puede usar el círculo de radio unidad para facilitar la comprensión de los valores del seno y el coseno de ángulos cuyo lado terminal yace sobre el eje x o el eje y.

Dibuje cada ángulo en la posición estándar en el círculo de radio unidad. Use su bosquejo (no la CPG) para determinar el seno, el coseno y la tangente de cada ángulo.

Ángulos en grados:

1 90° **2** 180° **3** 270°
4 360° **5** −90° **6** −180°

Ángulos en radianes:

7 0 **8** $\frac{\pi}{2}$ **9** π
10 $\frac{3\pi}{2}$ **11** $-\frac{3\pi}{2}$ **12** 4π

En el capítulo 11, utilizamos triángulos rectángulos para hallar los valores exactos del seno, el coseno y la tangente de 30°, 45° y 60°. Ahora ampliaremos lo que hemos aprendido para incluir otros ángulos especiales, en grados y radianes.

Ángulo medido en *grados*, *radianes*	**Seno**	**Coseno**	**Tangente**
0°, 0 radianes	0	1	0
30°, $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°, $\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1}=1$
60°, $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$
90°, $\frac{\pi}{2}$	1	0	no definido

Es importante recordar estos valores ya que se requerirá conocerlos sin usar la CPG.

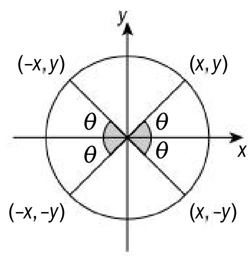
En el capítulo 11, descubrimos que los ángulos suplementarios tienen el mismo valor de seno. También vimos que tienen valores de coseno opuestos.

Por ejemplo, $\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} 150°$ y $\cos 150° = -\cos 30°$.

En esta sección, usaremos el círculo de radio unidad para hallar otros ángulos con valores trigonométricos "relacionados".

Tomemos ángulos en cada cuadrante que formen el mismo ángulo con el eje x. Dado que las coordenadas en el círculo de radio unidad representan los valores del seno y el coseno, podemos comprobar que existe una relación entre los valores del seno y el coseno de los ángulos ubicados en diferentes cuadrantes.

Para los ángulos del segundo cuadrante, el seno es positivo y el coseno es negativo.



Para los ángulos del primer cuadrante, el seno y el coseno son ambos positivos.

Para los ángulos del tercer cuadrante, el seno y el coseno son ambos negativos.

Para los ángulos del cuarto cuadrante, el coseno es positivo y el seno es negativo.

➔ Para cualquier ángulo θ, $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, donde $\cos\theta \neq 0$.

Se deduce que, para ángulos del primer y del tercer cuadrante, la tangente será positiva, y para ángulos del segundo y del cuarto cuadrante, la tangente será negativa.

Ejemplo 1

Halle otros tres ángulos con los mismos valores que:

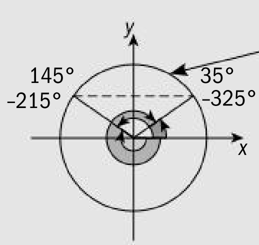
a Seno 35°

b Coseno 35°

c Tangente 35°

Respuesta

a Para hallar ángulos con el mismo seno:



Los ángulos con el mismo valor de seno cortan al círculo de radio unidad en puntos que tienen la misma coordenada y.

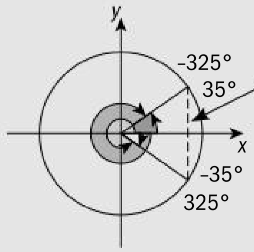
Para hallar ángulos con el mismo seno, se deberá trazar una recta horizontal que atraviese el círculo de radio unidad.

$$\operatorname{sen} 35° = \operatorname{sen} 145° = \operatorname{sen}(-215°) = \operatorname{sen}(-325°)$$

Todos estos ángulos forman un ángulo de 35° con el eje x.

▶ Continúa en la página siguiente.

b Para hallar ángulos con el mismo coseno:



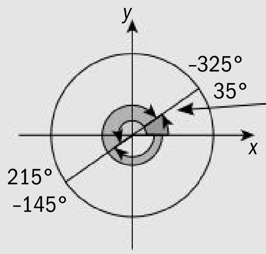
Los ángulos con el mismo valor de coseno cortan al círculo de radio unidad en puntos que tienen la misma coordenada x.

Para hallar ángulos con el mismo coseno, se deberá trazar una recta vertical que atraviese el círculo de radio unidad.

$\cos 35° = \cos 325° = \cos(-35°) = \cos(-325°)$

Todos estos ángulos forman un ángulo de 35° con el eje x.

c Para hallar ángulos con la misma tangente:



Los valores de la tangente son positivos en el primer y el tercer cuadrante.

Para hallar ángulos con la misma tangente, se deberá trazar una recta que pase por el origen del círculo de radio unidad.

$\tan 35° = \tan 215° = \tan(-145°) = \tan(-325°)$

Todos estos ángulos forman un ángulo de 35° con el eje x.

Este último ejemplo ilustra algunas propiedades útiles.

➔ Para cualquier ángulo θ:
$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180° - \theta)$
$\cos\theta = \cos(-\theta)$
$\tan\theta = \tan(180° + \theta)$

Ejercitación 13A

1 Represente cada ángulo en la posición estándar en el círculo de radio unidad.

a 75° **b** 110° **c** 250° **d** 330°
e −100° **f** −270° **g** −180° **h** 40°

2 Represente cada ángulo en la posición estándar en el círculo de radio unidad.

Estos ángulos se miden en radianes.

a $\frac{\pi}{6}$ **b** $\frac{5\pi}{3}$ **c** $\frac{\pi}{2}$ **d** $\frac{11\pi}{6}$

e $-\frac{\pi}{3}$ **f** $-\frac{5\pi}{6}$ **g** -2π **h** 3

3 Halle otros tres ángulos (en grados) que tengan el mismo seno que los ángulos dados.

a 60° **b** 200° **c** −75° **d** 115°

4 Halle otros tres ángulos (en grados) que tengan el mismo coseno que los ángulos dados.

a 35° **b** 130° **c** 295° **d** −240°

5 Halle otros tres ángulos (en grados) que tengan la misma tangente que los ángulos dados.

a $50°$ **b** $100°$ **c** $220°$ **d** $-25°$

6 Halle otros tres ángulos (en radianes) que tengan el mismo seno que los ángulos dados.

a $\frac{\pi}{3}$ **b** $\frac{5\pi}{4}$ **c** 4,1 rad **d** −3 rad

7 Halle otros tres ángulos (en radianes) que tengan el mismo coseno que los ángulos dados.

a $\frac{\pi}{6}$ **b** 1 rad **c** 2,5 rad **d** $-\frac{3\pi}{5}$

8 Halle otros tres ángulos (en radianes) que tengan la misma tangente que los ángulos dados.

a $\frac{\pi}{4}$ **b** 1,3 rad **c** $\frac{5\pi}{7}$ **d** −5 rad

Ejemplo 2

Sabiendo que $\operatorname{sen} 50° = 0{,}766$ (con una aproximación de tres cifras significativas), halle el valor de:

a $\cos 50°$ **b** $\cos 130°$ **c** $\operatorname{sen} 230°$ **d** $\cos(-50°)$

Respuesta

a $\operatorname{sen}^2 50° + \cos^2 50° = 1$

Usar $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, la relación fundamental que hallamos en la sección 11.3

$(0{,}766)^2 + \cos^2 50° = 1$

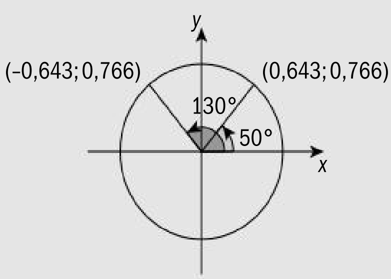
$\cos^2 50° = 1 - (0{,}766)^2$

Reemplazar sen 50° = 0,766, luego resolver, despejando cos θ

$\cos 50° = \sqrt{1-(0{,}766)^2}$

$\cos 50° = 0{,}643$ (3 cs)

b

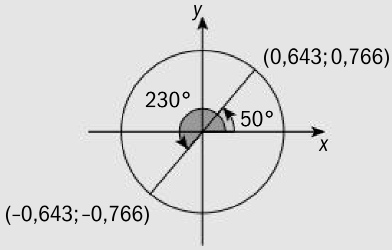


Realizar un bosquejo de los ángulos en el círculo de radio unidad resulta en una buena estrategia. Esto hace que la relación entre los ángulos sea más sencilla de percibir.

$\cos 130° = -0{,}643$ (3 cs)

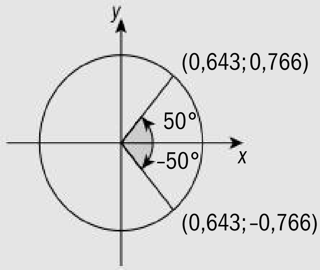
▶ Continúa en la página siguiente.

c



$\operatorname{sen} 230° = -0{,}766$

d



$\cos(-50°) = 0{,}643$

Emplear bosquejos similares como ayuda para responder a los apartados **c** *y* **d**

Todos estos ángulos relacionados forman un ángulo de 50° con el eje *x*.

Ejercitación 13B

1 Sabiendo que $\operatorname{sen} 70° = 0{,}940$ y $\cos 70° = 0{,}342$ (3 cs), halle cada valor.

a $\operatorname{sen} 110°$ **b** $\cos(-70°)$ **c** $\cos 250°$ **d** $\operatorname{sen} 290°$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 Sabiendo que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, halle cada valor.

a $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$ **b** $\cos \frac{5\pi}{6}$ **c** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **d** $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

3 Sabiendo que $\operatorname{sen} A = 0{,}8$ y $\cos A = 0{,}6$, halle cada valor.

a $\operatorname{sen}(180° - A)$ **b** $\cos(-A)$ **c** $\cos(360° - A)$
d $\operatorname{sen}(180° + A)$ **e** $\tan A$ **f** $\tan(-A)$
g $\operatorname{sen}(360° - A)$ **h** $\tan(180° + A)$

4 Sabiendo que $\operatorname{sen}\theta = a$ y $\cos\theta = b$, halle cada valor en función de a y b.

a $\tan\theta$ **b** $\operatorname{sen}(\pi - \theta)$ **c** $\cos(\pi + \theta)$ **d** $\tan(\pi + \theta)$
e $\operatorname{sen}(\pi + \theta)$ **f** $\cos(-\theta)$ **g** $\operatorname{sen}(2\pi - \theta)$ **h** $\cos(\theta - \pi)$

13.2 Resolución de ecuaciones usando el círculo de radio unidad

Supongamos que queremos resolver una ecuación del tipo $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$.

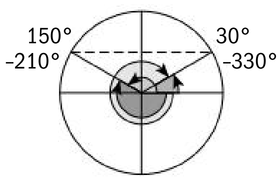
Sabemos que $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, pero también sabemos que

$\operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, y $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, ¿cuál es el valor de x en la ecuación $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$?
En realidad, existen infinitos valores por los que podríamos reemplazar x; por lo tanto, necesitamos más información sobre los valores de x que estamos buscando. Necesitamos saber dos cosas:

- El valor de x, ¿está en grados o en radianes?
- ¿Cuál es el dominio?

Ahora supongamos que queremos resolver la ecuación $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$, para $-360° \leq x \leq 360°$. Hay dos posiciones en el círculo de radio unidad para las cuales $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$, por lo tanto, hallaremos los ángulos en aquellas posiciones que estén dentro del dominio indicado: $-360° \leq x \leq 360°$.

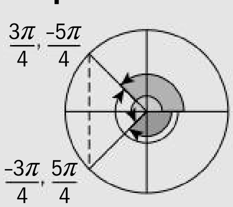


La ecuación tiene cuatro soluciones en el dominio dado.
$x = -330°, -210°, 30°, 150°$

Ejemplo 3

Resuelva la ecuación $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Respuesta



$x = -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

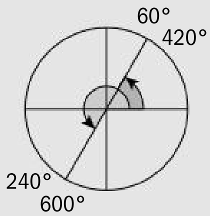
Sabemos que $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Se dibuja una línea vertical para hallar la otra posición en el círculo de radio unidad que tiene el mismo valor del coseno.
Una vez que se han determinado ambas posiciones en el círculo de radio unidad, se hallan todos los ángulos dentro del dominio que tengan sus lados terminales en esas posiciones.

Ejemplo 4

Resuelva la ecuación $\tan x = \sqrt{3}$, $0 \leq x \leq 720°$.

Respuesta



$x = 60°, 240°, 420°, 600°$

$\tan 60° = \sqrt{3}$.
Se dibuja una recta que pase por el origen para hallar la otra posición en el círculo de radio unidad con el mismo valor de tangente. Para hallar los ángulos de 420° y 600° se hace otra rotación alrededor del círculo de radio unidad.

Ejercitación 13C

1 Resuelva cada ecuación para $-360° \leq x \leq 360°$.

a $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **c** $\tan x = 1$

d $\operatorname{sen} x = 0$ **e** $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ **f** $\tan^2 x = \frac{1}{3}$

2 Resuelva cada ecuación para $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

a $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ **b** $\tan\theta = 0$ **c** $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d $\operatorname{sen}\theta = -1$ **e** $2\tan^2\theta = 6$ **f** $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

3 Resuelva cada ecuación para $-180° \leq \theta \leq 720°$.

a $\cos\theta = 1$ **b** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$ **d** $3\tan^2 x - 1 = 8$

4 Resuelva cada ecuación para $-\pi \leq x \leq \pi$.

a $\operatorname{sen} x = 1$ **b** $2\operatorname{sen} x + 3 = 2$

c $10\operatorname{sen}^2 x = 5$ **d** $4\cos^2 x + 2 = 5$

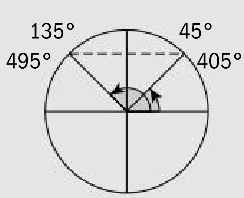
Si bien el número π ya se venía estudiando desde hacía muchos siglos, su símbolo (la letra griega) recién fue introducido por William Jones (galés, 1675–1749) en 1706.

Ejemplo 5

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0° \leq x \leq 360°$.

Respuesta

Si $0° \leq x \leq 360°$, entonces $0° \leq 2x \leq 720°$.



$2x = 45°, 135°, 405°, 495°$
$x = 22{,}5°; 67{,}5°; 202{,}5°; 247{,}5°$

Sabemos que
$\operatorname{sen}45° = \operatorname{sen}135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Para hallar los otros ángulos, se deberá hacer otra rotación alrededor del círculo de radio unidad.

Estos ángulos representan el valor de 2x, no el valor de x.

Ejemplo 6

Resuelva la ecuación $2\text{sen}^2 x + 5\text{sen} x - 3 = 0$, $0 \leq x \leq 2\theta$.

Respuesta	
$2\text{sen}^2 x + 5\text{sen}\, x - 3 = 0$	*Esta es una ecuación cuadrática.*
$(2\text{sen}\, x - 1)(\text{sen}\, x + 3) = 0$	*Resolver por factorización*
$\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ o $\text{sen}\, x = -3$	*El valor del seno no puede ser menor que −1, por lo tanto, podemos desechar sen x = –3.*
$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	

Ejercitación 13D

1 Resuelva cada ecuación para $-180° \leq x \leq 180°$.

a $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b** $6\text{sen}(2x) - 2 = 1$

c $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ **d** $\text{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right) = 3\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$

2 Resuelva cada ecuación para $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

a $\text{sen}(2\theta) = -\frac{1}{2}$ **b** $\tan(3\theta) = 1$

c $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$ **d** $\text{sen}^2\left(\frac{2\theta}{3}\right) = 1$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Resuelva cada ecuación para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$ **b** $2\text{sen}^2 x + 3\text{sen}\, x + 1 = 0$

c $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$ **d** $\text{sen}^2 x = 6\text{sen}\, x - 5$

13.3 Identidades trigonométricas

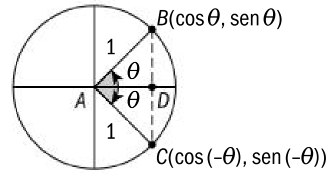
En esta sección, veremos casos especiales de ecuaciones llamadas **identidades**. Ya nos hemos familiarizado con una identidad trigonométrica importante, $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Esta ecuación es una identidad porque es verdadera para **todos** los valores de x.

Otra identidad con la cual estamos familiarizados es $\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, la definición de tangente, que también es verdadera para todos los valores de x.

Identidades del ángulo doble para el coseno

El diagrama muestra los ángulos θ y $-\theta$ dibujados en la posición estándar en el círculo de radio unidad.



La longitud del segmento CD es igual a la longitud del segmento BD, y tenemos $BD = CD = \text{sen}\theta$.

$$BC = BD + CD, \text{ por lo tanto } BC = 2\text{sen}\theta. \qquad [1]$$

Podemos ver que $\angle BAC = 2\theta$. Podemos hallar la longitud del segmento BC usando el teorema del coseno en el ΔABC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos(2\theta)$$

$$BC^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos(2\theta) = 2 - 2\cos(2\theta)$$

$$BC = \sqrt{2 - 2\cos(2\theta)} \qquad [2]$$

Ahora tenemos dos expresiones para BC.

Si igualamos [1] y [2], hallamos que

$$2\text{sen}\theta = \sqrt{2 - 2\cos(2\theta)}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos

$$4\text{sen}^2\theta = 2 - 2\cos(2\theta).$$

Reordenando esta ecuación nos queda $2\cos(2\theta) = 2 - 4\text{sen}^2\theta$.
Finalmente, dividimos por dos para obtener $\cos(2\theta) = 1 - 2\text{sen}^2\theta$.

➔ La ecuación $\cos(2\theta) = 1 - 2\text{sen}^2\theta$ es una **identidad**, ya que resulta verdadera para todos los valores de θ.

Usaremos esta identidad para hallar otras identidades.

Sabemos que $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, por lo tanto $\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.
Sustituyendo, tenemos $\cos(2\theta) = 1 - 2(1 - \cos^2\theta)$.
Reordenando esta ecuación nos da

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1.$$

Podemos sustituir $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ en esta ecuación para obtener $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$, lo cual nos da

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta.$$

Las tres ecuaciones que acabamos de hallar son:

➔ Las **identidades del ángulo doble** para el coseno:

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 1 - 2\text{sen}^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Identidad del ángulo doble para el seno

Ahora hallaremos una identidad del ángulo doble para el seno.

Sabemos que $\text{sen}^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) = 1$, por lo tanto

$$\cos^2(2\theta) = 1 - \text{sen}^2(2\theta). \qquad [1]$$

De la identidad del ángulo doble para el coseno,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\text{sen}^2\theta$$

$$\cos^2(2\theta) = (1 - 2\text{sen}^2\theta)^2 \qquad [2]$$

$$1 - \text{sen}^2(2\theta) = (1 - 2\text{sen}^2\theta)^2$$

Igualar [1] y [2]

$$1 - \text{sen}^2(2\theta) = 1 - 4\text{sen}^2\theta + 4\text{sen}^4\theta$$

$$4\text{sen}^2\theta - 4\text{sen}^4\theta = \text{sen}^2(2\theta)$$

$$4\text{sen}^2\theta(1 - \text{sen}^2\theta) = \text{sen}^2(2\theta)$$

$1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

$$4\text{sen}^2\theta\cos^2\theta = \text{sen}^2(2\theta)$$

Aplicar raíz cuadrada en ambos miembros

$$2\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}(2\theta)$$

➔ La identidad del ángulo doble para el seno es $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}\,\theta\cos\theta$.

Ejemplo 7

Sabiendo que $\text{sen}\,x = \frac{3}{4}$, y $0° < x < 90°$, halle los valores exactos de:

a $\cos x$ **b** $\text{sen}(2x)$
c $\cos(2x)$ **d** $\tan(2x)$

Respuestas

a $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ — *Relación fundamental*

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1$ — *Reemplazar el valor de sen x*

$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ — *Calcular la raíz cuadrada de $\frac{7}{16}$*

Recordemos que si x es un ángulo agudo, el coseno debe ser positivo.

b $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}\,x\cos x$ — *Identidad del ángulo doble*

$\text{sen}(2x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ — *Reemplazar los valores de sen x y cos x*

$\text{sen}(2x) = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

▶ Continúa en la página siguiente.

c $\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x$	*Usar una identidad de ángulo doble*
$\cos(2x) = 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{8}$	*Reemplazar el valor de sen x*
$\cos(2x) = -\frac{1}{8}$	
d $\tan(2x) = \frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}$	*Definición de tangente*
$\tan(2x) = \frac{\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)}{\left(-\frac{1}{8}\right)}$	*Reemplazar los valores de sen (2x) y cos (2x)*
$= \left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)\left(-\frac{8}{1}\right)$	
$\tan(2x) = -3\sqrt{7}$	

Podríamos usar cualquiera de las tres identidades de $\cos(2x)$.

Ejemplo 8

Sabiendo que $\cos\theta = \frac{4}{5}$, y $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, halle los valores exactos de:

a $\text{sen}\theta$ **b** $\cos(2\theta)$

Respuestas	
a $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	*Relación fundamental*
$\text{sen}^2\theta + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$	*Reemplazar el valor de cos θ*
$\text{sen}^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$	
$\text{sen}\theta = -\frac{3}{5}$	*Calcular la raíz cuadrada de* $\frac{9}{25}$
b $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$	*Usar una identidad de ángulo doble*
$\cos(2\theta) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1$	*Reemplazar el valor de cos θ*
$\cos(2\theta) = \frac{7}{25}$	

Recordemos que, si $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, el ángulo estará en el cuarto cuadrante. El coseno es positivo pero el seno es negativo.

Vemos que, en el ejemplo 8, pudimos hallar los valores de sen θ y cos (2θ) sin haber hallado la amplitud del ángulo θ.

Ejercitación 13E

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 Sabiendo que $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{6}$, y $0° < \theta < 90°$, halle el valor exacto de cada uno.

a $\operatorname{sen}(2\theta)$ **b** $\cos(2\theta)$ **c** $\tan(2\theta)$

2 Sabiendo que $\cos x = -\frac{2}{3}$, y $90° < x < 180°$, halle cada valor.

a $\operatorname{sen}(2x)$ **b** $\cos(2x)$ **c** $\tan(2x)$

Deberíamos poder responder todas estas preguntas sin calcular la amplitud del ángulo.

3 Sabiendo que $\cos\theta = \frac{5}{6}$, y $0 < \theta < \pi$, halle cada valor.

a $\tan\theta$ **b** $\operatorname{sen}(2\theta)$ **c** $\cos(2\theta)$ **d** $\tan(2\theta)$

4 Sabiendo que $\operatorname{sen}x = -\frac{1}{8}$, y $180° < x < 270°$, halle cada valor.

a $\operatorname{sen}(2x)$ **b** $\cos(2x)$ **c** $\tan(2x)$ **d** $\operatorname{sen}(4x)$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 Sabiendo que $\tan\theta = \frac{3}{4}$, y $0 < \theta < \pi$, halle cada valor.

a $\operatorname{sen}\theta$ **b** $\cos\theta$ **c** $\operatorname{sen}(2\theta)$ **d** $\cos(2\theta)$

6 Sabiendo que $\operatorname{sen}(2x) = \frac{24}{25}$, y $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, halle cada valor.

a $\cos(2x)$ **b** $\tan(2x)$ **c** $\operatorname{sen}(4x)$ **d** $\cos(4x)$

7 Sabiendo que $\tan x = \frac{a}{b}$, y $0° < x < 90°$, halle cada valor en función de a y b.

a $\operatorname{sen}x$ **b** $\cos x$ **c** $\operatorname{sen}(2x)$ **d** $\cos(2x)$

También se pueden usar identidades para trabajar con ecuaciones.

Ejemplo 9

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}x$ para $0° \leq x \leq 360°$.
No use la CPG.

Respuesta

$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}x$	
$2(\operatorname{sen}x)(\cos x) = \operatorname{sen}x$	*Usar una identidad de ángulo doble*
$2(\operatorname{sen}x)(\cos x) - \operatorname{sen}x = 0$	*Reordenar*
$(\operatorname{sen}x)(2\cos x - 1) = 0$	*Factorizar*
$\operatorname{sen}x = 0$ o $2\cos x - 1 = 0$	
Si $\operatorname{sen}x = 0$, entonces $x = 0°, 180°, 360°$.	
Si $2\cos x - 1 = 0$, entonces $\cos x = \frac{1}{2}$,	
Por lo tanto, $x = 60°, 300°$.	
$x = 0°, 60°, 180°, 300°, 360°$	

Existen más identidades trigonométricas. ¿Cuáles son?¿Qué identidades se usan en otras ramas de las matemáticas?

Ejemplo 10

Demuestre que $(1 + \tan^2 x)\cos(2x) = 1 - \tan^2 x$.	
Respuesta $(1 + \tan^2 x) \times \cos(2x) = 1 - \tan^2 x$	
$\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)\left(2\cos^2 x-1\right)=1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$	*Volver a escribir usando sen x y cos x*
$2\cos^2 x-1+2\operatorname{sen}^2 x-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$	*Aplicar propiedad distributiva en el miembro izquierdo*
$2\cos^2 x+2\operatorname{sen}^2 x = 2$	*Simplificar*
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	*Dividir por 2*

En el ejemplo 10, llegamos a una identidad conocida, que es válida para todo x. Por lo tanto, la ecuación original también es una identidad, aunque no es una de las que es necesario recordar.

Al mostrar la validez de las ecuaciones usando este método estamos haciendo lo que se denomina "demostrar identidades".

Ejercitación 13F

1 Resuelva cada ecuación para $0° \le x \le 180°$.

a $\operatorname{sen}(2x) = \cos x$ **b** $\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x)$

c $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 0$ **d** $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

2 Resuelva cada ecuación para $-180° \le \theta \le 180°$.

a $2\operatorname{sen} x\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b** $\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x) = \cos^2 x$

c $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \operatorname{sen}^2 x$ **d** $\cos(2x) = \operatorname{sen} x$

3 Resuelva cada ecuación para $0 \le x \le \pi$.

a $\tan x = \operatorname{sen} x$ **b** $2\cos^2 x - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c $\cos(2x) = \cos x$ **d** $\operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen}(2x)$

4 Resuelva cada ecuación para $0 \le \theta \le \pi$.

a $(\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x))^2 = 2$ **b** $\operatorname{sen} x - 1 = \cos^2 x$

c $\cos^2 x = \cos(2x)$ **d** $2\operatorname{sen}^2 x = 1$

5 Demuestre cada identidad.

a $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen}(2x)$ **b** $\dfrac{1}{\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta\tan\theta + \cos\theta$

c $\dfrac{1-\cos^2(2x)}{2\operatorname{sen} x\cos x} = 2\operatorname{sen} x\cos x$ **d** $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

e $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos(2x)$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

6 La expresión $2\text{sen}\,3x\cos 3x$ puede escribirse en la forma $\text{sen}\,kx$. Halle el valor de k.

7 La expresión $\cos 4x$ puede escribirse en la forma $1 - b\,\text{sen}^2 x\cos^2 x$. Halle el valor de b.

13.4 Representación gráfica de funciones circulares

En secciones anteriores, usamos el círculo de radio unidad para hallar las relaciones entre los diferentes ángulos y los valores de su seno, coseno y tangente. En esta sección, exploraremos el modo en que estos valores pueden usarse para entender las funciones trigonométricas $y = \text{sen}\,x$, $y = \cos x$ e $y = \tan x$. También obtendremos los gráficos de estas funciones con la CPG, para resolver ecuaciones.

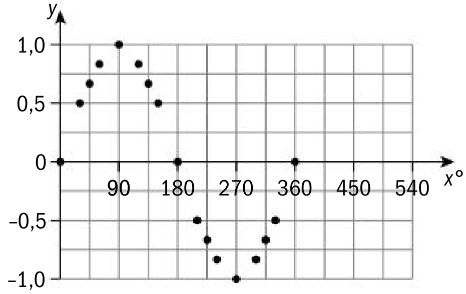
Las funciones seno y coseno

A esta altura, ya conocemos los valores exactos del seno para muchos ángulos, tal como se observa en la siguiente tabla:

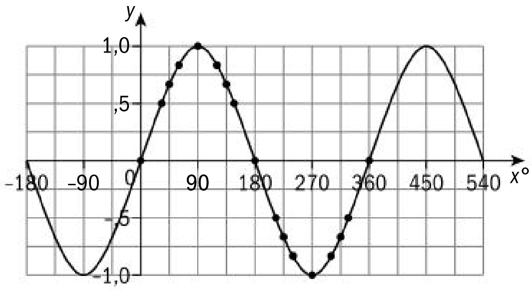
Amplitud de ángulos (x) *Grados, radianes*	Valor del seno ($\text{sen}\,x$)
0°, 0 radianes	0
$30°, \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$45°, \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$60°, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$90°, \frac{\pi}{2}$	1
$120°, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$135°, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$150°, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$180°, \pi$	0

Amplitud de ángulos (x) *Grados, radianes*	Valor del seno ($\text{sen}\,x$)
$210°, \frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$225°, \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$240°, \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$270°, \frac{3\pi}{2}$	-1
$300°, \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$315°, \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$330°, \frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$360°, 2\pi$	0

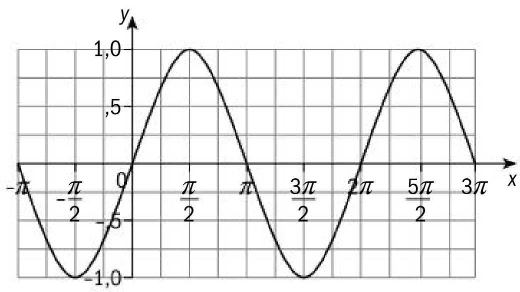
Si consideramos $y = \operatorname{sen} x$, podemos situar estos valores como coordenadas en un gráfico.



▼ Al representar la función $y = \operatorname{sen} x$ en este mismo sistema de ejes, observamos esto:



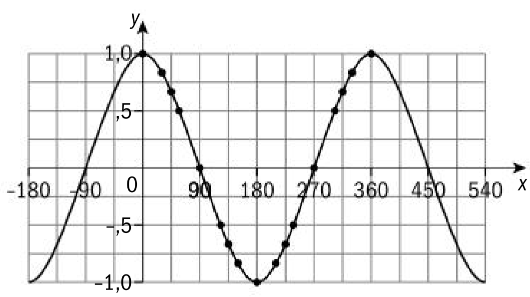
▼ Si el ángulo x se mide en radianes, el gráfico tiene la misma forma.



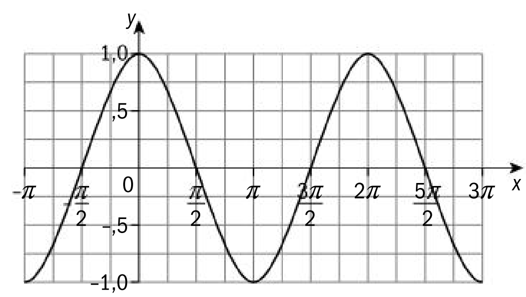
Podemos observar que el gráfico de la función $y = \operatorname{sen} x$ genera los mismos valores del seno que hallamos utilizando el círculo de radio unidad.

De manera similar, si consideramos $y = \cos x$, podemos situar los valores del coseno que conocemos en el gráfico de la función $y = \cos x$.

▼ $y = \cos x$, con x medido en grados:

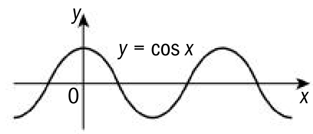


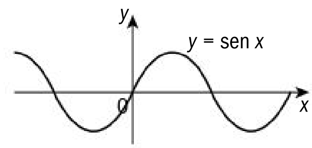
▼ $y = \cos x$, con x medido en radianes:



➔ Si comparamos las funciones seno y coseno, podemos observar algunas similitudes.

- Las curvas tienen igual tamaño y forma, solo difieren en las posiciones horizontales en el eje. La curva del seno pasa por el origen, (0,0), y la del coseno pasa por el punto (0,1).
- Las funciones son **periódicas**, lo que significa que repiten el mismo ciclo de valores una y otra vez. El **período**, o longitud de un ciclo, es 360° o 2π. Esto significa que si observamos dos puntos cuyas coordenadas x difieren en 360° (o 2π), las coordenadas y de esos puntos serán iguales.
- Ambas funciones tienen su valor máximo en 1 y su valor mínimo en −1.Cada una de estas funciones tiene una **amplitud** de 1. La amplitud es la diferencia entre el eje horizontal de la onda ($y = 0$, en este caso) y el valor máximo o mínimo ($y = 1$ o $y = -1$, en este caso). También podemos decir que la amplitud es la mitad de la distancia vertical entre un máximo y un mínimo.

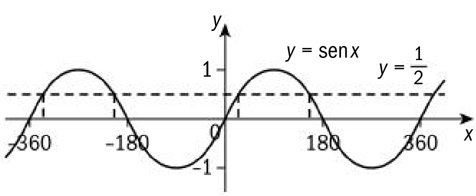




Podemos usar los gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ para resolver ecuaciones, así como usamos el círculo de radio unidad previamente en este capítulo para resolver ecuaciones.

Considere la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, $-360° \leq x \leq 360°$.

Si trazamos la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$ en el mismo sistema de ejes que $y = \operatorname{sen} x$, podemos ver que hay cuatro puntos donde $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.



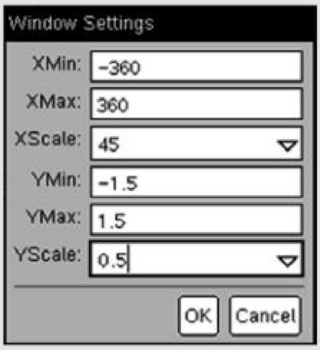
Estos puntos corresponden a los valores siguientes:

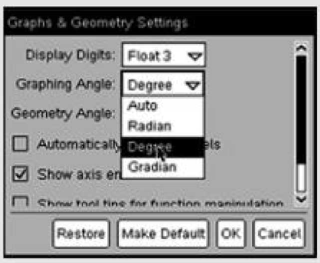
$x = -330°, -210°, 30°, 150°$

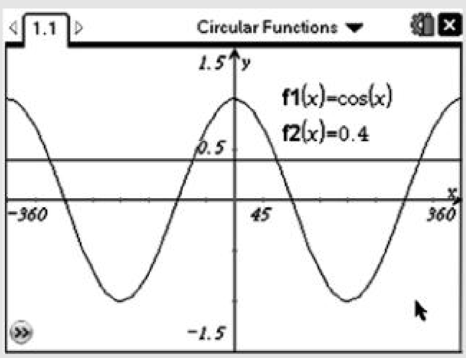
Ejemplo 11

Resuelva la ecuación $\cos\theta = 0{,}4$; $-360° \leq \theta \leq 360°$.
Dé sus respuestas a la décima más próxima.

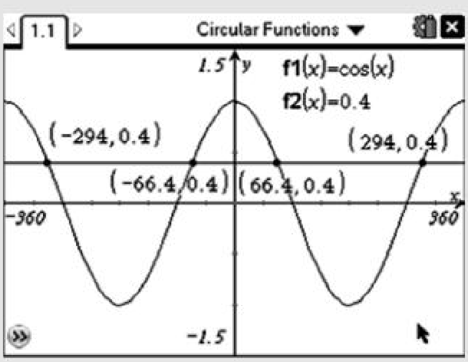
Respuesta







Ingresar $y = \cos x$ e $y = 0{,}4$, en la CPG y configurar una ventana apropiada para observar el gráfico. Debemos asegurarnos de que la CPG se encuentre en el modo GRADOS.



Existen cuatro puntos de intersección en este dominio, por lo tanto la ecuación tendrá cuatro soluciones. Usar ***6: Analyze Graph*** *(analizar gráfico) |* ***4: Intersection*** *(intersección) para hallar estos puntos de intersección.*

$\theta = -293{,}6°; -66{,}4°; 66{,}4°; 293{,}6°$

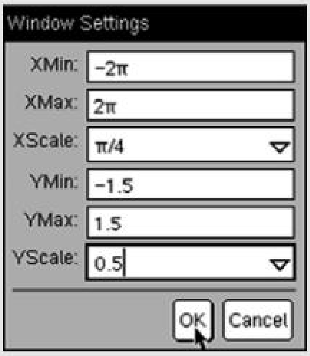
La CPG puede resultar útil para resolver ecuaciones que tengan las funciones seno y coseno.

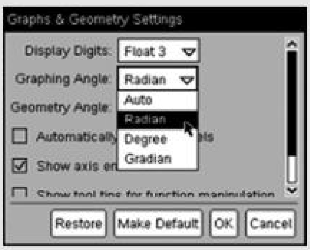
Para cambiar al **modo grados**, presionar y seleccionar **5: Settings & Status** (configuraciones y estado) | **2: Settings** (configuraciones) | **2: Graphs and Geometry** (gráficos y geometría). Utilizar la tecla para desplazarse a “Graphing Angle” (ángulo para graficar) y seleccionar **Degree** (grado). Presionar y luego seleccionar **4: Current** (actual) para volver al documento.

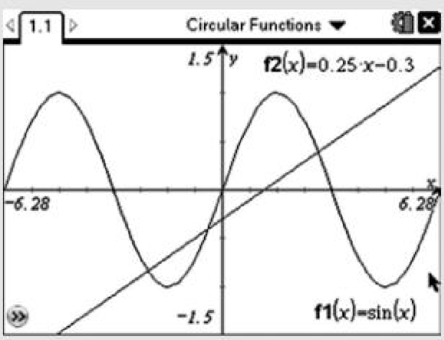
Ejemplo 12

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} x = 0{,}25x - 0{,}3$; $-2\pi \le x \le 2\pi$.
Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.

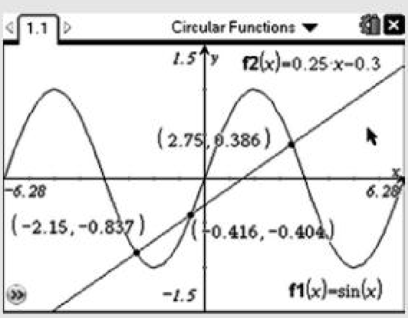
Respuesta







Ingresar $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 0{,}25x - 0{,}3$ en la CPG y configurar una ventana apropiada para observar el gráfico. Deberemos asegurarnos de que la CPG se encuentre en el modo RADIANES.



Existen cuatro puntos de intersección en este dominio, por lo tanto la ecuación tendrá cuatro soluciones. Usar **6: Analyze Graph** *(analizar gráfico) |* **4: Intersection** *(intersección) para hallar estos puntos de intersección.*

$x = -2{,}15;\ -0{,}416;\ 2{,}75$

Las medidas de los ángulos están en radianes.

Para cambiar a **modo radianes**, presionar [On] y seleccionar **5: Settings & Status** (configuraciones y estado) | **2: Settings** (configuraciones) | **2: Graphs and Geometry** (gráficos y geometría). Utilizar la tecla [tab] para desplazarse a “Graphing Angle” (ángulo para graficar) y seleccionar **Radian** (radián). Presionar [Enter] y luego seleccionar **4: Current** (actual) para volver al documento.

Ejercitación 13G

Resuelva las ecuaciones de las preguntas 1 a 4 utilizando la CPG. Dé sus respuestas al grado más próximo.

1 $\operatorname{sen} x = \frac{1}{4}, -360° \le x \le 360°$

2 $\cos\theta = \sqrt{0{,}8}; -180° \le \theta \le 360°$

3 $\operatorname{sen}\theta = -0{,}9; 0° \le \theta \le 360°$

4 $\operatorname{sen} x = \cos(x - 20), 0° \le x \le 540°$

Resuelva las ecuaciones de las preguntas 5 a 8 utilizando la CPG. Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.

5 $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, -2\pi \le x \le 2\pi$

6 $\cos\theta = -\frac{1}{e^2}, -\pi \le x \le 2\pi$

7 $\cos x = -x, -\pi \le x \le 2\pi$

8 $\operatorname{sen} x = x^2 - 1, -2\pi \le x \le 2\pi$

Función tangente

Investigación: representación gráfica de tan *x*

Para las funciones seno y coseno, comenzamos con valores para sen x y cos x que ya conocíamos.

Ahora, intente un método similar para la función $y = \tan x$.

1 Enumere los valores de la tangente de los ángulos: 0°, ±30°, ±45°, ±60°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330°, 360°.

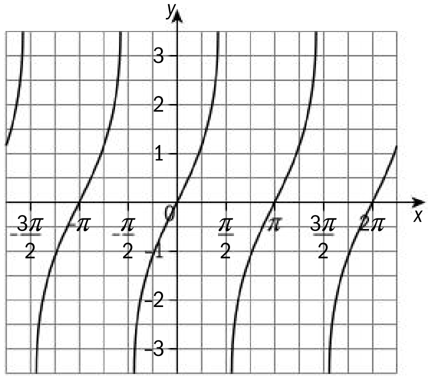
2 En un papel cuadriculado, sitúe estos valores como puntos. Haga que el eje x represente el ángulo (medido en grados) y que el eje y represente el valor de tan x.

3 ¿Por qué no hay valores para la tangente de los ángulos ±90° o 270°? ¿Qué característica presentan a veces los gráficos de las funciones para los valores que no existen?

4 Una los puntos en su papel cuadriculado para dibujar aproximadamente el gráfico de $y = \tan x$.

5 Obtenga el gráfico de la función $y = \tan x$ en la CPG, y compárela con su gráfico aproximado. ¿Resultan similares ambos gráficos?

Si se hubieran usado radianes en lugar de grados, el gráfico de la función tangente se vería así:



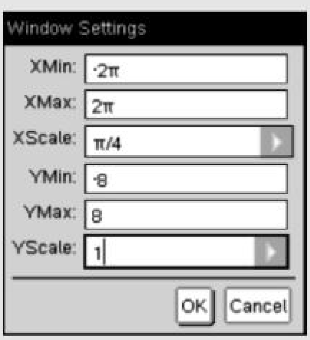
➔ Al igual que las funciones seno y coseno, la función tangente es **periódica**. Existen asíntotas verticales en los valores de x donde la función no existe. El mismo ciclo de valores se repite entre cada par de asíntotas verticales.

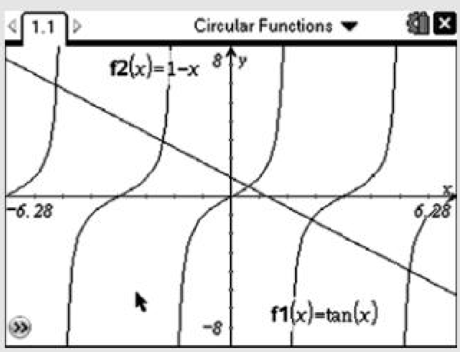
El período de la función tangente es 180° (o π radianes). A diferencia de las funciones seno y coseno, la función tangente no posee amplitud. No tiene valores mínimos ni máximos.

Ejemplo 13

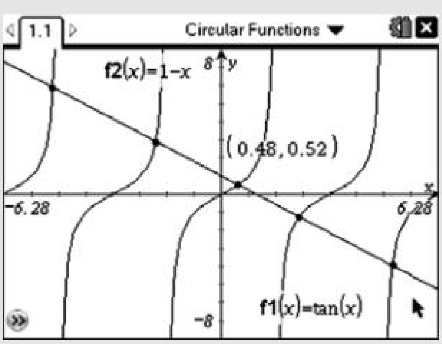
Resuelva la ecuación $\tan\theta = 1 - x$, $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.
Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.

Respuesta





Hay que asegurarse de que la CPG esté en modo RADIANES.



Hay cinco puntos de intersección en este dominio, por lo tanto la ecuación tendrá cinco soluciones.

$\theta = -4{,}88; -1{,}90; 0{,}480; 2{,}25; 4{,}96$

Ejercitación 13H

Resuelva las ecuaciones de las preguntas 1 a 4 utilizando la CPG.
Dé sus respuestas al grado más próximo.

1 $\tan x = 2,\ -360° \leq x \leq 360°$

2 $\tan\theta = \sqrt{11},\ -180° \leq \theta \leq 360°$

3 $\tan\theta = -1{,}5,\ 0° \leq \theta \leq 360°$

4 $\tan x = \cos x,\ 0° \leq x \leq 720°$

Resuelva las ecuaciones de las preguntas 5 a 8 utilizando la CPG.
Dé sus respuestas con una aproximación de tres cifras significativas.

5 $\tan\theta = \frac{3}{7},\ -2\pi \leq x \leq 2\pi$

6 $\tan\theta = \pi,\ -\pi \leq \theta \leq \pi$

7 $\tan x = 2x - 3,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

8 $\tan x = 4 - x^2,\ -2\pi \leq x \leq 2\pi$

13.5 Traslaciones y estiramientos de las funciones trigonométricas

Investigación: transformaciones de sen x y cos x

Usando la CPG en modo radianes, obtenga el gráfico de las funciones $y = \cos x$ e $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ en el mismo sistema de ejes.

¿Qué nota respecto de los gráficos de estas dos funciones?

¿Qué tienen en común?

Describa en qué se diferencian los gráficos e intente explicar por qué sucede esto.

Después, repita este procedimiento para cada uno de los siguientes pares de funciones.

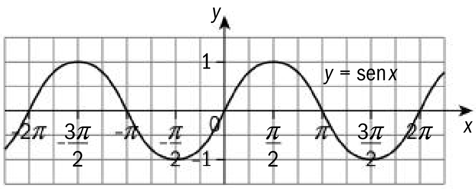
1 $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} x + 3$
2 $y = \cos x$ e $y = 2\cos x$
3 $y = \cos x$ e $y = \cos(2x)$
4 $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

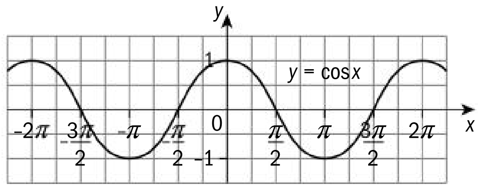
5 $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

En la última sección, vimos las funciones trigonométricas básicas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \tan x$. Ahora estudiaremos las transformaciones de estas funciones.

Comencemos observando los gráficos de las funciones seno y coseno, y refrescando el vocabulario referido a estas funciones.

Se requiere conocer muy bien las características de las curvas básicas de seno y coseno.





Estas funciones tienen un **período** de 2π (o 360°, si representamos estas funciones en grados en lugar de radianes).

Estas funciones tienen una **amplitud** de 1.

Podemos aplicar transformaciones a los gráficos de estas funciones, como ya lo hemos hecho anteriormente con otras funciones (véase el capítulo 1).

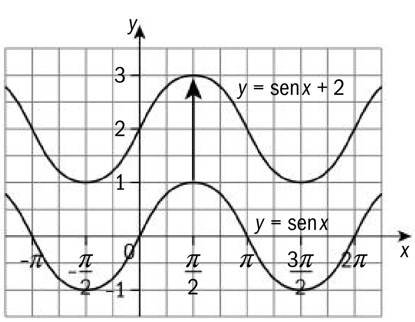
Traslaciones

➔ La función $y = \operatorname{sen} x + d$ es una **traslación vertical** de la curva estándar del seno. La curva se desplaza verticalmente hacia arriba si d es positivo, hacia abajo si d es negativo.
La función $y = \operatorname{sen}(x - c)$ es una **traslación horizontal** de la curva estándar de la función seno. La curva se desplaza horizontalmente hacia la derecha si c es positivo, a la izquierda si c es negativo.

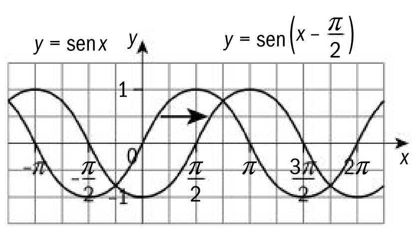
Una traslación horizontal se conoce también como desplazamiento de fase.

Es importante notar que una traslación no cambia ni el período ni la amplitud de una función trigonométrica.

▼ Este gráfico muestra una traslación vertical. La curva del seno ha sido desplazada 2 unidades hacia arriba. La flecha muestra la dirección de la traslación.



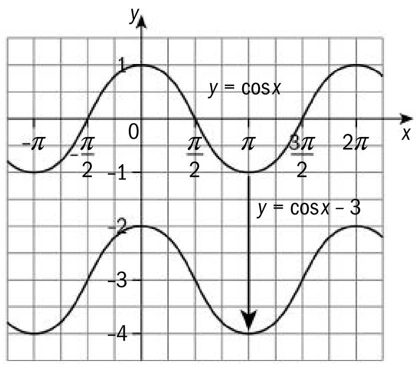
▼ Este gráfico muestra una traslación horizontal. La curva del seno ha sido desplazada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha. La flecha muestra la dirección de la traslación.



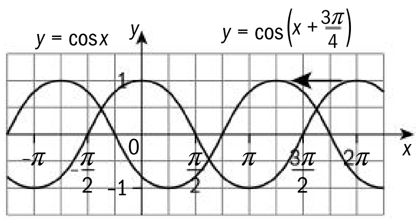
➔ La función $y = \cos x + d$ es una **traslación vertical** de la curva estándar del coseno. La curva se desplaza verticalmente hacia arriba si d es positivo, hacia abajo si d es negativo.
La función $y = \cos(x - c)$ es una **traslación horizontal** de la curva estándar del coseno. La curva se desplaza hacia la derecha si c es positivo, hacia la izquierda si c es negativo.

Tal como ocurre con la curva del seno, una traslación no cambia ni el período ni la amplitud de la función coseno.

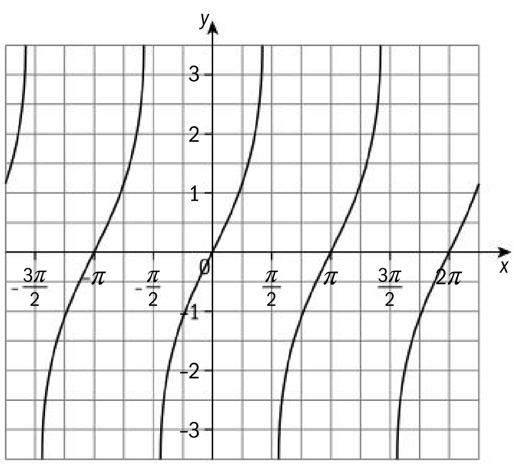
▼ Este gráfico muestra una traslación vertical. La curva del coseno ha sido desplazada 3 unidades hacia abajo. La flecha muestra la dirección de la traslación.



▼ Este gráfico muestra una traslación horizontal. La curva del coseno ha sido desplazada $\frac{3\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda. La flecha muestra la dirección de la traslación.



Ahora vamos a examinar el gráfico de la función tangente.



Recordemos que esta función tiene un período de π (o 180°). No tiene amplitud, porque no hay puntos máximos ni mínimos.

Existen asíntotas verticales en $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$, etc.

(o en $x = \pm 90°$, $x = \pm 270°$, etc.).

Tal como ocurre con las funciones seno y coseno, las traslaciones verticales y horizontales no cambian el período de la función tangente.

Podemos combinar traslaciones verticales y horizontales, si consideramos funciones de la forma $y = \operatorname{sen}(x - c) + d$, $y = \cos(x - c) + d$, e $y = \tan(x - c) + d$.

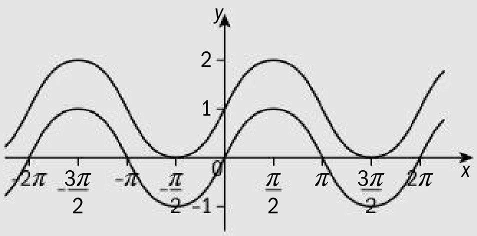
Ejemplo 14

Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = \operatorname{sen} x$.
En el mismo sistema de ejes, dibuje aproximadamente el gráfico de:

a $y = \operatorname{sen} x + 1$ **b** $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ **c** $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$

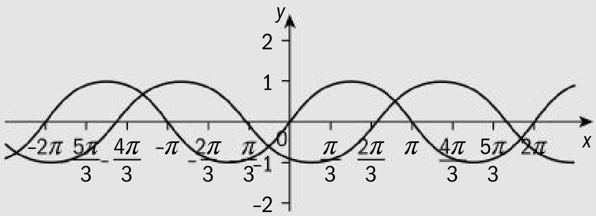
Respuestas

a $y = \operatorname{sen} x + 1$



La curva básica del seno pasa por el origen, la función trasladada pasa por el punto (0,1). Esto es un desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba.

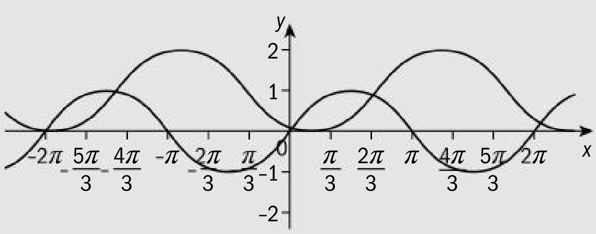
b $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$



La curva básica del seno pasa por el origen, la función trasladada pasa por el punto $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$.

Esto es un desplazamiento horizontal de $\frac{2\pi}{3}$ *unidades a la derecha.*

c $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$

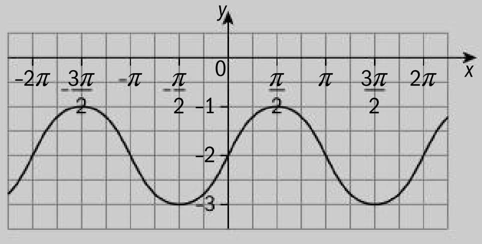


Esto es una combinación de las traslaciones de los apartados a y b. La curva básica del seno (que pasa por el origen) ha sido desplazada $\frac{2\pi}{3}$ *unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba.*

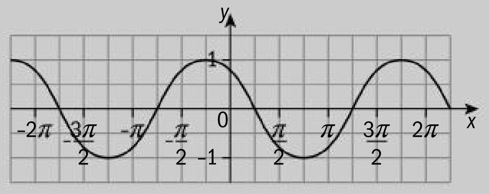
Ejemplo 15

Escriba una fórmula para cada función, tal como se indica.

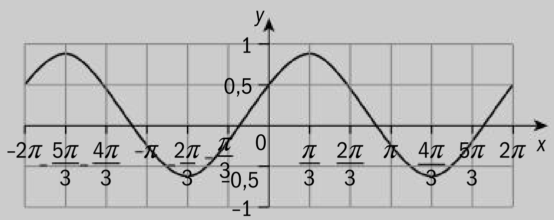
a Escriba una fórmula que contenga la función seno.



b Escriba una fórmula que contenga la función coseno.



c Escriba una fórmula que contenga la función seno y otra que contenga la función coseno.



Respuestas

a $y = \operatorname{sen} x - 2$

Se puede ver que esta es una curva del seno con un valor máximo de −1 y un valor mínimo de –3. Ha sido desplazada 2 unidades hacia abajo.

b $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Se observa que esta es una curva del coseno que ha sido desplazada $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda.

c $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 0{,}5$

o

$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 0{,}5$

Se puede apreciar que esta es una curva del coseno que ha sido desplazada $\frac{\pi}{3}$ unidades hacia la derecha, y 0,5 unidades hacia arriba.

También se la puede ver como una curva del seno que ha sido desplazada $\frac{\pi}{6}$ unidades hacia la izquierda, y 0,5 unidades hacia arriba.

Debido a que las formas del seno y coseno son tan similares, pueden existir muchas fórmulas correctas para el gráfico de una función seno o una función coseno.

Ejercitación 13I

Dibuje aproximadamente el gráfico de cada una de las funciones dadas en las preguntas 1 a 8, para $-2\pi \le x \le 2\pi$.

1 $y = \operatorname{sen} x - 5$

2 $y = \cos x + 2$

3 $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

4 $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

5 $y = \cos(x - \pi)$

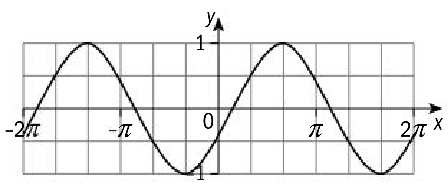
6 $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2$

7 $y = \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) - 1{,}5$

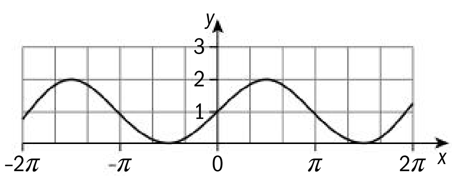
8 $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 4$

Escriba una ecuación para cada una de las funciones que se representan en las preguntas 9 a 12.

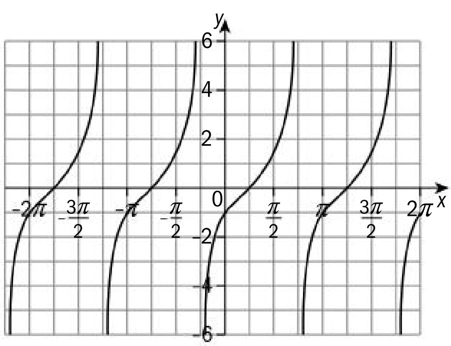
9



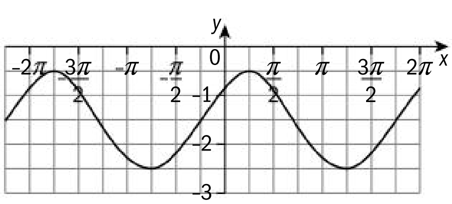
10



11



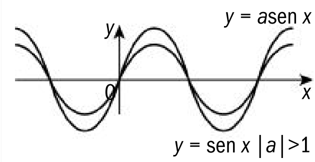
12

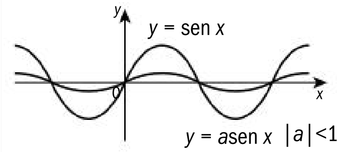


Estiramientos verticales

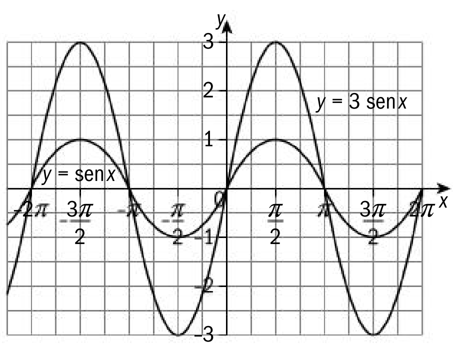
➔ Las funciones $y = a\text{sen}\,x$ e $y = a\cos x$ son **estiramientos verticales** de las funciones seno y coseno. Cuando al gráfico de una función se le aplica un estiramiento vertical, cada coordenada y de la función original se multiplica por el valor de a.
Si $|a| > 1$, la función parecerá apartarse del eje x.

Si $0 < |a| < 1$, la función parecerá comprimirse sobre el eje x.
Si a es negativo, el estiramiento también producirá una simetría respecto del eje x.
Con un estiramiento vertical, la **amplitud** de la función seno y coseno cambian de 1 a $|a|$. El período de la función no cambiará.

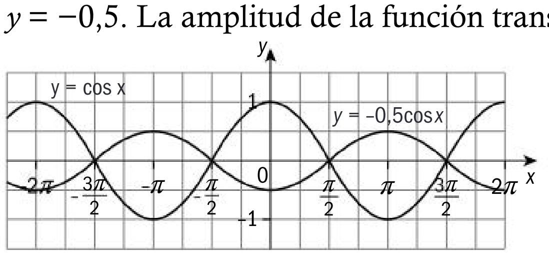




En el siguiente gráfico, la curva del seno ha sido estirada verticalmente por un factor de 3. Los valores máximos están en $y = 3$, y los valores mínimos están en $y = -3$. La amplitud de la función transformada es 3.



El siguiente gráfico muestra un estiramiento vertical que incluye una simetría respecto del eje x. Todos los valores de las coordenadas y de la curva estándar del coseno se multiplicaron por $-0{,}5$. Los valores máximos están en $y = 0{,}5$, los valores mínimos están en $y = -0{,}5$. La amplitud de la función transformada es 0,5.

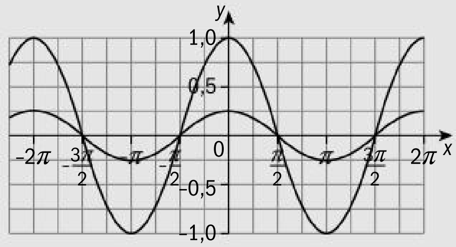


Ejemplo 16

Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = \cos x$.
En el mismo sistema de ejes, dibuje aproximadamente el gráfico de:
a $y = 0{,}25\cos x$ **b** $y = -2\cos x$

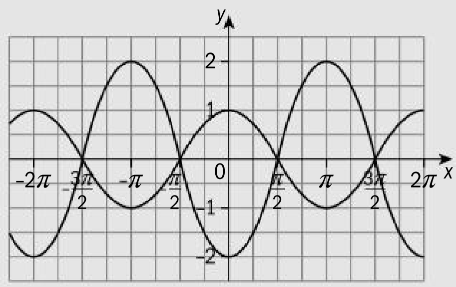
Respuestas

a $y = 0{,}25\cos x$



La curva básica del coseno pasa por el punto (0,1), la función transformada pasa por el punto (0; 0,25). Esto es un estiramiento vertical de factor de estiramiento 0,25.

b $y = -2\cos x$



La curva básica del coseno pasa por el punto (0,1), la función transformada pasa por el punto (0, −2). Cada coordenada y de la función original se ha multiplicado por −2 para obtener la función transformada.

Estiramientos horizontales

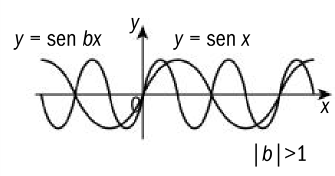
➔ Las funciones $y = \text{sen}(bx)$, $y = \cos(bx)$ e $y = \tan(bx)$ representan **estiramientos horizontales** de las funciones seno, coseno y tangente. Cuando al gráfico de una función se le aplica un estiramiento horizontal, cada coordenada x de la función original se multiplica por $\frac{1}{b}$.

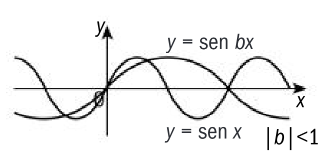
Podríamos decir también que se divide por b cada coordenada x de la función original.

Multiplicar (o dividir) de esta forma las coordenadas x por un número modifica el **período** de una función trigonométrica.

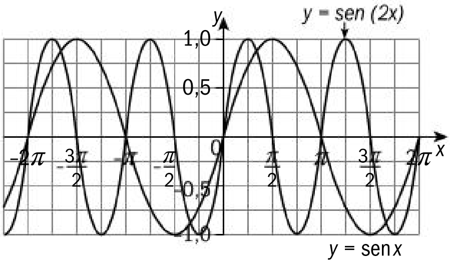
- Si $|b| > 1$, el período será más corto, y la función parecerá comprimirse hacia el eje y.
- Si $0 < |b| < 1$, el período será más largo y la función parecerá apartarse del eje y.
- Si b es negativo, el estiramiento también producirá una simetría respecto del eje y.

Cuando a una función seno o coseno se le aplica un estiramiento horizontal, el período de la función cambiará de 2π a $\frac{2\pi}{|b|}$, o de 360° a $\frac{360°}{|b|}$.

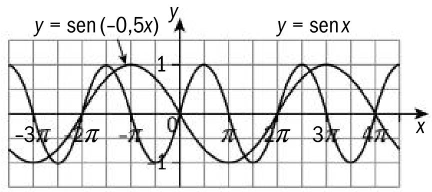




▼ En este gráfico, la curva del seno transformada tiene un período de π.

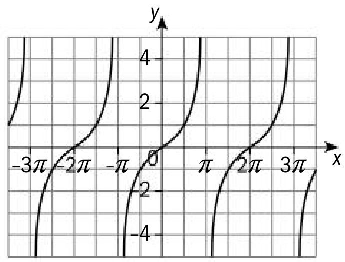


▼ En este gráfico, la curva del seno transformada tiene un período de 4π. El estiramiento ha producido, además, una simetría respecto del eje y.



➔ Para una función de la forma $y = \tan(bx)$, el período cambiará de π a $\frac{\pi}{|b|}$, o de $180°$ a $\frac{180°}{|b|}$.

El gráfico de la derecha muestra la función $y = \tan(0{,}5x)$.
El período de la función es 2π.



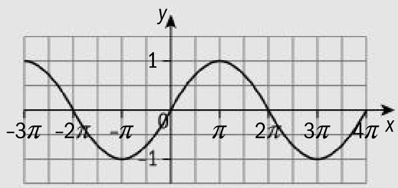
Ejemplo 17

Dibuje aproximadamente el gráfico de:

a $y = \operatorname{sen}(0{,}5x)$ **b** $y = \tan(2x)$ **c** $y = 2\cos(3x)$

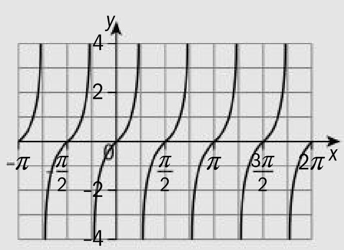
Respuestas

a $y = \operatorname{sen}(0{,}5x)$



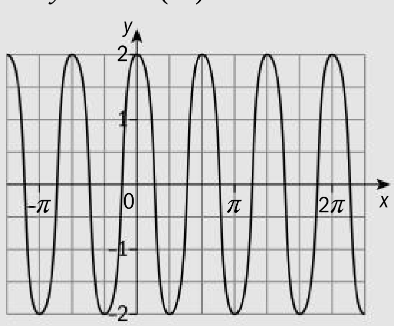
El período de esta función es $\frac{2\pi}{0{,}5}$, o 4π.

b $y = \tan(2x)$



El período de esta función es $\frac{\pi}{2}$.

c $y = 2\cos(3x)$



El período de esta función es $\frac{2\pi}{3}$. La amplitud es 2.

Ejercitación 13J

Dibuje aproximadamente el gráfico de las funciones dadas en las preguntas 1 a 8, para $-2\pi \le x \le 2\pi$.

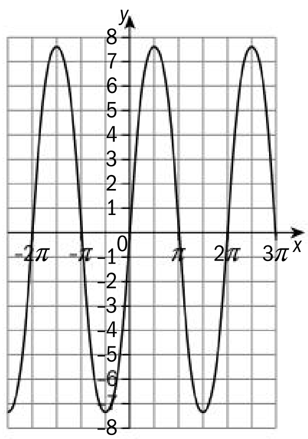
1 $y = 0{,}5\,\operatorname{sen} x$ **2** $y = -4\cos x$ **3** $y = \tan\left(\frac{2}{3}x\right)$

4 $y = \operatorname{sen}(-2x)$ **5** $y = 2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$ **6** $y = 3\operatorname{sen}(3x)$

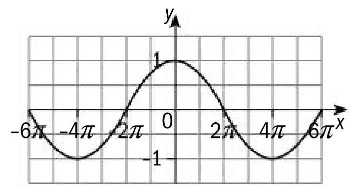
7 $y = -2{,}5\operatorname{sen}(0{,}5x)$ **8** $y = -\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

Escriba una ecuación para cada una de las funciones representadas en las preguntas 9 a 12.

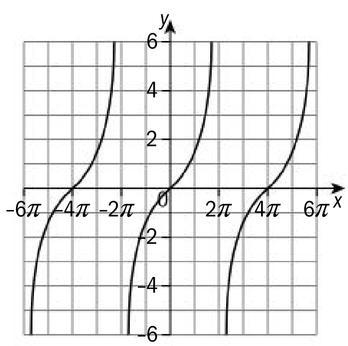
9



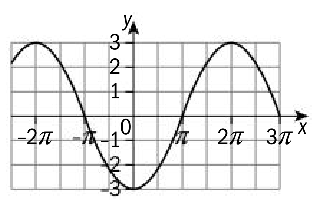
10



11



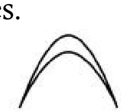
12



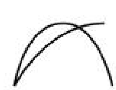
13.6 Combinación de transformaciones con las funciones seno y coseno

En esta sección, examinaremos funciones de la forma $y = a\operatorname{sen}(b(x - c)) + d$ e $y = a\cos(b(x - c)) + d$.

Para las funciones de este tipo, pueden ocurrir cuatro transformaciones.

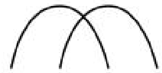


- a representa un estiramiento vertical. La amplitud de la función seno o coseno será igual a $|a|$.

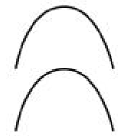


- b representa un estiramiento horizontal, que afecta al período de la función. El período de la función seno o coseno será igual a $\frac{2\pi}{|b|}$.

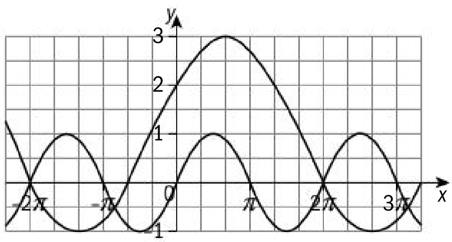
- c representa una traslación (o un desplazamiento) horizontal. La función se desplazará a la derecha si c es positivo o hacia la izquierda si c es negativo.



- d representa una traslación (o un desplazamiento) vertical. La función se desplaza hacia arriba si d es positivo o hacia abajo si d es negativo.



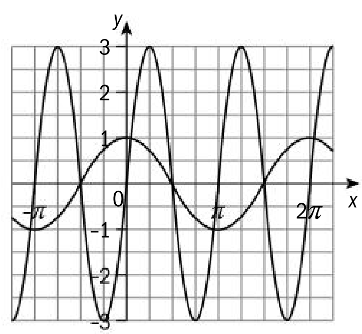
La función $y = 2\text{sen}\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$ se representa en el mismo sistema de ejes que la curva básica del seno (que pasa por (0,0)).



Esta función tiene una amplitud de 2 y un período de 4π. A la función y = sen x se le han aplicado cuatro transformaciones. Ha habido dos cambios en las coordenadas y y dos cambios en las coordenadas x.

- Hubo un estiramiento vertical de factor 2 y una traslación vertical de 1. Todos los valores de las coordenadas y de la función seno estándar se han multiplicado por 2 y aumentado en 1 unidad.
- Hubo un estiramiento horizontal de factor 2 y una traslación horizontal de $-\frac{\pi}{3}$. Todos los valores de las coordenadas x de la función seno estándar se han multiplicado por 2 (dividido por $\frac{1}{2}$), y luego disminuido en $\frac{\pi}{3}$ unidades.

La función $y = 3\cos\left(-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ se representa en el mismo sistema de ejes que la función básica del coseno (que pasa por (0,1)).



La función tiene una amplitud de 3 y un período de π. A la función $y = \cos x$ se le han aplicado cuatro transformaciones.

- Hubo un estiramiento vertical de factor 3. Todos los valores de las coordenadas y de la función coseno estándar se han multiplicado por 3.
- Hubo un estiramiento horizontal de factor $\frac{1}{2}$, una simetría respecto del eje y, y una traslación de $\frac{\pi}{4}$ unidades. Todos los valores de las coordenadas x en la función coseno original se han dividido por −2, y luego aumentado en $\frac{\pi}{4}$ unidades.

Cuando se dibujan a mano funciones como estas, conviene proceder paso a paso.

Ejemplo 18

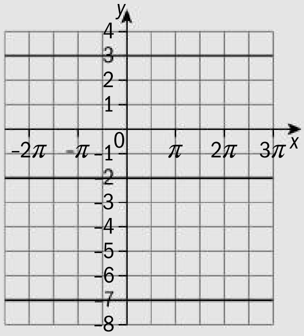
Dibuje aproximadamente el gráfico de la función $y = 5\cos\left(\frac{2}{3}(x+\pi)\right) - 2$.

Respuesta

Esta función tendrá una amplitud de 5 y un desplazamiento vertical de −2.

Los valores máximo y mínimo de la función serán 3 y −7, respectivamente.

El eje horizontal de la onda será $y = -2$, que es la traslación vertical.

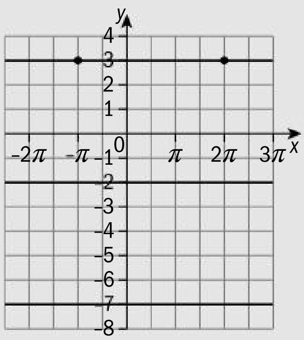


Trazar las rectas correspondientes a estos valores máximo y mínimo y al eje de la onda

Estas rectas auxiliares serán útiles al representar gráficamente la función.

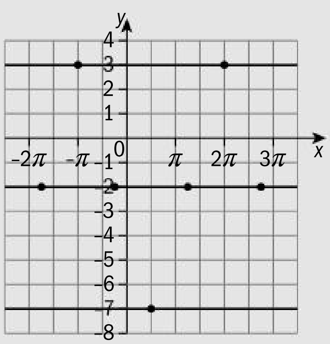
$$\text{Período} = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\left(\frac{2}{3}\right)} = (2\pi)\left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi$$

Esta función tendrá un período de 3π y un desplazamiento horizontal de $-\pi$.



La curva estándar del coseno tiene un máximo cuando $x = 0$, por lo tanto esta función tendrá un máximo cuando $x = -\pi$.

Como el período es 3π, tendrá otro máximo 3π unidades hacia la derecha, donde $x = 2\pi$. Situar estos puntos máximos en la recta $y = 3$.

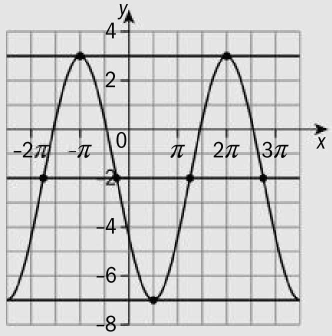


Usar los conocimientos sobre las características de la curva del coseno para situar otros puntos, tales como el mínimo y los puntos sobre el eje de la onda

A mitad de camino entre dos valores máximos, hay un valor mínimo.

A mitad de camino entre los valores máximo y mínimo, habrá puntos en el eje horizontal $y = -2$.

▶ Continúa en la página siguiente.

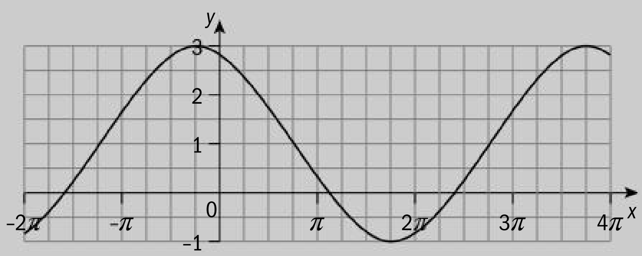


Dibujar la curva que pasa por estos puntos

Cuando el gráfico esté completo quizás se quiera borrar las rectas auxiliares.

Ejemplo 19

Halle la amplitud y el período, luego escriba una ecuación que contenga la función seno y otra que contenga la función coseno, para la función representada en el diagrama.



Respuesta

La amplitud es $\dfrac{3-(-1)}{2} = 2$.

La amplitud es la mitad de la diferencia entre el valor máximo y el mínimo.

El desplazamiento vertical es $\dfrac{3+(-1)}{2} = 1$.

El período es 4π.

El período es la distancia horizontal en la que la función completa un ciclo. La manera más sencilla de hallarlo es tomar la distancia horizontal entre dos puntos máximos consecutivos o entre dos puntos mínimos consecutivos.

$$y = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)\right) + 1$$

Para la función seno, la traslación horizontal se halla buscando la coordenada x de un punto sobre el eje horizontal de la onda, con pendiente positiva. Esto corresponde al punto (0, 0) en la curva estándar del seno.

En esta función, uno de tales puntos es $\left(-\dfrac{5\pi}{4}, 1\right)$, *por lo tanto la traslación horizontal es de* $-\dfrac{5\pi}{4}$.

▶ Continúa en la página siguiente.

$y = 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$	*Las funciones seno y coseno tienen la misma amplitud, período y traslación vertical.* *Para una función coseno, se puede hallar la traslación horizontal buscando la coordenada x del punto máximo de la curva. Esto corresponde al punto (0, 1), que es un máximo en la curva estándar del coseno. En esta función, uno de tales puntos es* $\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right)$*, por lo tanto la traslación horizontal es de* $-\frac{\pi}{4}$.

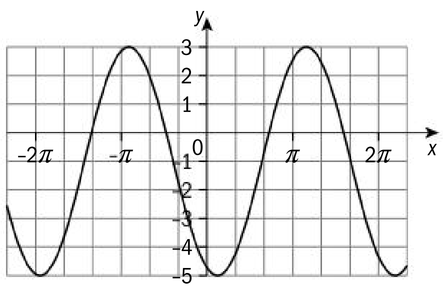
Debemos recordar que puede haber más de una fórmula correcta para una función seno o coseno.

➔ Para las funciones seno y coseno de la misma curva, la traslación horizontal diferirá en un cuarto del período de la función.

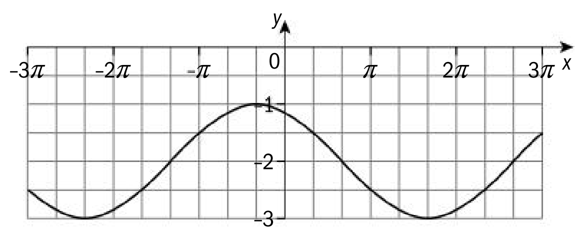
Ejercitación 13K

Escriba una fórmula que contenga la función seno y otra que contenga la función coseno para las funciones dadas en las preguntas 1 a 4.

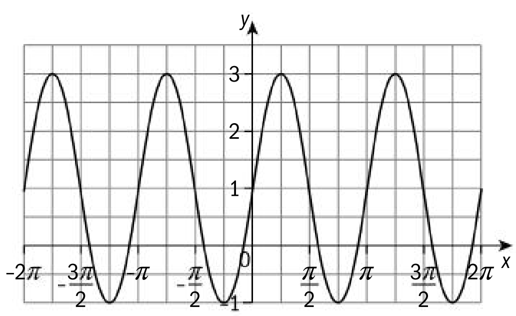
1



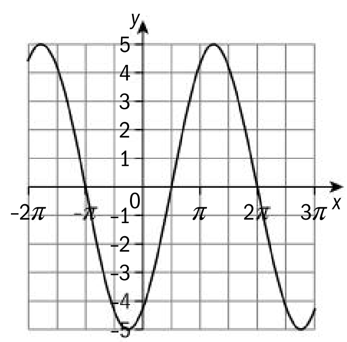
2



3



4



Haga un dibujo aproximado pero claro de las funciones dadas en las preguntas 5 a 8 que represente al menos un ciclo completo.

5 $y = 3\cos\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 2$

6 $y = -\text{sen}\left(-2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$

7 $y = 1{,}5\cos\left(3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

8 $y = -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 4$

13.7 Modelizaciones que utilizan las funciones seno y coseno

Muchas situaciones de la vida cotidiana pueden modelizarse usando las funciones seno y coseno. Algunas de ellas son, por ejemplo, la altura de las mareas, el horario de la salida del Sol y las temperaturas promedio. En esta sección, usaremos nuestro conocimiento de transformaciones para ver de qué modo las funciones seno y coseno pueden usarse para modelizar datos.

➔ Para modelizar datos utilizando la función coseno necesitaremos conocer:

- La amplitud de la función
- La traslación vertical
- La traslación horizontal
- El período

La función seno tiene la misma amplitud, traslación vertical y período, pero la traslación horizontal es de un cuarto del período hacia la izquierda de la curva del coseno.

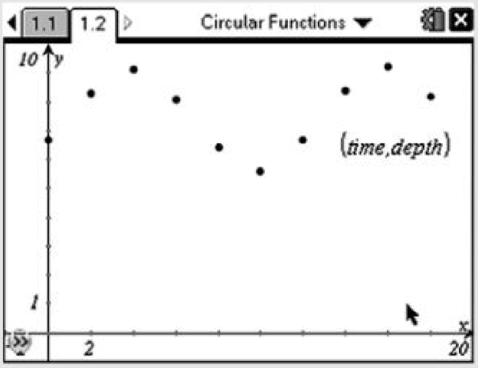
Ejemplo 20

Modelice los siguientes datos, que representan la profundidad del agua medida en una boya en el océano durante un período de 18 horas a partir de la medianoche.

Tiempo	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Profundidad del agua (m)	6,7	8,3	9,1	8,1	6,4	5,6	6,7	8,4	9,2	8,2

Respuesta

Ingrese los datos en listas (rotulándolas *tiempo* y *profundidad*), luego grafique los datos en la CPG. La variable independiente, tiempo, estará en el eje x y la profundidad del agua será la variable dependiente, en el eje y.



Del gráfico, el valor mínimo es 5,6 metros, que ocurre a las 10.00. El valor máximo es 9,2 metros. Utilizar estos valores para estimar la amplitud.

Deberemos asegurarnos de que la CPG esté en el modo RADIANES.

▶ Continúa en la página siguiente.

Los datos son claramente periódicos, y la altura del agua asciende y desciende siguiendo un patrón claro.

Ahora trataremos de hallar una función trigonométrica para modelizar estos datos.

Para desarrollar el modelo, estimamos la amplitud, el período y las traslaciones horizontales y verticales de la función.

La amplitud es la mitad de la distancia vertical entre los valores máximo y mínimo.

Amplitud estimada = $\frac{9,2-5,6}{2} = 1,8$ metros

La traslación vertical es el valor medio entre el valor máximo y el mínimo.

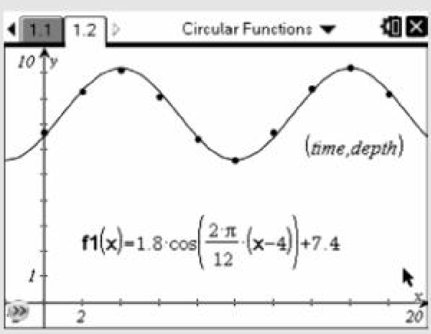
Traslación vertical = $\frac{9,2+5,6}{2} = 7,4$

El período es la distancia horizontal en la que la función completa un ciclo. Los valores máximos se dan a las 4.00 y las 16.00, por lo tanto se estima el período en 12 horas.

Finalmente, estimamos la traslación horizontal. Para modelizar los datos usando la función coseno, la manera más sencilla es buscar el punto máximo. Los puntos situados parecen indicar que hay puntos máximos donde $x = 4$ y donde $x = 16$. Se puede utilizar cualquiera de esas coordenadas x para la traslación horizontal.
Reemplazamos estas estimaciones en la fórmula $y = a\cos(b(x - c)) + d$

$$y = 1,8\cos\left(\frac{2\pi}{12}(x-4)\right) + 7,4.$$

Ingresamos esta fórmula en la CPG y dibujamos el gráfico de la función en el mismo sistema de ejes que los datos.



La función parece ser un muy buen modelo para los datos. Podríamos tratar de hacer algunas modificaciones para obtener un mejor ajuste.

Puede también hallar la traslación vertical restando la amplitud del valor máximo o sumando la amplitud al valor mínimo.

Podríamos también crear una función seno. Intentémoslo: deberíamos obtener $y = 1,8\text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}(x-1)\right) + 7,4$

Ejemplo 21

El siguiente conjunto de datos se puede modelizar mediante la función $y = a\cos(b(x - c)) + d$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	4	7,6	9,4	7,6	4	2,2	4	7,6	9,4	7,6	4

a Use los datos para estimar el período, la amplitud y las traslaciones horizontal y vertical.
b Escriba la función coseno que modeliza los datos.
c Represente gráficamente la función en el mismo sistema de ejes que los datos.
d Use la función regresión en la CPG para obtener un modelo para los datos que contenga la función seno y dibuje el gráfico de esta función en el mismo sistema de ejes que los datos.

Respuestas

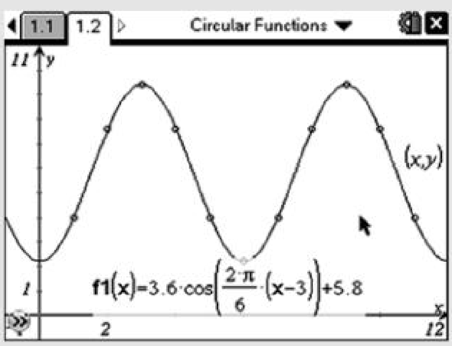
a Amplitud = $\dfrac{9{,}4-2{,}2}{2}=3{,}6$

Traslación vertical = $\dfrac{9{,}4+2{,}2}{2}=5{,}8$

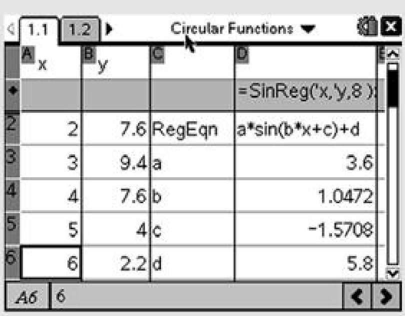
Traslación horizontal = 3
Período = 9 − 3 = 6

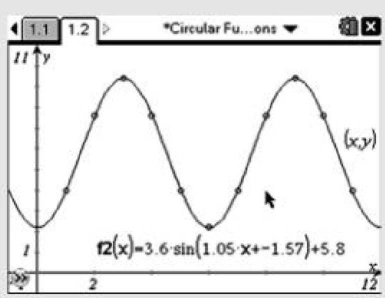
b $y=3{,}6\cos\left(\dfrac{2\pi}{6}(x-3)\right)+5{,}8$

c



d





Debemos asegurarnos de que la CPG esté en modo RADIANES.

Use la función **SinReg** (regresión sinusoidal) en el menú **Stat Calculations** (cálculos estadísticos). Asegúrese de indicar en la CPG qué listas contienen los datos (*x*, *y*).

Ejercitación 13L

Para cada conjunto de datos:

a Utilice los datos para estimar el período, la amplitud y las traslaciones horizontal y vertical.

b Escriba una función coseno en la forma $y = a\cos(b(x - c)) + d$ para modelizar los datos.

c Represente gráficamente la función en el mismo sistema de ejes que los datos.

d Use la función regresión de la CPG para obtener un modelo para los datos que contenga la función seno, y dibuje el gráfico de esta función en el mismo sistema de ejes que los datos.

¿Qué situaciones de la vida cotidiana pueden modelizarse mediante funciones periódicas?¿Qué ajustes podrían resultar necesarios para tener en cuenta las fluctuaciones en los datos?

1

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	11,8	8,5	2,2	5,5	11,8	8,5	2,2	5,5	11,8	8,5	2,2

2

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
y	12,5	9,3	12,5	18,9	21,9	18,9	12,5	9,3	12,5	18,9	21,9

3

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
y	1,8	2,1	1,8	1,3	0,7	0,5	0,7	1,3	1,8	2,1	1,8

Una función que modeliza los datos puede usarse para hacer predicciones.

Ejemplo 22

La función

$$a(t) = 67{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{30}(t-15)\right) + 67{,}5$$

puede usarse para modelizar la altura de un pasajero por encima de la plataforma de ascenso a la rueda “London Eye”.

a Use esta función para estimar la altura de un pasajero por encima de la plataforma:

i 8 minutos después del ascenso

ii 19 minutos después del ascenso

b Use esta función para estimar cuánto tiempo le lleva a un pasajero alcanzar por primera vez los 100 metros de altura.

Respuestas

a i 8 minutos después de subir:

$$a(8) = 67{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{30}(8-15)\right) + 67{,}5 \approx 74{,}6$$

El pasajero está aproximadamente 74,6 metros por encima de la plataforma.

Reemplazar t = 8 en la función

▶ Continúa en la página siguiente.

ii 19 minutos después de subir: $a(19) = 67{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{30}(19-15)\right) + 67{,}5 \approx 112{,}7$ El pasajero está aproximadamente 112,7 metros sobre la plataforma.	
b $a(t) = 67{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{30}(t-15)\right) + 67{,}5 = 100$ $t \approx 9{,}90$ minutos	*Igualar la función a 100, que es la altura*

Ejercitación 13M

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 La profundidad del agua al final de un muelle puede estimarse mediante la función $p(t) = 5{,}6\,\text{sen}\,(0{,}5236(t - 2{,}5)) + 14{,}9$, donde p es la profundidad del agua en metros, y t es el número de horas después de la medianoche.

- **a** ¿Cuál es el período de la función?
- **b** Estime la profundidad del agua a la medianoche.
- **c** Estime la profundidad del agua a las 14.00.
- **d** ¿A qué hora alcanzará el agua por primera vez su mayor profundidad?

2 La temperatura máxima promedio en una ciudad puede modelizarse mediante la función $T(d) = 17{,}5\cos(0{,}0172(d-187)) + 12{,}5$, donde T es la temperatura en grados Celsius, y d es el día del año (1 de enero = 1, 14 de enero = 14, etc.).

- **a** ¿Cuál es la temperatura máxima esperada en esta ciudad el primer día de febrero?
- **b** ¿Cuál es la temperatura máxima esperada y en qué día ocurrirá?
- **c** ¿Cuántos días de cada año se espera que la temperatura no supere los cero grados?

3 Una rueda en un parque de diversiones alcanza una altura máxima de 46 metros y una altura mínima de 1 metro. Le toma 20 minutos realizar una rotación completa.

- **a** Si un niño sube a la rueda cuanto $t = 0$, ¿a qué altura estará después de haber girado durante 10 minutos?
- **b** Escriba una función seno para modelizar la altura a la que estará el niño t minutos después de haberse subido a la rueda.
- **c** ¿A qué altura está el niño si ha girado durante 3 minutos?
- **d** ¿Durante cuánto tiempo estará el niño a una altura superior a los 40 metros?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 El dueño de una heladería hace un seguimiento de sus ventas anuales y descubre que vende un mínimo de 5 galones de helado el primer día de enero y un máximo de 37 galones de helado el primer día de julio.

a Suponiendo que las ventas anuales pueden modelizarse mediante una función coseno, cree una función para modelizar esta situación. Sea x el mes.

b ¿Cuántos galones de helado espera vender el primer día de abril?

c ¿Durante qué mes espera vender 30 galones de helado en un día?

Material de ampliación disponible en línea:
Hoja de ejercicios 13: Proyecto de modelización de las temperaturas

Ejercicio de revisión

1 Sabiendo que $\cos 70° = 0{,}342$ (con una aproximación de tres cifras significativas), halle el valor de:

a $\cos 110°$

b $\cos 250°$

c $\cos(-290°)$

2 Sabiendo que $\operatorname{sen} 40° = 0{,}643$ (con una aproximación de tres cifras significativas), halle los valores de:

a $\operatorname{sen} 140°$

b $\operatorname{sen} 320°$

c $\operatorname{sen}(-140°)$

3 Resuelva cada ecuación para $-360° \le x \le 360°$.

a $\cos x = -\frac{1}{2}$

b $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

c $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 1$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$, para $0 \le x \le \pi$.

5 Se muestra el gráfico de f, para $0 \le x \le 9$.

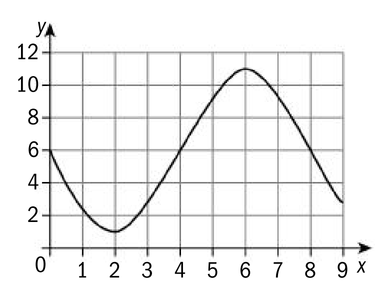
a Sabiendo que la función puede escribirse en la forma $f(x) = a\operatorname{sen}(b(x-c)) + d$:

i Halle los valores de a, b y c.

ii Explique por qué $b = \frac{\pi}{4}$.

b Escriba el intervalo para el cual $f(x) > 6$.

El gráfico tiene un máximo en (6, 11) y un mínimo en (2, 1).



PREGUNTAS TIPO EXAMEN

6 Sabiendo que $\cos x = \frac{2}{5}$, y que x es un ángulo agudo, halle:

a sen x **b** tan x **c** sen $2x$

7 Dibuje aproximadamente el gráfico de la función $f(x) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{5}(x+1)\right) - 2$, para $-3 \le x \le 5$.

Ejercicio de revisión

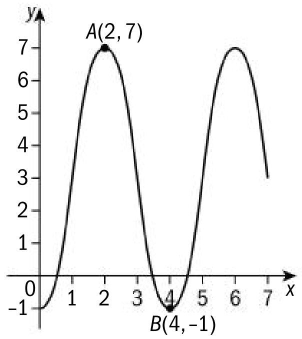
1 Resuelva cada ecuación para $-180° \le x \le 360°$.

a $\operatorname{sen} x = 0{,}75$ **b** $\cos x = -0{,}63$ **c** $\tan x = -2{,}8$

2 Resuelva cada ecuación para $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

a $2\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ **b** $\cos x = 3x - 1$ **c** $2\tan\left(\frac{x}{5}\right) = 4x - x^3$

3 Se muestra el gráfico de f, para $0 \le x \le 7$.



a Sabiendo que la función puede escribirse en la forma $f(x) = a\cos bx + c$, halle los valores de a, b y c.

b Escriba las soluciones de la ecuación $f(x) = 1$.

4 La profundidad del agua en el extremo final de un muelle de pescadores está dada por la función $D(t) = P\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t - Q)\right) + 10$, donde D es la profundidad del agua en metros, y t es el número de horas después de la medianoche.

La bajamar ocurre a las 4.00, cuando la profundidad del agua es de 6 m y la pleamar ocurre a las 10.00, cuando la profundidad del agua es de 14 m.

a Halle los valores de P y Q.

b Dibuje un gráfico aproximado de la función D, para $0 \le t \le 24$.

c ¿A qué hora alcanza el agua los 8 metros por primera vez?

d La pesca está prohibida cuando la profundidad del agua es de menos de 8 metros. ¿Cuántas horas por día está prohibido pescar?

5 El día más largo del año en una ciudad es el 21 de junio, con 15 horas de luz solar. El día más corto del año es el 21 de diciembre, con 9,35 horas de luz solar.

El número de horas de luz solar se puede modelizar mediante la función $h(x) = A\operatorname{sen}0{,}0172(x - 86) + B$, donde x es el día del año (por ejemplo, $x = 1$ es el 1 de enero).

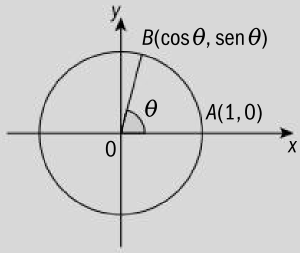
a Halle los valores de A y B.

b ¿Cuántas horas de luz solar habría el 1 de febrero?

RESUMEN DEL CAPÍTULO 13

Utilización del círculo de radio unidad

- El círculo de radio unidad tiene centro en el origen $(0, 0)$ y radio de longitud 1. El lado terminal de cualquier ángulo θ en la posición estándar cortará al círculo en un punto con coordenadas $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.



- Para cualquier ángulo θ, $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, donde $\cos\theta \neq 0$.
- Para cualquier ángulo θ:
  - $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180° - \theta)$
  - $\cos\theta = \cos(-\theta)$
  - $\tan\theta = \tan(180° + \theta)$

Identidades trigonométricas

- La ecuación $\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ es una **identidad**, dado que es válida para todos los valores de θ.
- Las identidades del ángulo doble para el coseno son:

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

- La identidad del ángulo doble para el seno es $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

Representación gráfica de funciones circulares

- Las funciones seno y coseno tienen gráficos de igual tamaño y forma, pero posiciones horizontales diferentes sobre los ejes. Las funciones son **periódicas** y tienen un período de 360° o 2π. Ambas funciones tienen un valor máximo de 1 y un valor mínimo de -1, y una **amplitud** de 1.
- Al igual que las funciones seno y coseno, la función tangente es **periódica**. Hay asíntotas verticales en los valores de las coordenadas x donde la función no existe. El mismo ciclo de valores se repite entre cada par de asíntotas verticales.
- El período de la función tangente es de 180° (o π radianes). A diferencia de la funciones seno y coseno, la función tangente no tiene amplitud. No tiene valores máximos ni mínimos.
- La función $y = \operatorname{sen} x + d$ es una **traslación vertical** de la curva estándar del seno. La curva se desplaza hacia arriba si d es positivo, hacia abajo si d es negativo.

Continúa en la página siguiente.

- La función $y = \operatorname{sen}(x - c)$ es una **traslación horizontal** de la curva estándar del seno. La curva se desplaza hacia la derecha si c es positivo, hacia la izquierda si c es negativo.
- La función $y = \cos x + d$ es una **traslación vertical** de la curva estándar del coseno. La curva se desplaza hacia arriba si d es positivo, hacia abajo si d es negativo.
- La función $y = \cos(x - c)$ es una **traslación horizontal** de la curva estándar del coseno. La curva se desplaza hacia la derecha si c es positivo, hacia la izquierda si c es negativo.
- Las funciones $y = a\operatorname{sen} x$ e $y = a\cos x$ son **estiramientos verticales** de las funciones seno y coseno. Cuando al gráfico de una función se le aplica un estiramiento vertical, cada coordenada y de la función original se multiplica por el valor de a. Con un estiramiento vertical, la amplitud de la función seno y coseno cambiará de 1 a $|a|$. El período de la función no cambiará.
- Las funciones $y = \operatorname{sen}(bx)$, $y = \cos(bx)$ e $y = \tan(bx)$ representan **estiramientos horizontales** de las funciones seno, coseno y tangente.
- Cuando al gráfico de una función se le aplica un estiramiento horizontal, cada coordenada x de la función original se multiplica por $\frac{1}{b}$.
- Cuando al gráfico de una función se le aplica un estiramiento horizontal, el período de la función cambiará de 2π a $\frac{2\pi}{|b|}$, o de 360° a $\frac{360°}{|b|}$.
- Para una función en la forma $y = \tan(bx)$, el período cambiará de π a $\frac{\pi}{|b|}$, o de 180° a $\frac{180°}{|b|}$.

Combinación de transformaciones con las funciones seno y coseno

- Para las funciones seno y coseno de la misma curva, las traslaciones horizontales diferirán en un cuarto del período de la función.

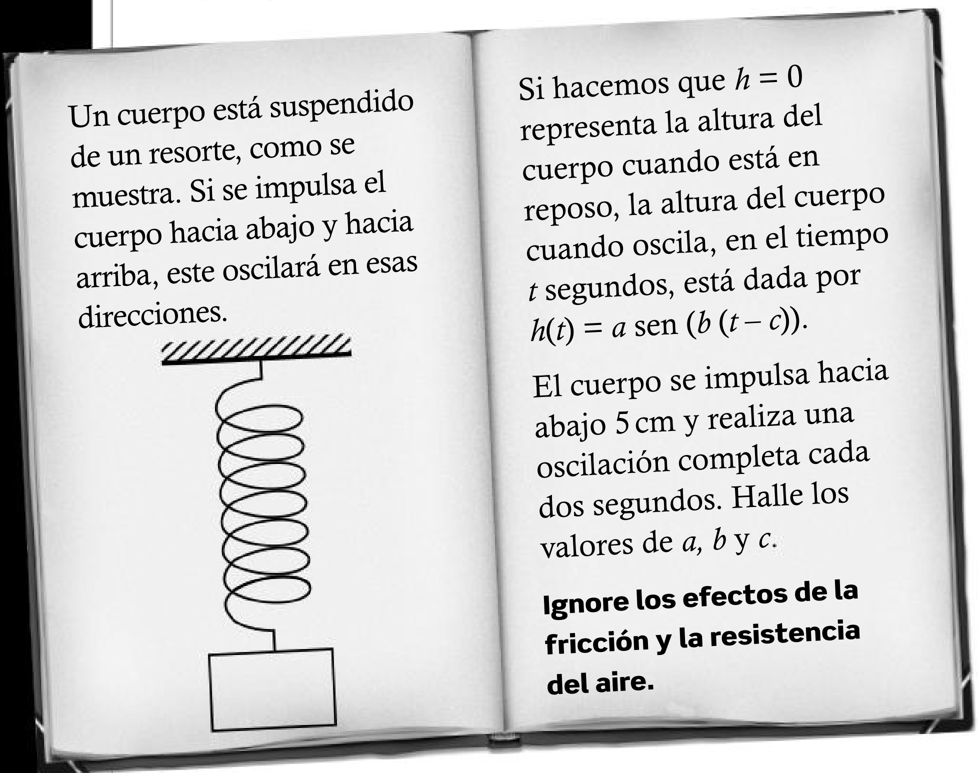
Modelizaciones que utilizan las funciones seno y coseno

- Para modelizar datos utilizando la función coseno necesitamos conocer:
  - La amplitud de la función
  - La traslación vertical
  - La traslación horizontal
  - El período
- La función seno tiene la misma amplitud, traslación vertical y período, pero la traslación horizontal es de un cuarto del período hacia la izquierda de la función coseno.

Matemáticas puras contra matemáticas aplicadas

Se suele clasificar las matemáticas en “matemáticas puras” y “matemáticas aplicadas”.¿Cuál es la diferencia entre las dos áreas?

La siguiente es una pregunta de trigonometría que se nos plantea a menudo.


Un cuerpo está suspendido de un resorte, como se muestra. Si se impulsa el cuerpo hacia abajo y hacia arriba, este oscilará en esas direcciones.

Si hacemos que $h = 0$ representa la altura del cuerpo cuando está en reposo, la altura del cuerpo cuando oscila, en el tiempo t segundos, está dada por $h(t) = a \text{ sen } (b\,(t - c))$.

El cuerpo se impulsa hacia abajo 5 cm y realiza una oscilación completa cada dos segundos. Halle los valores de a, b y c.

Ignore los efectos de la fricción y la resistencia del aire.

Esta pregunta es un ejemplo de matemáticas puras. Si ignoramos los efectos de la fricción y la resistencia del aire, el cuerpo oscilaría indefinidamente. Pero en la vida cotidiana, las oscilaciones se reducirán hasta que el peso llegue al reposo.

- ¿Qué sentido tiene estudiar problemas de matemáticas puras como este cuando los resultados resultan poco realistas en la vida cotidiana?
- ¿Deberíamos estudiar solo matemáticas aplicadas que podrían tener algún uso práctico?

“Cuando las leyes de las matemáticas se refieren a la realidad, no son ciertas; cuando son ciertas, no se refieren a la realidad”.

Albert Einstein, en *Sidelights on Relativity*

Quienes estudian las matemáticas puras lo hacen como un fin en sí mismo, sin pensar en una aplicación concreta. Aquellos que trabajan con las matemáticas aplicadas las usan para investigar, construir modelos y resolver problemas en otras áreas del conocimiento como, por ejemplo, la física, la economía, la informática y la ingeniería.

Existen 10 tipos de personas en este mundo: aquellos que entienden el sistema binario y los que no.

Aplicaciones de las matemáticas puras

A menudo se encuentran aplicaciones concretas para las matemáticas puras, a veces muchos años después de haberse formulado la idea original.

1. Los computadores modernos usan el sistema binario (base 2). El matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) escribió sobre este sistema de números, que solo emplea los números 1 y 0, hacia principios de 1700. Cuando estudiaba esta idea de las "matemáticas puras", no sabía cómo se la utilizaría, 300 años más tarde.

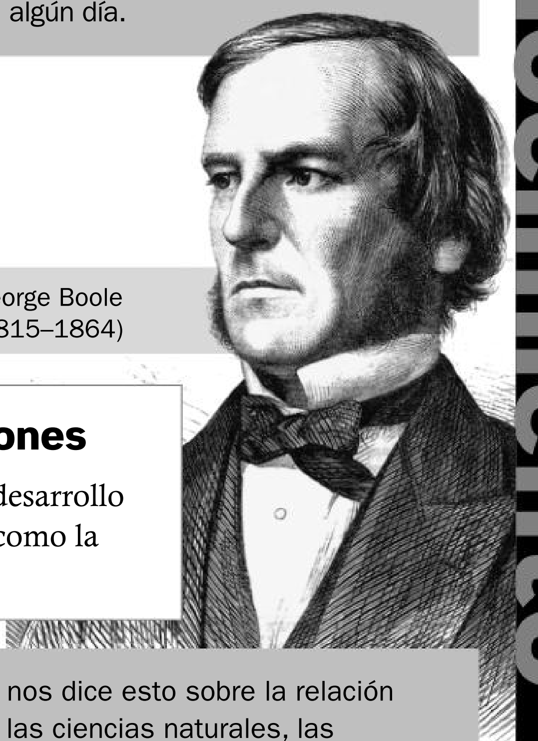
2. George Boole, un matemático inglés, desarrolló su lógica booleana en la década de 1850. Este sistema más tarde se convirtió en el fundamento de los computadores digitales modernos.

3. En física, las partículas elementales fueron descubiertas mientras se argumentaba sobre la belleza, la simetría y la elegancia de las matemáticas subyacentes.

Posiblemente todas las matemáticas "puras" se usarán para modelizar aspectos de la vida cotidiana algún día.

"La física es matemática no por lo mucho que sabemos del mundo físico, sino por lo poco que lo conocemos; lo que podemos descubrir es solamente sus propiedades matemáticas".

Bertrand Russell, matemático y filósofo británico (1872–1970)



▶ George Boole (1815–1864)

Las matemáticas puras en aplicaciones

El estudio de las matemáticas aplicadas condujo al desarrollo de disciplinas matemáticas completamente nuevas, como la estadística y la teoría de juegos.

- ¿Las matemáticas nos permiten modelizar el mundo real porque las creamos como un espejo del mundo, o porque el mundo es intrínsecamente matemático?
- ¿Qué nos dice esto sobre la relación entre las ciencias naturales, las matemáticas y el mundo natural?
- ¿Las matemáticas se inventan o se descubren?

14 Análisis con funciones trigonométricas

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

6.1 Tangentes, normales y sus ecuaciones

6.2 Derivadas del sen$x$, cos$x$ y tan$x$, incluida la derivada de la suma y del producto por un escalar de estas funciones; regla de la cadena; reglas del producto y del cociente; derivada segunda de estas funciones.

6.3 Puntos máximos y mínimos locales; puntos de inflexión; gráficos de funciones, incluida la relación entre los gráficos de f, f' y f''.

6.4 Integral indefinida de sen$x$ y cos$x$, incluidas funciones compuestas con la función lineal $ax + b$; integración por comparación, o sustitución en la expresión $\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$.

6.5 Integración con una restricción para determinar el término constante; integrales definidas; áreas bajo curvas (entre la curva y el eje x); áreas entre curvas, volúmenes de revolución alrededor del eje x.

6.6 Problemas de cinemática relativos al desplazamiento s, la velocidad v, y la aceleración a; distancia total recorrida.

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Hallar el valor exacto de las funciones trigonométricas para valores del círculo de radio unidad

2 Utilizar identidades trigonométricas para resolver ecuaciones

Por ejemplo: Resolver $\cos 2x = -\cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$

$\cos 2x = -\cos x$

$2\cos^2 x - 1 = -\cos x$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ o $\cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi$

3 Utilizar las reglas del producto, del cociente y de la cadena para hallar derivadas

Por ejemplo: Hallar la derivada de $f(x) = x^2 \ln x$

$f(x) = x^2 \ln x$

$f'(x) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2x) = x + 2x \ln x$

Comprobemos nuestras habilidades

1 Halle el valor exacto de:

a $\cos\frac{7\pi}{4}$ **b** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$

c $\tan\frac{11\pi}{6}$ **d** $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$

2 Resuelva cada ecuación para $0 \le x \le 2\pi$.

a $1 + \tan x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

b $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

c $\operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos x$

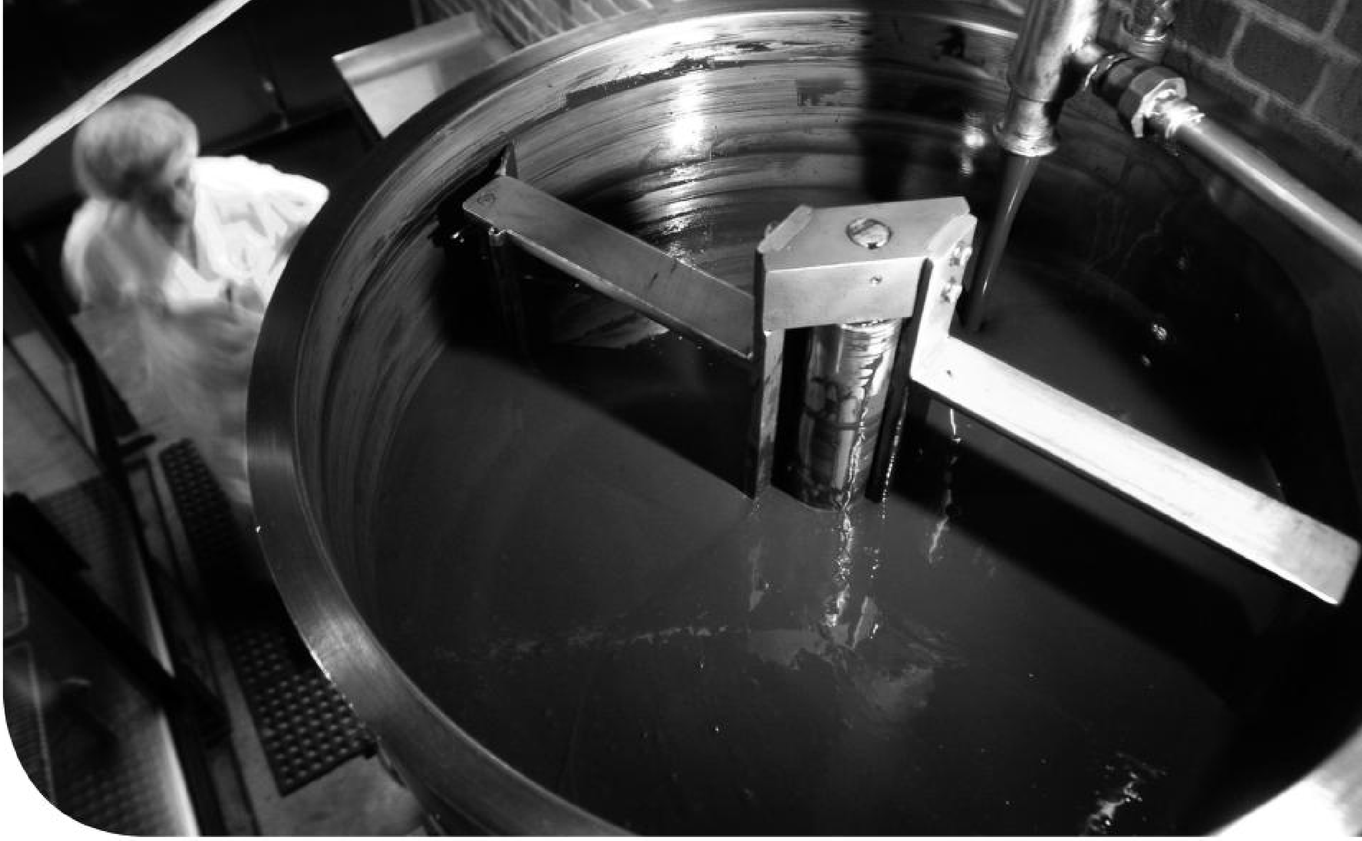
3 Halle la derivada de:

a $f(x) = 2x^3 \mathrm{e}^x$

b $f(x) = x \ln(x^2)$

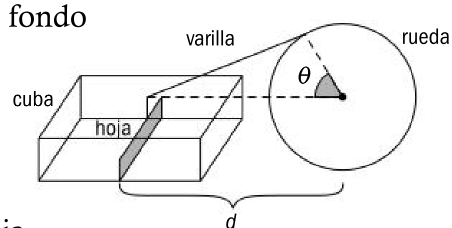
c $f(x) = \frac{x-5}{x^2+4}$

d $f(x) = \frac{\ln x}{x}$



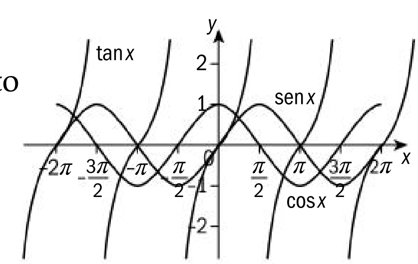
En una fábrica de chocolate situada en la ciudad de San Francisco (California), se está revolviendo el chocolate dentro de una cuba por medio de una hoja de acero impulsada por una rueda. La rueda empuja la hoja para un lado y para el otro, por todo el fondo de la cuba.

El movimiento circular periódico de la rueda del batidor se transforma en el movimiento lineal periódico de la hoja. El diagrama muestra el mecanismo donde una varilla tiene un extremo conectado a la rueda y el otro a la hoja de la batidora dentro de la cuba. A medida que gira la rueda, la varilla empuja la hoja hacia atrás y hacia adelante por todo el fondo de la cuba. La distancia entre el centro de la rueda y la hoja se puede modelizar mediante una función como la siguiente: $d(\theta) = 2\cos\theta + \sqrt{25 - 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta}$, donde d es la distancia en metros y θ es el ángulo de rotación de la rueda, en radianes.



Para hallar el ángulo de rotación cuando la distancia entre la hoja y el centro de la rueda es mínima, usaríamos la derivada de $d(\theta)$.

Muchos fenómenos del mundo real, tales como el ritmo cardíaco, los movimientos de las agujas del reloj, las mareas y el movimiento circular, tienen un comportamiento periódico, es decir, siguen un patrón que se repite a intervalos regulares. El comportamiento periódico se puede modelizar por medio de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, que son funciones periódicas. En los gráficos se puede apreciar que los valores de cada función se repiten.



En este capítulo, hallaremos derivadas de funciones del seno, el coseno y la tangente e integraremos las funciones de seno y coseno, con el fin de investigar el comportamiento de funciones periódicas como estas.

14.1 Derivadas de las funciones trigonométricas

En el capítulo 7 conocimos las siguientes propiedades de derivadas, donde c es un número real constante.

Regla de la constante: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[c] = 0$

Regla de la multiplicación por una constante: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[cf(x)] = cf'(x)$

Regla de la adición o la sustracción: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

Regla del producto: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$

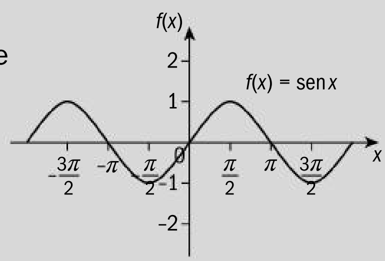
Regla del cociente: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2},\ g(x) \neq 0$

Regla de la cadena: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))] = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Investigación: la derivada del seno

He aquí el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Utilícelo para responder las siguientes preguntas.

1 Hay cuatro valores para x en $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ donde la pendiente de la recta tangente a $f(x) = \operatorname{sen} x$ es igual a cero. ¿Cuáles son?
Utilice estos valores para situar cuatro puntos que pertenecen al gráfico de la derivada de f en función de x.



La pendiente de una recta horizontal es 0. Entonces, en los valores de x donde las tangentes de f son horizontales, la derivada de f es igual a 0.

2 Enumere los intervalos de $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ donde el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente y aquellos donde es decreciente. Cuando f es creciente, ¿qué podemos decir acerca del signo de la derivada de f? Cuando f es decreciente, ¿qué podemos decir acerca del signo de la derivada de f? Utilice esta información y los puntos que situó en la pregunta 1 para hacer un posible gráfico aproximado de la derivada de f.

3 Utilice la calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG) para obtener el gráfico de la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Asegúrese de que la CPG esté en modo radianes. Compare el gráfico de la derivada en la calculadora con el que dibujó en la pregunta 2. Ajuste su gráfico si es necesario.

Ingrese el gráfico:
$f1(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen}(x))$

4 Realice una conjetura basada en el gráfico de la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$. ¿Qué función cree que es la derivada del seno?

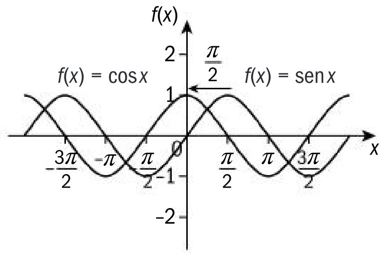
5 Verifique su conjetura numéricamente con la CPG, comparando la tabla de valores para la función que dibujó en la pregunta 3 y la función que escogió en la pregunta 4.

En la investigación, debimos haber encontrado que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$.

Ahora tomemos la derivada de $f(x) = \cos x$.

Si trasladamos el gráfico del seno hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades, se obtendrá el gráfico del coseno.

Entonces, $f(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.



En la sección de Teoría del Conocimiento al final del capítulo se analiza una justificación geométrica de este hecho.

Por lo tanto, $\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

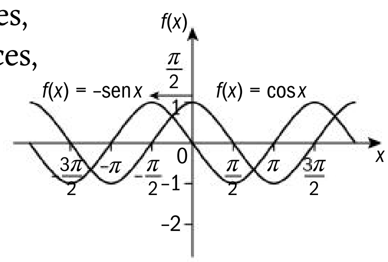
$$= \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right](1)$$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Utilizamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\frac{d}{dx}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right][1]$$

Si trasladamos el gráfico del coseno hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades, obtendremos una simetría del gráfico del seno en el eje x. Entonces,



$$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto, concluimos que $\frac{d}{dx}(\cos x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$.

Finalmente, consideremos la derivada de $f(x) = \tan x$. Sabemos que

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \text{ donde } \cos x \neq 0.$$

Entonces, $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}, \cos x \neq 0$$

Aplicamos la regla del cociente.

Utilizamos la identidad $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$ para simplificar el numerador.

➔ **Derivadas del seno, el coseno y la tangente:**

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \cos x \neq 0$

Ejemplo 1

Halle la derivada de cada función.

a $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

b $y = \cos(t^2)$

c $y = \dfrac{1}{\tan x}$

d $f(x) = \operatorname{sen}^3(2x)$

Respuestas

a $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

Tomar la derivada de cada término

b $y = \cos(t^2)$

$$y' = \underbrace{[-\operatorname{sen}(t^2)]}_{\text{derivada de la función exterior con respecto a la función interior}} \cdot \underbrace{[2t]}_{\text{derivada de la función interior con respecto a } t}$$

$$= -2t\operatorname{sen}(t^2)$$

Aplicar la regla de la cadena, donde la función exterior es $u(t) = \cos t$ y la función interior es $v(t) = t^2$

c $y = \dfrac{1}{\tan x}$

$$= (\tan x)^{-1}$$

Volver a escribir utilizando exponentes racionales

$$y' = -1(\tan x)^{-2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$= -\frac{1}{\tan^2 x\cos^2 x} \text{ o } -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Aplicar la regla de la cadena, donde la función exterior es $u(x) = x^{-1}$ y la función interior es $v(x) = \tan x$

d $f(x) = \operatorname{sen}^3(2x)$

$$= (\operatorname{sen}(2x))^3$$

$$f'(x) = 3(\operatorname{sen}(2x))^2(\cos(2x))(2)$$

$$= 6\operatorname{sen}^2(2x)\cos(2x)$$

Aplicar la regla de la cadena dos veces. Primero la función exterior es $u(x) = x^3$ y la función interior es $v(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Después, al hallar la derivada de $\operatorname{sen}(2x)$, la función exterior es $u(x) = \operatorname{sen} x$ y la función interior es $v(x) = 2x$.

En los siglos XVII y XVIII, el desarrollo de dispositivos mecánicos cambió el enfoque de la trigonometría, desplazándolo de su conexión inicial con el estudio de triángulos hacia la modelización del movimiento periódico. Joseph Fourier (1768–1830), un matemático y físico francés, descubrió que casi cualquier función periódica, como la vibración de la cuerda de un violín o el movimiento del péndulo de un reloj, podía ser expresada como una suma infinita de funciones seno y coseno.

La oscilación de un resorte y el movimiento de un péndulo son ejemplos de movimiento armónico simple. ¿Cómo se utilizan las funciones trigonométricas y el análisis para modelizar ese movimiento?

Ejercitación 14A

Halle la derivada de las funciones dadas en las preguntas 1 a 10.

1 $f(x) = 3\operatorname{sen} x - 2\cos x$

2 $y = \tan(3x)$

3 $y = \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$

4 $s(t) = \cos^2 t$

5 $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$

6 $y = \tan^2 x$

7 $y = \cos\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen}(4x)$

8 $f(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$

9 $y = \dfrac{4}{\operatorname{sen}^2(\pi x)}$

10 $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

11 Derive con respecto a x.

a $\tan(x^3)$ **b** $\cos^4 x$

12 Una función tiene fórmula $y = \text{sen}(3x - 4)$.

a Halle $\frac{dy}{dx}$. **b** Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Ejemplo 2

Halle las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva $f(x) = \cos 3x$ en el punto $x = \frac{\pi}{9}$.

Respuesta	
$f\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(3\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)$ $= \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ El punto de tangencia es $\left(\frac{\pi}{9}, \frac{1}{2}\right)$.	*Evaluar la función f en $x = \frac{\pi}{9}$ para hallar el punto de tangencia*
$f'(x) = -3\,\text{sen}(3x)$ $f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = -3\,\text{sen}\left(3\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)$ $= -3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ La pendiente de la recta tangente en $x = \frac{\pi}{9}$ es $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.	*Hallar la derivada de f y evaluarla en $x = \frac{\pi}{9}$ para hallar la pendiente de la recta tangente*
La pendiente de la recta normal en $x = \frac{\pi}{9}$ es $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ o $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.	*La recta normal es perpendicular a la recta tangente, entonces las pendientes son recíprocas y opuestas.*
Recta tangente: $y - \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$ Recta normal: $y - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$	*Utilizar la ecuación punto-pendiente de una recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, para escribir las ecuaciones*

Ejercitación 14B

En las preguntas 1 y 2, halle las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva en el valor de x dado.

1 $f(x) = \text{sen}\,x - \cos x;\ x = \frac{\pi}{2}$

2 $f(x) = 2\tan x;\ x = \frac{\pi}{4}$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 El punto P $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pertenece al gráfico de $y = \text{sen}\,(2x)$.

Halle la pendiente de la tangente a la curva en P.

4 Sea $f(x) = \cos\,(2x)$.

a Escriba el valor de $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

b Halle $f'(x)$.

c Halle la ecuación de la recta tangente a f en $x = \frac{\pi}{3}$.

5 Considere la función $f(x) = 3\,\text{sen}\,x$ para $0 \le x \le 2\pi$. Halle el valor (o los valores) de x para los cuales las rectas tangentes al gráfico de f son paralelas a la recta $y = \frac{3}{2}x + 4$.

La mayoría de los fenómenos en las ciencias, la ingeniería, los negocios y otros campos pueden ser modelizados mediante una **función elemental**.

Una función elemental es una función que es algebraica, trascendente o la adición, diferencia, multiplicación, división o composición de funciones algebraicas y trascendentes.

Funciones algebraicas

- Polinomios
- Funciones racionales
- Funciones que contienen radicales

Funciones trascendentes

(No se pueden expresar como una adición, diferencia, multiplicación, división ni radicales que contienen términos en x^n.)

- Funciones logarítmicas
- Funciones exponenciales
- Funciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas inversas

Ahora ya sabemos cómo derivar todas las funciones elementales, con excepción de las trigonométricas.

14.2 Más práctica con derivadas

Ahora ya conocemos las derivadas de estas funciones:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n] = nx^{n-1}, n \neq 1 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\text{sen}\,x] = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{e}^x] = \mathrm{e}^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\cos x] = -\text{sen}\,x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln x] = \frac{1}{x},\ x > 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x},\ \cos x \neq 0$$

Utilizando estos resultados y las reglas expuestas al principio de la sección 14.1, podremos hallar las derivadas de una gran variedad de funciones.

Ejemplo 3

Halle la derivada de cada función.

a $f(x) = 4\mathrm{e}^{2x} + \text{sen}\,(3x + 2)$ **c** $y = \cos^3 x\,\text{sen}\,x$

b $y = \mathrm{e}^x\,\text{sen}\,x$ **d** $s(t) = \ln(\text{sen}\,t)$

Respuestas

a $f(x) = 4\mathrm{e}^{2x} + \text{sen}\,(3x + 2)$

$f'(x) = 4(\mathrm{e}^{2x})(2) + [\cos\,(3x + 2)]\,(3)$

$= 8\mathrm{e}^{2x} + 3\cos\,(3x + 2)$

Utilizar las reglas de la constante, de la multiplicación por una constante y de la cadena para derivar el primer término y la regla de la cadena para derivar el segundo término

b $y = \mathrm{e}^x\,\text{sen}\,x$

$y' = \mathrm{e}^x\,(\cos x) + \text{sen}\,x\,(\mathrm{e}^x)$

$= \mathrm{e}^x(\cos x + \text{sen}\,x)$

Utilizar la regla del producto

c $y = \cos^3 x\,\text{sen}\,x$

$= (\cos x)^3\,\text{sen}\,x$

$y' = (\cos x)^3\,(\cos x) + \text{sen}\,x\,(3(\cos x)^2)\,(-\text{sen}\,x)$

$= \cos^4 x - 3\cos^2 x\,\text{sen}^2 x$

Utilizar la regla del producto, y aplicar la regla de la cadena para hallar la derivada de $(\cos x)^3$

d $s(t) = \ln(\text{sen}\,t)$

$s'(t) = \frac{1}{\text{sen}\,t}(\cos t) = \frac{\cos t}{\text{sen}\,t}$ o $\frac{1}{\tan t}$

Aplicar la regla de la cadena

Ejercitación 14C

En las preguntas 1 a 10, halle la derivada de cada función.

1 $f(x) = 6\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 3x$ **2** $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

3 $f(x) = xe^x - e^x$ **4** $s(t) = \frac{1}{2}e^{\operatorname{sen} 2t}$

5 $f(x) = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$ **6** $s(t) = t \tan t$

7 $y = e^{3x}\cos 4x$ **8** $y = \sqrt{\tan 2x}$

9 $f(x) = (\ln x)(\cos x)$ **10** $f(x) = \ln(\cos x)$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

11 a Sea $f(x) = \ln(3x^2)$. Escriba $f'(x)$.

b Sea $g(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$. Escriba $g'(x)$.

c Sea $h(x) = \ln(3x^2)\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. Halle $h'(x)$.

12 Sabiendo que $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}$ y $f'(x) = \frac{\cos x(1 + a\cos^2 x + b\operatorname{sen}^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2}$, halle a y b.

Podemos utilizar las derivadas primera y segunda de una función para analizar el gráfico de la función.

Véase la sección 7.6 en el capítulo 7.

Ejemplo 4

Considere la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$. Analícela sin utilizar la CPG.

a Halle las intersecciones con los ejes coordenados.

b Halle los intervalos en que f es creciente y decreciente y los puntos extremos relativos.

c Halle los intervalos en que f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo y los puntos de inflexión.

d Utilice la información de los apartados **a** a **c** para dibujar aproximadamente el gráfico de f.

Respuestas

a $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

$\operatorname{sen} x = -\cos x$

$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Intersecciones con el eje x: $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$

Para hallar la intersección con el eje x, igualar la función a 0 y despejar x. Utilizar el conocimiento de los valores del círculo de radio unidad para hallar las soluciones.

$f(0) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0$

$= 0 + 1$

$= 1$

Intersección con el eje y: 1

Para hallar la intersección con el eje y, evaluar la función cuando x = 0

▶ Continúa en la página siguiente.

b $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

$\cos x - \operatorname{sen} x = 0$

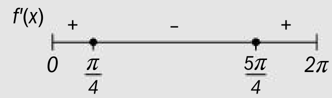
$\cos x = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = 0$ en $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

Hallar la derivada de f y hallar dónde f′(x) = 0

Realizar un diagrama de signos para f

f es creciente cuando f′ es positivo y decreciente cuando f′ es negativo.



Creciente: $0 < x < \frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$

Decreciente: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

La comprobación de la primera derivada nos dice que los extremos relativos se producen cuando la primera derivada cambia de signo.

Punto máximo relativo: $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

Punto mínimo relativo: $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

Evaluar f en $x = \frac{\pi}{4}$ *y* $\frac{5\pi}{4}$ *para hallar los valores máximo y mínimo*

c $f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$

$-\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

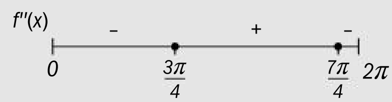
$-\operatorname{sen} x = \cos x$

$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Hallar la segunda derivada de f y hallar dónde f″(x) = 0

Realizar un diagrama de signos para f″

f es cóncava hacia arriba cuando f″ es positiva y cóncava hacia abajo cuando f″ es negativa.



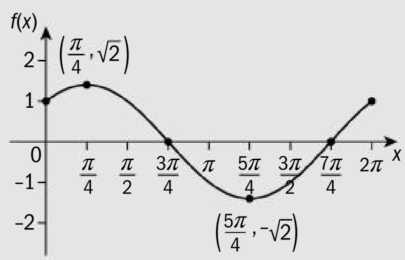
Cóncava hacia arriba: $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

Cóncava hacia abajo: $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$

Puntos de inflexión: $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

Los puntos de inflexión se producen cuando la segunda derivada cambia de signo. Evaluar f en $x = \frac{3\pi}{4}$ *y* $\frac{7\pi}{4}$ *para hallar las coordenadas y de los puntos de inflexión.*

d



Las derivadas son útiles para hallar tanto los extremos relativos como los absolutos en un intervalo cerrado.

A los extremos absolutos se les llama a veces “extremos globales”.

Ejemplo 5

a Muestre cómo utilizar la comprobación de la segunda derivada para hallar las coordenadas x de los extremos relativos de $f(x) = \ln x + \operatorname{sen} x$, en $0 \le x \le 2\pi$.

b Halle los extremos globales de la función $f(x) = x + \operatorname{sen}(x^2)$ en el intervalo cerrado $0 \le x \le \pi$.

Respuestas

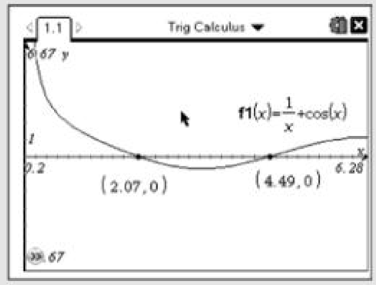
a $f(x) = \ln x + \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \cos x$$

$$\frac{1}{x} + \cos x = 0$$

$x \approx 2{,}07;\ 4{,}49$

Hallar la primera derivada e igualarla a cero para hallar los números críticos. Utilizar la CPG para resolver.



$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \operatorname{sen} x$$

$f''(2{,}07) \approx -1{,}11 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo en $x = 2{,}07$

$f''(4{,}49) \approx 0{,}926 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo en $x = 4{,}49$

Hallar la segunda derivada y evaluar la segunda derivada en cada uno de los valores críticos de la primera derivada
$f'' > 0$ implica un mínimo relativo y $f''(x) < 0$ implica un máximo relativo.

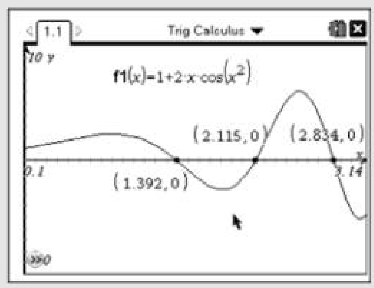
b $f(x) = x + \operatorname{sen}(x^2)$

$f'(x) = 1 + 2x\cos(x^2)$

$1 + 2x\cos(x^2) = 0$

$x = 1{,}392;\ 2{,}115;\ 2{,}834$

Hallar la primera derivada e igualarla a cero para hallar los valores críticos
Utilizar la CPG para resolver



$f(0) = 0$

$f(1{,}392) \approx 2{,}33$

$f(2{,}115) \approx 1{,}14$

$f(2{,}834) \approx 3{,}82$

$f(\pi) \approx 2{,}71$

El máximo es 3,82 y el mínimo es 0.

Evaluar f en los puntos extremos del intervalo y en cada uno de los valores críticos de la primera derivada. El valor más alto es el máximo global y el más bajo es el mínimo.

Ejercitación 14D

No utilice la CPG para las preguntas 1 a 5.

En las preguntas 1 y 2, halle los puntos relativos mínimos y máximos de la función en el intervalo dado.

1 $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$

2 $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x,\ 0 \le x \le 2\pi$

En las preguntas 3 y 4, halle los intervalos en los que las funciones son crecientes, decrecientes, cóncavas hacia arriba y hacia abajo. Halle los puntos mínimos y máximos relativos y los puntos de inflexión. Utilice esta información para dibujar aproximadamente el gráfico de la función.

3 $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x},\ 0 \le x \le \pi$

4 $f(x) = \cos^2(2x),\ 0 \le x \le \pi$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 Sea $f(x) = \cos 2x + \cos^2 x$.

a Muestre que $f'(x) = -3\operatorname{sen} 2x$.

b f tiene un punto mínimo relativo en el intervalo $0 \le x \le \pi$. Halle las coordenadas de este punto.

c Halle $f''(x)$.

d Halle las coordenadas del punto o los puntos de inflexión de f en el intervalo $0 \le x \le \pi$.

En las preguntas 6 a 8 se puede utilizar la CPG.

6 Sea $f(x) = \pi + x \operatorname{sen} x$.

a **i** Halle $f'(x)$.

ii $f''(x)$ puede expresarse en la forma $ax \operatorname{sen} x + b \cos x$. Halle a y b.

b **i** Resuelva la ecuación $f'(x) = 0$ para $0 \le x \le 2\pi$.

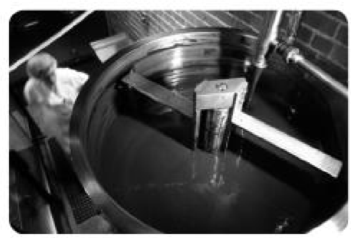
ii A partir de lo anterior, use $f''(x)$ para identificar las coordenadas x de los puntos máximos relativos y los puntos mínimos relativos de f para $0 \le x \le 2\pi$.

7 Sea $f(x) = x^2 \cos x$.

a Halle $f'(x)$.

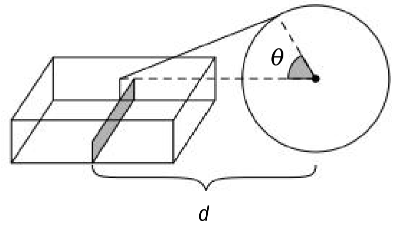
b A partir de lo anterior, halle los extremos globales de $f(x) = x^2 \cos x$ en el intervalo $0 \le x \le 5$.

8 La fotografía muestra la máquina que bate el chocolate en la fábrica de San Francisco. En una cuba se está revolviendo el chocolate por medio de una hoja de acero impulsada por una rueda. La rueda empuja la hoja para un lado y para el otro, por todo el fondo de la cuba. Supongamos que la distancia entre el centro de la rueda y la hoja puede ser modelizada mediante la función



$$d(\theta) = 2\cos\theta + \sqrt{25 - 4\operatorname{sen}^2\theta}$$

donde d es la distancia en metros y θ es el ángulo de rotación de la rueda en radianes.



a Halle $d'(\theta)$.

b Dibuje aproximadamente el gráfico de $d'(\theta)$ para $0 \le \theta \le 2\pi$, y rotule las coordenadas de todas las intersecciones con el eje x y de los puntos mínimos y máximos relativos.

c **i** Explique cómo utilizar el gráfico de $d'(\theta)$ para determinar el ángulo de rotación cuando la distancia entre la hoja y el centro de la rueda alcanza un mínimo. ¿Cuál es ese ángulo y esa distancia?

ii ¿Para qué ángulo(s) de rotación la distancia entre el centro de la rueda y la hoja varía más rápidamente? Explique cómo determina su respuesta.

14.3 Integral del seno y el coseno

En el capítulo 9 estudiamos las siguientes reglas de integración.

Regla de la potencia: $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq 1$

Regla de la constante: $\int k \,\mathrm{d}x = kx + C$

Regla de la multiplicación por una constante: $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Regla de la adición o la sustracción: $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Integrales de $\frac{1}{x}$ y e^x: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C,\ x > 0$

$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

Integral de una composición lineal:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ donde } F'(x) = f(x).$$

Estas integrales resultan directamente de las derivadas del seno y del coseno.

➔ **Integrales de seno y coseno**

$\int \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$

Verificar:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cos x) =$
$-(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

Las integrales de la composición del seno o coseno con una función lineal son:

➔ $\int \operatorname{sen}(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

$\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b) + C$

Podemos utilizar el método de sustitución para hallar algunas integrales o quizás reconocer cuando tenemos una integral de la forma

$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x.$

Ejemplo 6

Halle las integrales.

a $\int 3\,\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x$ **b** $\int \cos(4x-6)\,\mathrm{d}x$

c $\int \mathrm{e}^x \text{sen}\,(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ **d** $\int x^3 \cos(3x^4)\,\mathrm{d}x$

Respuestas

a $\int 3\,\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x = 3\int \text{sen}\,x\,\mathrm{d}x$

$= 3(-\cos x) + C$

$= -3\cos x + C$

Utilizar la regla de la multiplicación por una constante y luego integrar el seno

b $\int \cos(4x-6)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\text{sen}(4x-6) + C$

$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\text{sen}(ax+b) + C$

c $\int \mathrm{e}^x \text{sen}\,(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\text{sen}\,u\,\mathrm{d}x$

$= \int \text{sen}\,u\,\mathrm{d}u$

Reconocer esto como una expresión de la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ *y escribir la respuesta o bien, tomar* $u = e^x$ *y luego utilizar* $\frac{du}{dx} = e^x$

$= -\cos u + C$

$= -\cos \mathrm{e}^x + C$

Simplificar, integrar y reemplazar u por e^x

d $\int x^3\cos(3x^4)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{12}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \times \cos u\mathrm{d}x$

Sea $u = 3x^4$ *y por lo tanto,* $\frac{du}{dx} = 12x^3$.

Entonces $\frac{1}{12}\left(\frac{du}{dx}\right) = x^3$.

$= \frac{1}{12}\int \cos u\,\mathrm{d}u$

Simplificar e integrar

$= \frac{1}{12}\text{sen}\,u + C$

$= \frac{1}{12}\text{sen}\,(3x^4) + C$

Reemplazar u por $3x^4$

Ejercitación 14E

Halle las integrales en las preguntas 1 a 10.

1 $\int (2\cos x + 3\text{sen}\,x)\,\mathrm{d}x$ **2** $\int \left(x^2 + \cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right)\mathrm{d}x$

3 $\int \pi\,\text{sen}(\pi x)\,\mathrm{d}x$ **4** $\int \text{sen}(2x+3)\mathrm{d}x$

5 $\int 20x^3 \cos(5x^4)\,\mathrm{d}x$ **6** $\int (2x-1)\cos(4x^2-4x)\,\mathrm{d}x$

7 $\int \frac{\mathrm{e}^{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)}\mathrm{d}x$ **8** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$

9 $\int \cos x\,\text{sen}^2 x\mathrm{d}x$ **10** $\int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\mathrm{d}x$, para $\cos x > 0$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

11 Sea $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\cos x$.

a Halle $f'(x)$.

b Escriba $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

12 Sea $f(x) = \ln(\cos x)$.

a Muestre que $f'(x) = -\tan x$.

b A partir de lo anterior, halle $\int \tan x \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

Podemos utilizar el **teorema fundamental del cálculo** para evaluar integrales definidas:

Véase la sección 9.4.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \text{ donde } F \text{ es una antiderivada de } f.$$

Ejemplo 7

Evalúe la integral definida sin la CPG, para obtener el valor exacto.
Verifique su respuesta, evaluando la integral definida en la CPG.

a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos x\,\mathrm{d}x$ **b** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x)\cos^3(2x)\,\mathrm{d}x$

Respuestas

a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x$

Aplicar el teorema fundamental del cálculo

$$= 2[\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} 0\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)$$

Evaluar, utilizando los valores del círculo de radio unidad

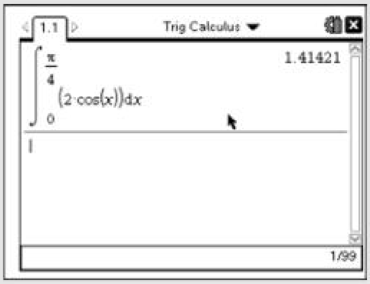
$$= \sqrt{2}$$

Utilizando la CPG:

En la investigación de la sección 9.3 se explica cómo ingresar una integral definida en la calculadora.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos x\,\mathrm{d}x \approx 1{,}41$ y dado que

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$, nuestra respuesta está verificada.



▶ Continúa en la página siguiente.

b $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x)\cos^3(2x)\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \int_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)u^3\mathrm{d}x$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=-1}$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^{-1}$

$\displaystyle = -\frac{1}{8}\left((-1)^4 - 0\right)$

$\displaystyle = -\frac{1}{8}$

Sea $u = \cos(2x)$ y $\dfrac{du}{dx} = -2\operatorname{sen}(2x)$.

Reemplazar sen (2x) por $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$ y $\cos^3(2x)$ por u^3

Cuando $x = \dfrac{\pi}{4}$, $u = \cos\left(2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

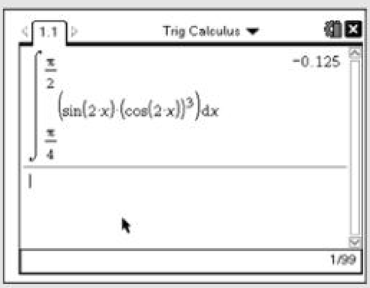
Cuando $x = \dfrac{\pi}{2}$, $u = \cos\left(2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\pi = -1$

Después, aplicar el teorema fundamental del cálculo

Utilizando la CPG: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x)\cos^3(2x)\mathrm{d}x = -0{,}125$

Evaluar la integral integral definida en la CPG

y dado que $-\dfrac{1}{8} = -0{,}125$, nuestra respuesta queda verificada.



Ejercitación 14F

Evalúe la integral definida sin la CPG, para obtener el valor exacto.

Verifique su respuesta, evaluando la integral definida con la CPG.

1 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,\mathrm{d}x$

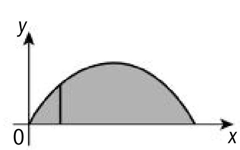
2 $\displaystyle\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x)\,\mathrm{d}x$

3 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x$

4 $\displaystyle\int_{\ln\frac{\pi}{4}}^{\ln\frac{\pi}{3}} e^x\cos(e^x)\,\mathrm{d}x$

Se pueden utilizar integrales definidas para hallar áreas y volúmenes.

➔ Cuando el área delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ se rota 360° alrededor del eje x, el volumen del sólido generado es $\displaystyle\int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x$.

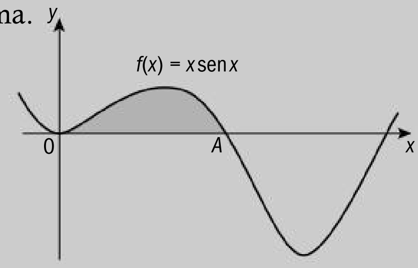


Ejemplo 8

Una porción del gráfico de $f(x) = x \operatorname{sen} x$ se muestra en el diagrama.

a Halle el área de la región sombreada.

b Escriba la integral que representa al volumen del sólido generado cuando la región sombreada se rota 360° alrededor del eje x.
A partir de lo anterior, halle el volumen del sólido.



Respuestas

a $x \operatorname{sen} x = 0$

$x = 0$ o $\operatorname{sen} x = 0$

$x = 0, \pi$

$\int_0^{\pi} x(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x \approx 3{,}14$

b $\pi \int_0^{\pi} \left[x(\operatorname{sen} x)\right]^2 \mathrm{d}x \approx 13{,}8$

Igualar la función a 0 para hallar las coordenadas x de O y A

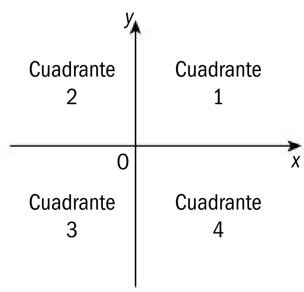
Plantear la integral definida y evaluarla en la CPG

El área de esta región resulta ser π.

Utilizar $\int_a^b \pi y^2 dx$ *para plantear la integral definida y evaluarla en la CPG*

También podemos hallar el área entre dos curvas.

➔ Si $y_1 \geq y_2$ para todo x en $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b (y_1 - y_2)\mathrm{d}x$ es el área entre las dos curvas.



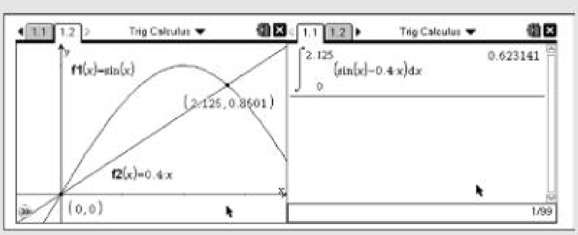
Ejemplo 9

Halle el área de la región en el cuadrante 1 delimitada por las curvas $y = 0{,}4x$ e $y = \operatorname{sen} x$.

Respuesta

$$\text{Área} = \int_0^{2{,}125} (\operatorname{sen}(x)) - 0{,}4x)\,\mathrm{d}x$$

$$\approx 0{,}623$$



Utilizar la CPG para dibujar el gráfico y hallar los puntos de intersección donde sen x = 0,4x

El área es igual a $\int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$

donde a = 0 y b ≈ 2,125.
Dado que sen x ≥ 0,4x para 0 ≤ x ≤ 2,125, elegir y_1 *= sen x e* y_2 *= 0,4x*

Ejercitación 14G

En las preguntas 1 y 2, las curvas dadas delimitan una región.
Utilice una integral definida para hallar el área de la región.

1 $y = x \operatorname{sen} x$ e $y = 2x - 6$ en el cuadrante 1

2 $y = x^2 - 2$ e $y = x + \cos x$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Sabiendo que $\int_0^k \cos x\,dx = \frac{1}{2}$ y $0 \le k \le \frac{\pi}{2}$, halle el valor **exacto** de k.

4 Sea $f(x) = \tan\sqrt{x}$. Considere la región en el primer cuadrante delimitada por f, el eje x y la recta $x = 2$.

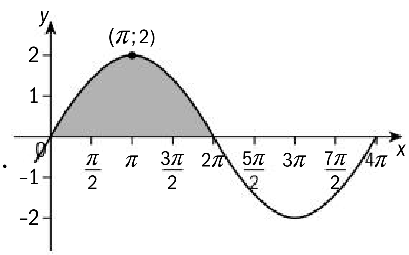
a Halle el área de la región.

b Escriba la integral que representa el volumen del sólido generado cuando la región se rota 360° alrededor del eje x. A partir de lo anterior, halle el volumen del sólido.

5 El gráfico representa la función $f(x) = a$ sen (bx).

a Halle los valores de a y b.

b A partir de lo anterior, halle el área de la región sombreada.



6 El diagrama muestra parte del gráfico de $y = \cos x + \text{sen } 2x$. Las regiones A y B están sombreadas.

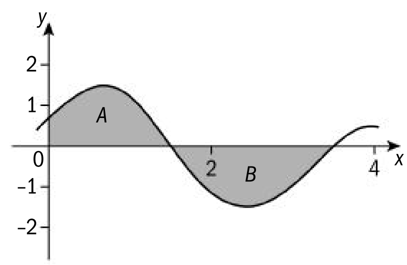
a **i** $y = \cos x + \text{sen } 2x$ puede escribirse como $y = \cos x(c + d \text{ sen } x)$. Halle los valores de c y d.

ii A partir de lo anterior, halle el valor **exacto** de las dos intersecciones con el eje x representadas en el diagrama.

b **i** Halle el área de la región A.

ii Halle el área total de las regiones sombreadas.

c Halle el volumen del sólido generado cuando la región A se rota 360° alrededor del eje x.



14.4 Un repaso al tema del movimiento lineal

Las derivadas y las integrales se emplean en problemas de cinemática relacionados con movimientos a lo largo de una recta.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una recta y que su posición desde un origen en cualquier tiempo t está dada por la función desplazamiento $s(t)$. Entonces tenemos las siguientes relaciones:

Función desplazamiento $= s(t)$

Velocidad $v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

Aceleración $a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t)$ o $s''(t)$

Distancia total recorrida desde el instante t_1 al t_2 $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$

Ahora veremos algunos ejemplos en los que el movimiento lineal se modeliza mediante funciones trigonométricas.

Material de ampliación disponible en línea:
Hoja de ejercicios 14: Más derivadas e integrales trigonométricas

Recordemos que:
Inicialmente → en el tiempo 0
En reposo → $v(t) = 0$
Inicialmente en reposo → $v(0) = 0$
Movimiento a la derecha o hacia arriba → $v(t) > 0$
Movimiento a la izquierda o hacia abajo → $v(t) < 0$
Celeridad = |velocidad|

Ejemplo 10

Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal. El desplazamiento de la partícula, en metros, desde un origen O, está dado por $s(t) = 5 - 2\cos 3t$ para un tiempo t en segundos.

a Halle la velocidad de la partícula y la aceleración en un tiempo t.

b Halle el desplazamiento inicial, la velocidad y la aceleración de la partícula.

c Halle cuándo la partícula se mueve hacia la derecha, hacia la izquierda y cuándo se detiene, durante el tiempo $0 \le t \le \pi$.

d Escriba una integral definida que represente la distancia total recorrida para $0 \le t \le \pi$ segundos y utilice la CPG para hallar la distancia.

Respuestas

a $v(t) = 0 - 2(-\text{sen}\, 3t)(3)$

$= 6\,\text{sen}\, 3t$

$v(t) = s'(t)$

$a(t) = 6(\cos 3t)(3)$

$= 18\cos 3t$

$a(t) = v'(t)$

b $s(0) = 5 - 2\cos(3(0))$

$= 5 - 2(1) = 3\text{ m}$

Evaluar cada función en $t = 0$

$v(0) = 6\,\text{sen}(3(0))$

$= 6(0) = 0\text{ m s}^{-1}$

$a(0) = 18\cos(3(0))$

$= 18(1) = 18\text{ m s}^{-2}$

c $v(t) = 0$

$6\,\text{sen}\, 3t = 0$

$\text{sen}\, 3t = 0$

$3t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$

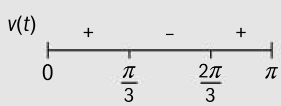
La partícula está en reposo en $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ y π segundos.

La partícula se mueve hacia la derecha cuando

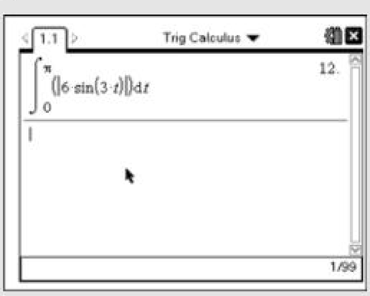
$0 < t < \frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3} < t < \pi$

segundos y hacia la izquierda cuando $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$ segundos.

La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$. La partícula se mueve hacia la derecha cuando $v(t) > 0$ y hacia la izquierda cuando $v(t) < 0$. Un diagrama de signos es útil para analizar el movimiento.



d $\int_0^{\pi} |6\,\text{sen}\, 3t|\, dt = 12\text{ m}$



La distancia total recorrida desde el instante t_1 al t_2 es $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$.

Utilizar la CPG para evaluar la integral

Ejemplo 11

Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo tal que su velocidad, v m s^{-1} en un tiempo de t segundos viene dada por $v(t) = 5\,\text{sen}\,t\cos^2 t$.

a Halle la celeridad de la partícula cuando $t = \frac{5\pi}{6}$ segundos.

b Cuando $t = 0$, el desplazamiento, s, de la partícula es 3 m.
Halle una expresión para s en función de t.

c Halle una expresión para la aceleración, a, de la partícula en función de t.

Respuestas

a $v\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 5\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{15}{8}$

Celeridad $= \left|\frac{15}{8}\right| = \frac{15}{8}$ m s^{-1}

La velocidad tiene tanto magnitud como dirección, y la celeridad es la magnitud de la velocidad. Por lo tanto, celeridad = |velocidad|.

b $\int 5\,\text{sen}\,t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int 5\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)u^2\,\mathrm{d}t$

$= -5\int u^2\,\mathrm{d}u$

$= -5\left(\frac{1}{3}u^3\right) + C$

$s(t) = -\frac{5}{3}\cos^3 t + C$

Integrar la velocidad para obtener el desplazamiento
Utilizando sustitución, sea $u = \cos t$,
entonces, $\frac{du}{dt} = -\text{sen}\,t$
por lo tanto, $-\frac{du}{dt} = \text{sen}\,t$.

$3 = -\frac{5}{3}\cos^3(0) + C$

$3 = -\frac{5}{3}(1) + C$

$C = \frac{14}{3}$

Usar el dato de que s(0) = 3 para hallar C

Por lo tanto, $s(t) = -\frac{5}{3}\cos^3 t + \frac{14}{3}$

c $a(t) = v'(t)$

$= 5\,\text{sen}\,t\left[2(\cos t)(-\text{sen}\,t)\right] + \cos^2 t(5\cos t)$

$= -10\,\text{sen}^2 t\cos t + 5\cos^3 t$

Utilizar la regla del producto y la regla de la cadena para hallar la derivada de la velocidad

Ejercitación 14H

No utilice la CPG para las preguntas 1 a 3.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

1 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo tal que su desplazamiento s en metros desde un origen O está dado por $s(t) = \mathrm{e}^t\,\text{sen}\,t$ para un tiempo de t segundos.

a Escriba una expresión para la velocidad, v, en función de t.

b Escriba una expresión para la aceleración, a, en función de t.

2 Una partícula se mueve a lo largo de una recta. El desplazamiento de la partícula, en metros, desde un origen O está dado por $s(t) = 1 - 2\,\text{sen}\, t$ para un tiempo de t segundos.

a Calcule la velocidad cuando $t = 0$.

b Calcule el valor de t, para $0 < t < \pi$, en el que la velocidad es cero.

c Calcule el desplazamiento de la partícula desde O cuando la velocidad es cero.

3 La velocidad v m s^{-1} de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta horizontal en un tiempo de t segundos está dada por $v(t) = e^{\text{sen}\, t} \cos t$.

a **i** Halle cuándo la partícula está en reposo durante el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

ii Halle cuándo la partícula se mueve hacia la izquierda durante el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

b Halle la aceleración a del cuerpo en función de t.

c El desplazamiento inicial s es de 4 metros. Halle una expresión para s en función de t.

En las preguntas 4 a 6 se permite el uso de la CPG.

4 Un objeto comienza a moverse desde un punto fijo O. Su velocidad v m s^{-1} después de t segundos viene dada por $v(t) = 4\,\text{sen}\, t + 3\cos t$, $t \ge 0$.

Sea d el desplazamiento desde O cuando $t = 4$.

a Escriba una integral que represente d.

b Calcule el valor de d.

5 Una partícula se mueve con una velocidad v m s^{-1} dada por

$$v(t) = -(t+1)\text{sen}\left(\frac{t^2}{2}\right) \text{ donde } t \ge 0.$$

a **i** Halle la aceleración en el instante 1,5 segundos.

ii Una partícula está acelerando la marcha cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo y aminorando la marcha cuando los signos son diferentes. Determine si la partícula está acelerando o aminorando la marcha en el instante 1,5 segundos.

b Halle todos los instantes en los que la partícula cambia de dirección en el intervalo $0 < t < 4$.

c Halle la distancia total recorrida por la partícula durante el tiempo $0 < t < 4$.

6 La velocidad v m s^{-1} de una partícula que se mueve en línea recta está dada por $v(t) = e^{2\text{sen}\, t} - 1$; t es el tiempo en segundos para $0 \le t \le 12$.

a Halle la aceleración de la partícula en $t = 1$.

b **i** Dibuje aproximadamente un gráfico de $v(t) = e^{2\text{sen}\, t} - 1$ para $0 \le t \le 12$.

ii Determine el valor o los valores de t, para $0 \le t \le 12$, donde la partícula tiene una velocidad de 5 m s^{-1}.

iii En el instante $t = 0$, la partícula está en el origen. Utilice el gráfico de la velocidad para explicar si la partícula regresa o no al origen en el intervalo $0 \le t \le 12$.

c Halle la distancia recorrida en los 12 segundos.

Ejercicio de revisión

1 Halle la derivada de:

a $f(x) = \cos(1 - 2x)$ **b** $y = \operatorname{sen}^3 x$ **c** $s(t) = e^{\tan t}$

d $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x^2}$ **e** $f(x) = x^2 \cos x$ **f** $y = \ln(\tan x)$

g $f(x) = (\ln x)(\operatorname{sen} x)$ **h** $y = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

2 Halle la integral:

a $\int (4x^3 - \operatorname{sen} x)\mathrm{d}x$ **b** $\int \cos(3x)\mathrm{d}x$ **c** $\int \operatorname{sen}(4x+1)\mathrm{d}x$

d $\int x\cos(2x^2)\mathrm{d}x$ **e** $\int \frac{\operatorname{sen}(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\mathrm{d}t$ **f** $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$

g $\int x e^{\operatorname{sen} x^2} \cos x^2 \mathrm{d}x$ **h** $\int \frac{6\cos x}{(2+\operatorname{sen} x)^2}\mathrm{d}x$

3 Evalúe la integral definida:

a $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$ **b** $\int_0^{\pi} (1 + \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$

c $\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x + \cos 2x)\,\mathrm{d}x$ **d** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x \cos x \,\mathrm{d}x$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Halle la ecuación de la normal a la función con fórmula $y = \cos(3x - 6)$ en el punto $(2,1)$.

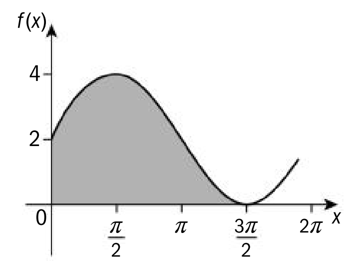
5 Halle las coordenadas del punto en el gráfico de $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, $0 \le x \le \pi$, en el cual la tangente es paralela a la recta $y = \frac{1}{4}x + 3$.

6 Una función $y = f(x)$ pasa por el punto (0,2). Su función derivada es $f'(x) = x - \operatorname{sen} x$. Halle la fórmula de la función.

7 El gráfico representa la función $f(x) = p \operatorname{sen}(x) + q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Halle:

a Los valores de p y q

b El área de la región sombreada



Ejercicio de revisión

1 Las curvas dadas delimitan una región. Utilice una integral definida para hallar el área de la región.

a $y = 2\cos^2 x + \cos x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ y el eje x

b $y = \sqrt{2\operatorname{sen} x}$ e $y = 0{,}5x$

2 Las curvas dadas delimitan una región. Utilice una integral definida para hallar el volumen del sólido generado cuando la región se rota 360° alrededor del eje x.

a $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x para $0 \le x \le \pi$

b $y = e^{\cos x}$, $x = 0$ y $x = 2\pi$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 El área bajo la curva $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = k$, donde $0 < k < \frac{\pi}{2}$, es de 0,942. Halle el valor de k.

4 Sea $s(t) = 2e^{\cos(5t)} - 4$.

a **i** Halle $s'(t)$.

ii Muestre que $s''(t) = 50\,e^{\cos(5t)}(\text{sen}^2(5t) - \cos(5t))$.

iii A partir de lo anterior, verifique que s tiene un mínimo relativo en $t = \frac{\pi}{5}$.

b s es la función desplazamiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, donde s se mide en metros y t en segundos.

Halle la distancia total recorrida por la partícula de $t = 0$ a $t = 2$ segundos.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 14

Derivadas de las funciones trigonométricas

- Derivadas del seno, el coseno y la tangente:

$f(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}\, x$

$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \cos x \neq 0$

Integrales del seno y el coseno

- Integrales del seno y el coseno:

$\int \text{sen}\, x\, \text{d}x = -\cos x + C$

$\int \cos x\, \text{d}x = \text{sen}\, x + C$

- $\int \text{sen}(ax+b)\text{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

$\int \cos(ax+b)\text{d}x = \frac{1}{a}\text{sen}(ax+b) + C$

- Cuando el área delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ se rota 360° alrededor del eje x, el volumen del sólido generado es $\int_a^b \pi y^2\, \text{d}x$.

- Si $y_1 \geq y_2$ para todo x en $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b (y_1 - y_2)\, \text{d}x$ es el área entre las dos curvas.

De la conjetura a la prueba

En la investigación sobre la derivada del seno se representó gráficamente la derivada de sen x, lo cual condujo a conjeturar que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$. Esto se verificó con varios valores y resultó ser verdadero para estos valores.

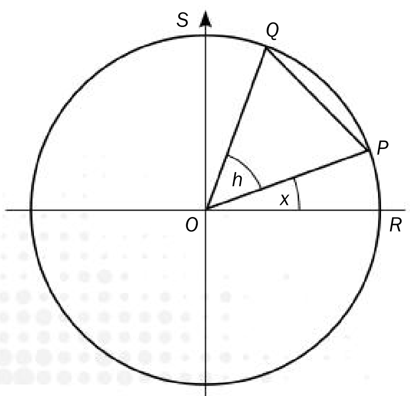
- ¿Demuestra lo anterior que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$?

Siga los siguientes pasos para hallar la derivada del seno por un método geométrico.

- Para cada paso, ¿está usando razonamiento inductivo o deductivo?

Paso 1

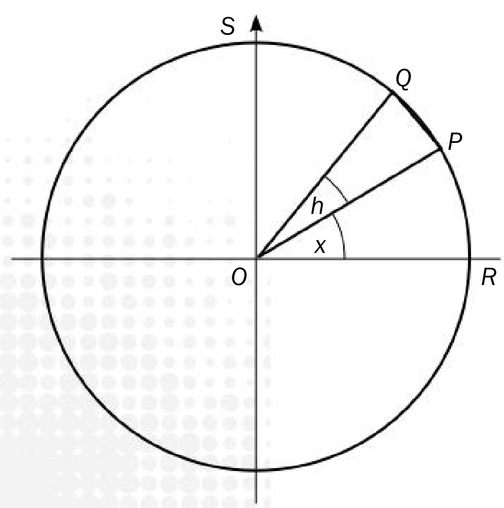
He aquí un círculo de radio unidad. $Q\hat{O}P = h$ rad.



- ¿Cómo sabe que ΔQOP es isósceles?
- A partir de lo anterior, ¿por qué $O\hat{Q}P$ es igual a $\frac{\pi - h}{2}$ radianes?
- ¿Y por qué el arco QP es igual a h?

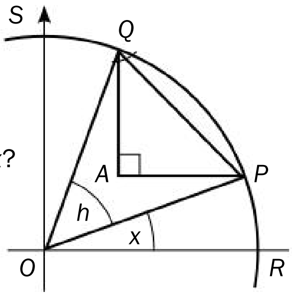
Paso 2

- A medida que h se acerca a cero ¿qué sucede con la longitud del arco QP *en relación* con la longitud del segmento QP?



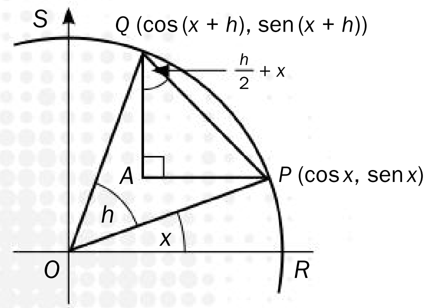
Paso 3

- ¿Por qué $S\hat{O}Q$ es igual a $\frac{\pi}{2} - h - x$?
- Halle un segmento de recta paralelo a SO.
- A partir de lo anterior, ¿por qué $O\hat{Q}A$ también es igual a $\frac{\pi}{2} - h - x$?
- Utilice $O\hat{Q}P$ y $O\hat{Q}A$ para explicar por qué $A\hat{Q}P = \frac{h}{2} + x$.



Paso 4

- ¿Por qué QA es igual a $\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x$?

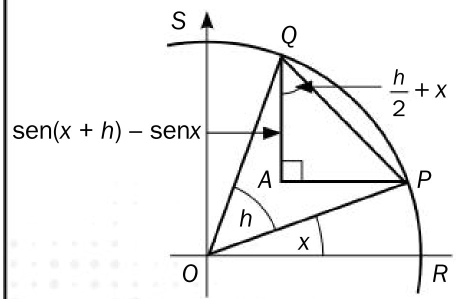


Paso 5

Ahora muestre que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$.

Justifique cada uno de los pasos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{QA}{\text{arco } QP}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{QA}{QP}\\ &= \lim_{h\to 0} \left[\cos\left(\frac{h}{2} + x\right)\right]\\ &= \cos x\end{aligned}$$



- ¿Qué tipo de razonamiento utilizó para mostrar que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$? ¿Inductivo o deductivo?
- Explique su respuesta. Dé un ejemplo del otro tipo de razonamiento.
- ¿Demuestra esto que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$?

"Todos los enunciados matemáticos importantes pueden expresarse con palabras sencillas. Pero mientras que al hacerlo llenaríamos varias páginas, si utilizamos la notación matemática podríamos necesitar tan solo un renglón. Una de las maneras para lograr esta reducción notable consiste en emplear símbolos para expresar enunciados, instrucciones y demás".

Lancelot Hogben (1895–1975)
Científico británico

Símbolos matemáticos

Los conceptos fundamentales del análisis provienen de la investigación de los límites a infinito. Se le atribuye al matemático inglés John Wallis la introducción del símbolo ∞ para infinito.

- ¿Podría haberse desarrollado el análisis sin el uso de los símbolos matemáticos?

▶ John Wallis (1616–1703)

15 Distribuciones de probabilidad

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

5.7 Concepto de variable aleatoria discreta y sus distribuciones de probabilidad; valor esperado (media); E(*X*) para datos discretos; aplicaciones.
5.8 Distribución binomial; su media y varianza.
5.9 Distribuciones normales y curvas normales; estandarización o tipificación de la variable (valores *z*); propiedades de la distribución normal.

Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Calcular la media de un conjunto de números. Por ejemplo: Calcular la media de esta distribución de frecuencias de *x*:

x	0	1	2	3
Frecuencia	3	6	9	2

$$\bar{x} = \frac{\sum f x}{\sum f} = \frac{(0 \times 3) + (1 \times 6) + (2 \times 9) + (3 \times 2)}{3 + 6 + 9 + 2}$$
$$= \frac{30}{20} = 1{,}5$$

2 Usar la notación $\binom{n}{r}$

Por ejemplo: Evaluar $\binom{5}{2}$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

3 Resolver ecuaciones

Por ejemplo: Resolver la ecuación $\frac{4}{x} = 3$

$\frac{4}{x} = 3 \quad 4 = 3x \quad x = \frac{4}{3}$

Comprobemos nuestras habilidades

1 Calcule la media de estas distribuciones de frecuencias de *x:*

a

x	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	3	5	7	9	6	2

b

x	10	12	15	17	20
Frecuencia	3	10	15	9	2

Repita la pregunta 1 usando la calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG).

2 Evalúe:

a $\binom{6}{2}$ **b** $\binom{8}{5}$ **c** $\binom{9}{6}(0{,}3)^3\,(0{,}7)^6$

3 Resuelva las siguientes ecuaciones:

a $\frac{5{,}5}{x} = 3{,}2$ **b** $\frac{x - 2{,}5}{1{,}2} = 0{,}4$

c $\frac{9 - x}{0{,}2} = 1{,}6$

Durante la copa mundial de fútbol de 2010, un personaje un tanto inusual alcanzó celebridad. Un pulpo llamado Paul logró predecir el resultado de 12 partidos de 14 que se jugaron entre 2008 y 2010. Paul vivía en un estanque en el acuario municipal de Oberhausen (Alemania) y se hizo internacionalmente famoso por sus hábitos alimentarios que se usaron para predecir el resultado de una serie de partidos. En el tanque donde vivía se colocaban dos cajas que contenían un mejillón cada una y la bandera de las dos selecciones nacionales que se enfrentaban. La elección del mejillón que se comería primero se intepretaba como una predicción del país que iba a ganar el partido. Paul acertó el 86% de las veces.

En este capítulo analizaremos situaciones como estas y cómo determinar la probabilidad de un suceso, *si se debiese exclusivamente al azar*. Aunque... ¡quizás Paul sí fue capaz de predecir los resultados de los partidos de fútbol!

¿Por qué las personas quieren creer que algo o alguien (como un pulpo) puede predecir el futuro cuando, racionalmente, predecir el futuro parece ser ilógico?

15.1 Variables aleatorias

➔ Una **variable aleatoria** es una cantidad cuyo valor depende del azar.

Las variables aleatorias se representan con letras mayúsculas.
He aquí unos ejemplos de variables aleatorias:

X = El número de veces que sale un seis cuando se arroja el dado tres veces

B = El número de bebés en un embarazo

M = La masa de un paquete de papas fritas

T = El tiempo empleado por un corredor para completar 100 m

Las variables aleatorias pueden ser de dos tipos:

Variables aleatorias discretas: pueden tener un número finito o contable de valores (por ejemplo, X y B anteriores).

Variables aleatorias continuas: pueden tomar cualquier valor dentro de un cierto intervalo (por ejemplo, M y T anteriores).

Tomemos la variable aleatoria discreta X, el número de veces que sale un seis al arrojar un dado tres veces. Podemos escribir $P(X = x)$ para representar "la probabilidad de que el número de veces que sale un seis sea x", donde x puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.

Una variable discreta no necesariamente debe tomar solo valores positivos enteros (por ejemplo, los tamaños de zapatos de un grupo de estudiantes pueden tomar valores de …4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; …).

Deberá usarse una letra mayúscula para designar a una variable aleatoria y letras minúsculas para los valores reales que puede tomar la variable.

La primera tabla de valores aleatorios fue publicada por Leonard Tippett, un estadístico británico, en 1927. Tippett tomó números "al azar" de registros censales. Hacia 1939, Maurice Kendall y Bernard Babington Smith consiguieron publicar un conjunto de 100 000 dígitos usando una máquina especializada operada por un ser humano. Para usar esta lista, se debe decidir el punto de partida, el número de dígitos y la dirección (arriba, abajo, derecha, izquierda, diagonal, etc.) antes de seleccionar los números.
Por ejemplo, comenzando en el 15.° número en la quinta fila, yendo hacia atrás, da 22, 40, 20, 44, 62, …
La mayoría de los computadores y las calculadoras pueden emplearse hoy en día para generar números aleatorios. En realidad, se trata de números pseudoaleatorios, puesto que son generados por una fórmula matemática, pero parecen números aleatorios.

73735	45963	78134	63873
02965	58303	90708	20025
98859	23851	27965	62394
33666	62570	64775	78428
81666	26440	20422	05720
15838	47174	76866	14330
89793	34378	08730	56522
78155	22466	81978	57323
16381	66207	11698	99314
75002	80827	53867	37797
99982	27601	62686	44711
84543	87442	50033	14021
77757	54043	46176	42391
80871	32792	87989	72248
30500	28220	12444	71840

Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas

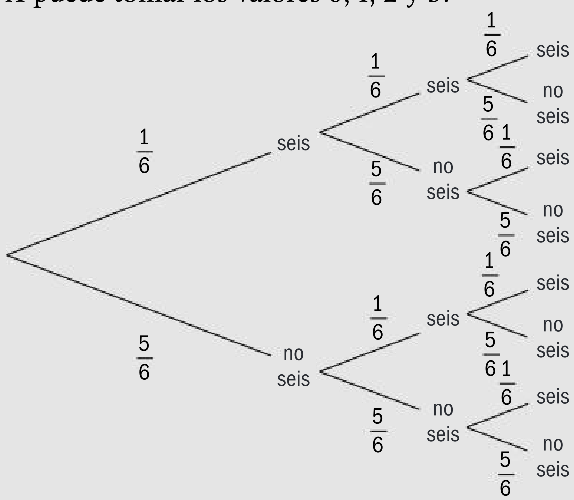
➔ Una **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta es una lista de todos los valores posibles de la variable aleatoria y la probabilidad de que ocurra cada valor.

Ejemplo 1

Sea X sea la variable aleatoria que representa el número de veces que sale un seis cuando se arroja un dado tres veces. Tabule la distribución de probabilidad de X.

Respuesta

X puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.



$p(3 \text{ seises}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$p(2 \text{ seises}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$

$p(2 \text{ seises}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$

$p(1 \text{ seis}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

$p(2 \text{ seises}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$

$p(1 \text{ seis}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

$p(1 \text{ seis}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

$p(0 \text{ seises}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

Usar un diagrama de árbol para hallar los valores de $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ y $P(X = 3)$

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

Escribir las probabilidades en una tabla

Vemos que, en el ejemplo, la suma de las probabilidades es:

$$\frac{125}{216} + \frac{25}{72} + \frac{5}{72} + \frac{1}{216} = 1$$

➔ Para cualquier variable aleatoria X

$0 \leq P(X = x) \leq 1 \qquad \sum P(X = x) = 1$

Algunas veces $P(X = x)$ se reemplaza simplemente por $P(x)$ o P_x: los significados son análogos.

$0 \leq P(X = x) \leq 1$ significa que una probabilidad siempre debe estar entre 0 y 1.
$\sum P(X = x) = 1$ significa que la suma de las probabilidades siempre será 1.

Ejemplo 2

La variable aleatoria X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$7c$	$5c$	$4c$	$3c$	c

a Halle el valor de c. **b** Halle $P(X \geq 4)$.

Respuestas

a $7c + 5c + 4c + 3c + c = 1$ *Usar $\sum P(X = x) = 1$*

$20c = 1$ *Resolver en c*

$c = \frac{1}{20}$

b $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$

$= \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

La solución de muchas preguntas de examen parten del hecho de que la suma de las probabilidades debe ser siempre 1.

Ejercitación 15A

1 Decida si cada variable aleatoria es continua o discreta:

a A es "la edad en años completos de la próxima persona que me llame por teléfono".

b B es "la longitud de la próxima banana que compre en el mercado".

c C es "la cantidad de gatos que veré antes de ver un gato blanco".

d D es "el diámetro de las rosquillas en la cafetería".

2 Tabule la distribución de probabilidad de cada variable aleatoria:

a La suma de las caras cuando se lanzan dos dados normales

b El número de veces que se obtiene un seis cuando se lanzan dos dados normales

c El número más pequeño o igual cuando se lanzan dos dados normales

d El producto de las caras cuando se lanzan dos dados normales

3 Un dado equilibrado (no cargado) de seis caras tiene un "1" en una cara, un "2" en dos de sus caras y un "3" en las otras tres caras. El dado se lanza dos veces. T es la variable aleatoria "valor total lanzado". Halle:

a La distribución de probabilidad de T

b La probabilidad de que el resultado total sea mayor que 4

Un dado equilibrado es un dado que tiene la misma probabilidad de caer sobre cualquiera de sus caras.

4 Un juego de mesa se juega moviendo un contador S lugares hacia adelante por jugada, siguiendo esta regla:
Se arroja un dado equilibrado de seis caras una vez. Si el número es par, S es la mitad de ese número.
Si el número es impar, S es dos veces el número que muestra el dado.

a Escriba una tabla que muestre los posibles valores de S y sus probabilidades.

b ¿Cuál es la probabilidad de que en una sola jugada el contador se mueva más de dos espacios?

5 La variable aleatoria X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	c	c

a Halle el valor de c.

b Halle $\mathrm{P}(1 < X < 4)$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

6 La distribución de probabilidad de una variable aleatoria Y viene dada por $\mathrm{P}(Y = y) = cy^3$ para $y = 1, 2, 3$.
Sabiendo que c es una constante, halle el valor de c.

En la pregunta 6, $\mathrm{P}(Y = y) = cy^3$.
Esto se conoce como función de probabilidad de Y. Podemos usarla para hallar la probabilidad de los distintos valores de la variable aleatoria Y.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

7 La variable aleatoria X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$2k$	$4k^2$	$6k^2$	k

Halle el valor de k.

8 La variable aleatoria X tiene la distribución de probabilidad dada por $P(X = x) = k\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ para $x = 1, 2, 3, 4$, y k es una constante.

Halle el valor exacto de k.

9 La variable aleatoria discreta X puede tomar solamente los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5. La distribución de probabilidad de X viene dada por

$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = a$

$P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = b$

$P(X \geq 2) = 3P(X < 2)$

donde a y b son constantes.

a Determine los valores de a y b.

b Determine la probabilidad de que la suma de dos observaciones independientes de esta distribución sea superior a 7.

10 Las variables aleatorias discretas A y B son independientes y tienen las siguientes distribuciones:

A	1	2	3
$P(A = a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

B	1	2	3
$P(B = b)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

La variable aleatoria C es la suma de una observación de A y una observación de B.

a Muestre que $P(C = 3) = \frac{5}{18}$.

b Tabule la distribución de probabilidad de C.

Esperanza matemática

El **valor medio** o **esperado** de una variable aleatoria X es el valor promedio que deberíamos esperar para X cuando se realizan muchas repeticiones del experimento.

El valor medio o esperado de una variable aleatoria X se representa con $E(X)$.

La esperanza matemática es en verdad la media de la distribución en cuestión (la población original). Se denota a menudo con μ.

Investigación: resultados de los dados

Se lanzan simultáneamente dos dados y se anota la diferencia, *D*, entre los resultados de los dados.

1 Copie y complete la distribución de probabilidad de *D*.

d	0	1	2	3	4	5
P(*D* = *d*)		$\frac{10}{36}$				

2 Se repite el experimento 36 veces. Copie y complete la siguiente tabla para mostrar la frecuencia con la que se espera obtener cada uno de los diferentes valores de *d*.

d	0	1	2	3	4	5
Frecuencia esperada		10				

Puede resultar útil dibujar un diagrama del espacio muestral, como los del capítulo 3.

3 Calcule la media de esta distribución de frecuencias.

4 El experimento original se repite 100 veces. Repita las preguntas 2 y 3 para esta situación:

d	0	1	2	3	4	5
Frecuencia esperada		$\frac{250}{9}$				

5 ¿Qué observa?

6 ¿Cuál sería la media si se repitiera el experimento 10 veces? ¿O 1000 veces? ¿O solo una vez?

Se espera que la media sea la misma en cada caso. Por lo tanto, podemos hallar la media o valor esperado de la variable aleatoria *D* simplemente multiplicando cada valor de *d* por su respectiva probabilidad (el equivalente de la realización del experimento solo una vez), y sumando estos productos.

➔ El valor esperado de una variable aleatoria *X* es $\mathrm{E}(X) = \sum x\,\mathrm{P}(X = x)$.

Ejemplo 3

Esta es la distribución de probabilidad del ejemplo 1: ¿Cuál es el valor esperado de *X*?

x	0	1	2	3
P(*X* = *x*)	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

Respuesta

Usando la fórmula:

$$\mathrm{E}(X) = \left(0 \times \frac{125}{216}\right) + \left(1 \times \frac{25}{72}\right) + \left(2 \times \frac{5}{72}\right) + \left(3 \times \frac{1}{216}\right)$$

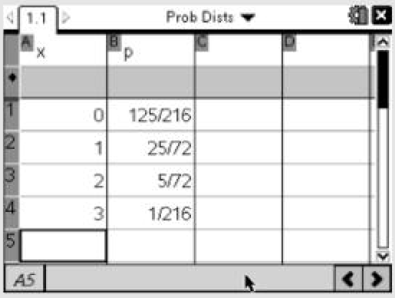
$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$$

Usar $E(X) = \sum x\, P(X = x)$

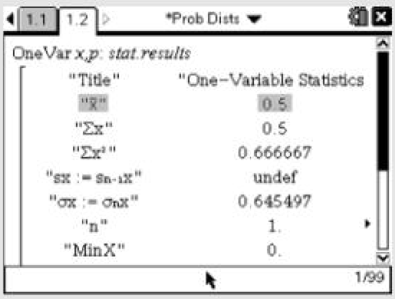
Por lo tanto, si repetimos muchas veces el experimento de arrojar un dado tres veces, podemos esperar que el número medio de veces que sale un seis sea 0,5.

▶ Continúa en la página siguiente.

Usando una CPG:



Ingresar la lista de posibles valores que toma X en x y el conjunto de los correspondientes valores de las probabilidades P(X = x) en p



E(X) = $\bar{x}$ = 0,5

Ahora usar **One-Var Statistics** *(estadísticas de una variable) como cuando hallamos la media de un conjunto de datos*
Usar X en la opción "X1 List" (lista X1) y p en la opción "Frequency List" (lista de frecuencias)
Vemos que el valor esperado de X no necesita ser uno de los valores que puede tomar la variable X.

En las secciones 5.1 y 5.2 del capítulo 17 hay más orientación sobre cómo ingresar los datos en la CPG.

Ejercitación 15B

1 Al lanzar un dado normal de seis caras, sea X la variable aleatoria definida por X = el cuadrado del resultado que muestra el dado. ¿Cuál es la esperanza matemática de X?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 La variable aleatoria Z tiene la siguiente distribución de probabilidad:

z	2	3	5	7	11
P(Z = z)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	x	y

y $\mathrm{E}(Z) = 5\frac{2}{3}$.

Halle x e y.

3 Un "dado Finobacci" es equilibrado, y tiene seis caras marcadas con los números 1, 2, 3, 5, 8, 13. ¿Cuál es la puntuación esperada cuando se lanza el dado?

4 Una variable aleatoria X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$\mathrm{P}(x) = \frac{x}{36}$ para $x = 1, 2, 3, \ldots, 8$

Halle E(X).

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 Para una variable aleatoria discreta X, la distribución de probabilidad viene dada por:

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} kx & x=1, 2, 3, 4, 5 \\ k(10-x) & x=6, 7, 8, 9 \end{cases}$$

Halle:

a El valor de la constante k **b** $\mathrm{E}(X)$

6 **a** Copie y complete, en función de k, la siguiente distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta, X:

x	1	2	3
P(X = x)	0,2	$1-k$	

b ¿Qué rango de valores puede tomar k? Dé su respuesta en la forma $a \le k \le b$, a, $b \in Q$.

c Halle la media de la distribución, en función de k.

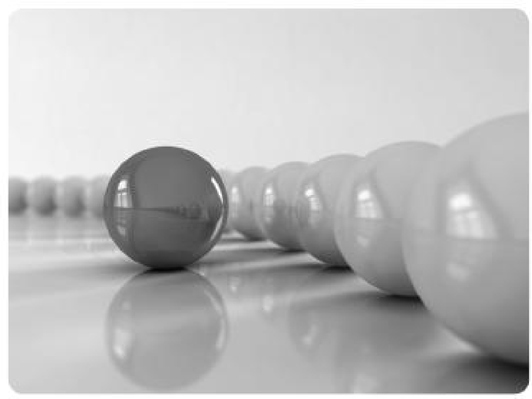
7 X es una variable aleatoria discreta que solo puede tomar los valores 1, 2 y 4. Se sabe que $\mathrm{P}(X = 2) = 0{,}3$ y que la media de la distribución es 2,8.
Halle $\mathrm{P}(X = 1)$.

8 Hay diez bolas en una bolsa. Todas son de idéntico tamaño pero dos de ellas son rojas y el resto son azules. Se escogen bolas de la bolsa, al azar, y no se reponen. Sea R el número de bolas extraídas hasta escoger la primera roja (incluida).

a Enumere los posibles valores de R y sus probabilidades.

b Calcule el valor medio de R.

c ¿Cuál es el valor más probable de R?



9 Hay diez bolas en la bolsa, como en la pregunta 8. Las bolas se vuelven a elegir al azar, pero esta vez cada bola se repone antes de extraer la siguiente.

a Muestre que la probabilidad de extraer la primera bola roja en el segundo experimento es $\frac{4}{25}$.

b Calcule la probabilidad de extraer la primera bola roja en el tercer experimento.

c Deduzca una fórmula para hallar la probabilidad de extraer la primera bola roja en el experimento n.

d ¿Cuál es el valor más probable de R?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

10 Se compra un billete de lotería instantánea por un valor de \$2. Los posibles premios son \$0, \$2, \$20, \$200 y \$1000. Sea Z la variable aleatoria que representa la cantidad ganada con el billete. Z tiene la siguiente distribución:

z	0	2	20	200	1000
$P(Z = z)$		0,2	0,05	0,001	0,0001

a Determine $P(Z = 0)$.
b Determine $E(Z)$ e interprete su significado.
c ¿Cuánto espera ganar o perder en promedio por billete?

15.2 La distribución binomial

Definición de distribución binomial

Investigación: el test binomial

A continuación presentamos cinco preguntas cuyas respuestas son o bien "verdadero" o bien "falso". Escriba la respuesta a cada pregunta. Es posible que tenga que adivinar la respuesta de alguna de ellas.

1. El chaleco antibalas fue creado por una mujer.
2. En promedio, los músculos de los ojos se mueven 300 000 veces al día.
3. El juego de bolos se jugó por primera vez en Italia.
4. Le tomó 10 días a Leonardo Da Vinci pintar los labios de la Mona Lisa.
5. La selacofobia es el miedo a los relámpagos.

Ahora mire las respuestas al final de libro para encontrar las respuestas correctas a estas cinco preguntas. ¿Cuántas contestó correctamente? ¿Logró un buen resultado? ¿Cuántas esperaría haber contestado correctamente si hubiera adivinado cada respuesta? Para pasar el test se necesita tener 3 respuestas correctas de 5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 respuestas correctas de 5?

→ Los tres elementos esenciales de una distribución binomial son:
- Hay un número fijo de experimentos, n.
- Cada experimento tiene solo dos resultados posibles: "éxito" o "fracaso".
- La probabilidad de éxito (p) es constante de experimento en experimento.
- Los experimentos son independientes entre sí.

- En el test anterior hay 5 experimentos.
- Aquí el éxito consiste en responder correctamente y el fracaso en responder incorrectamente.
- En este caso, la probabilidad de éxito es de 0,5, suponiendo que se obtuvo cada respuesta por tanteo.
- Si respondemos correctamente una pregunta, eso no significa que tendremos mayor o menor probabilidad de responder correctamente la próxima pregunta.

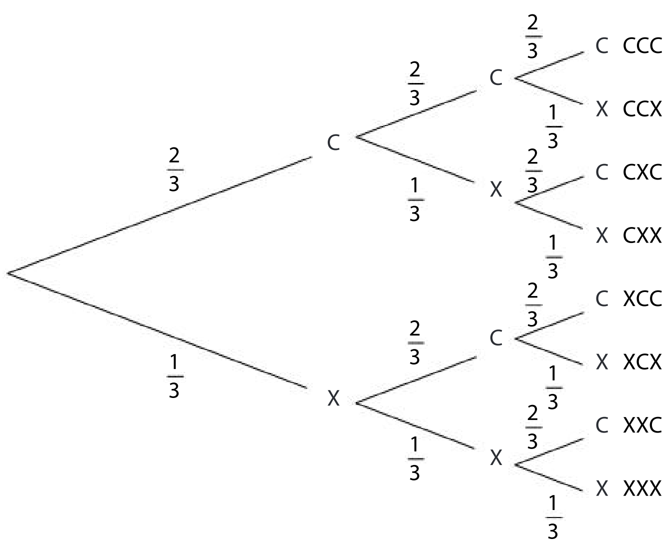
Los resultados de un **experimento binomial** y las correspondientes probabilidades de estos resultados se denominan **distribución binomial**.

La **distribución binomial** describe el comportamiento de una variable discreta X, dadas las condiciones anteriores.

> → Los parámetros que definen una distribución binomial única son los valores de n (el número de experimentos) y p (la probabilidad de éxito). Una distribución binomial se representa con $X \sim B(n, p)$.

Ahora examinemos este problema, que vimos por primera vez en el capítulo 3: determinar la probabilidad de obtener exactamente dos caras en tres lanzamientos de una moneda cargada, para la cual $P(\text{cara}) = \frac{2}{3}$.

El siguiente diagrama de árbol nos puede servir para responder la pregunta.



$$P(\text{dos caras en tres lanzamientos}) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC)$$

Las tres probabilidades son iguales.

$$P(CCX) = P(CXC) = P(XCC) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

Entonces, P(dos caras en tres lanzamientos)

$$= 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

Sin embargo, solo se debe utilizar un diagrama de árbol si el número de experimentos, n, es pequeño.

¿Qué ocurre si nos piden hallar la probabilidad de obtener exactamente dos caras en seis lanzamientos de esta moneda? El diagrama de árbol para esta pregunta sería demasiado grande, entonces buscaremos una fórmula.

> A menudo usamos una distribución teórica, como la binomial, para describir una variable aleatoria que ocurre en la vida real. Este proceso se denomina *modelización* y nos permite realizar cálculos. Si la distribución teórica coincide exactamente con la de la variable de la vida real, el modelo es perfecto. Sin embargo, este por lo general no es el caso. Generalmente, el resultado de cálculos basados en el modelo no dará necesariamente una explicación completa y exacta de una situación en la vida real. ¿Les quita esto utilidad?

Hay que comenzar por constatar que se reúnen las condiciones de una distribución binomial:

• Hay un número fijo (n) de experimentos.	En este caso hay seis experimentos.
• Cada experimento tiene dos resultados posibles: “éxito” o “fracaso”.	Un éxito es obtener cara y un fracaso es obtener ceca.
• La probabilidad de éxito (p) es constante de experimento en experimento.	La probabilidad de éxito es $\frac{2}{3}$ cada vez que se lanza la moneda.
• Los experimentos son independientes entre sí.	Obtener cara en un experimento no afectará el resultado del próximo experimento.

Una combinación de C y X que producirá 2 caras y 4 cecas es CCXXXX.

$$P(CCXXXX) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4}{729}\ (= 0{,}00548\ldots)$$

El error más común cuando se calcula una probabilidad binomial es no tener en cuenta que si hay exactamente r éxitos, deberá haber también $n - r$ fracasos.

Cada posible combinación de 2 C y 4 X tendrá la misma probabilidad.

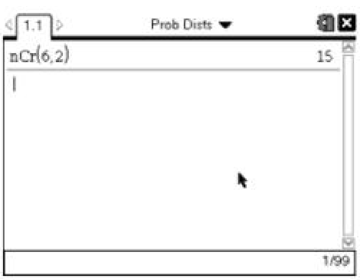
¿Pero cuántas combinaciones hay?

$\binom{n}{r}$ representa el número de maneras de elegir r objetos de un total de n objetos.

En el capítulo 6 se puede encontrar más información sobre el desarrollo del binomio.

El número de combinaciones de 6 objetos que tienen 2 C y 4 X es, por lo tanto, $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$.

Podemos usar la CPG para calcular $\binom{6}{2}$.



Como alternativa, se podría usar la fórmula $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\times 5}{2} = 15$

o

el tercer elemento en la sexta fila del triángulo de Pascal:

1 6 15 15 6 1

Por lo tanto,

$$P\ (2 \text{ caras en } 6 \text{ lanzamientos}) = \binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 15 \times \frac{4}{729} = \frac{20}{243} = 0{,}0823\ (3\text{cs})$$

La generalización de este método lleva a la función de la distribución normal.

→ Si X sigue una distribución binomial, $X \sim \mathrm{B}(n, p)$, entonces la probabilidad de obtener r éxitos en n experimentos independientes, cuando p es la probabilidad de éxito en cada experimento, es

$$\mathrm{P}(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

que a menudo se abrevia

$$\mathrm{P}(X=r)=\binom{n}{r}p^r q^{n-r} \text{ donde } q = 1 - p$$

Ejemplo 4

X sigue una distribución binomial, con 6 experimentos y una probabilidad de éxito igual a $\frac{1}{5}$ en cada intento. ¿Cuál es la probabilidad de obtener los siguientes resultados?

a Exactamente cuatro éxitos **b** Al menos un éxito
c Tres éxitos o menos

Respuestas
A mano:

Podemos reescribir la pregunta como:
Si $X \sim B\left(6, \frac{1}{5}\right)$, halle el valor de:

a $P(X = 4)$
b $P(X \geq 1)$
c $P(X \leq 3)$
Usar $P(X = r) = \binom{n}{r}p^r q^{n-r}$

a $$\mathrm{P}(X=4)=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$=15\times\frac{1}{625}\times\frac{16}{25}$$
$$=\frac{48}{3125}$$
$$=0{,}01536$$
$$=0{,}0154\,(3\text{ cs})$$

Para $P(X \geq 1)$ es más directo calcular $1 - P(X = 0)$ que calcular $P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = 6)$.

b $$1-\left(\frac{4}{5}\right)^6$$
$$=1-\frac{4096}{15\,625}$$
$$=\frac{11\,529}{15\,625}$$
$$=0{,}738\,(3\text{ cs})$$

$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
Usar la CPG para este cálculo
(Véase la siguiente explicación.)

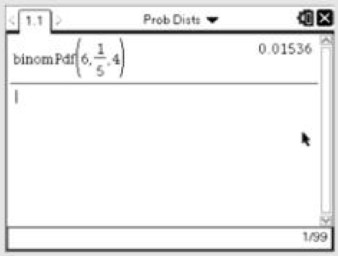
c $\mathrm{P}(X \leq 3) = 0{,}983$

Es fácil confundir $\mathrm{P}(X < r)$ y $\mathrm{P}(X \leq r)$. Por lo tanto, debemos leer las preguntas con cuidado.

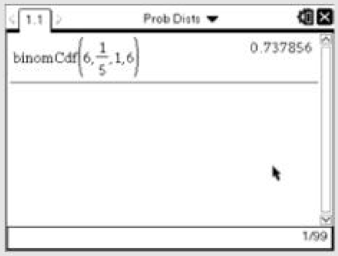
▶ Continúa en la página siguiente.

Usando la CPG:

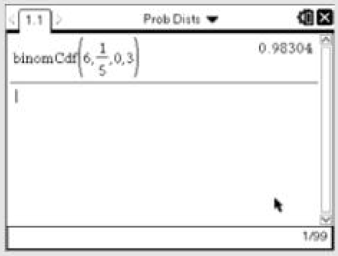
a



b



c



Ejercitación 15C

1 X sigue una distribución binomial, con 4 experimentos y una probabilidad de éxito igual a $\frac{1}{2}$ en cada experimento.
Sin calculadora, determine:

a $\mathrm{P}(X = 1)$ **b** $\mathrm{P}(X < 1)$
c $\mathrm{P}(X \le 1)$ **d** $\mathrm{P}(X \ge 1)$

2 Si $X \sim \mathrm{B}\left(6, \frac{1}{3}\right)$ halle, con una aproximación de tres cifras significativas:

a $\mathrm{P}(X = 2)$ **b** $\mathrm{P}(X < 2)$
c $\mathrm{P}(X \le 2)$ **d** $\mathrm{P}(X \ge 2)$

3 Si X sigue una distribución binomial, con 8 experimentos y una probabilidad de éxito igual a $\frac{2}{7}$ en cada intento, determine la probabilidad de obtener los siguientes resultados:

a Exactamente 5 éxitos **b** Menos de 5 éxitos
c Más de 5 éxitos **d** Al menos un éxito

En la pregunta 2 **b**, **c** y **d** utilizaremos **binomCdf** (dpA binomial) en lugar de **binomPdf** (dpP binomial) en la calculadora, porque estamos calculando una probabilidad acumulada.

Ejemplo 5

La probabilidad de que use el autobús para ir al trabajo cualquier mañana es 0,4. ¿Cuál es la probabilidad de que en la semana laboral de cinco días lo use solo dos veces?

Respuesta

A mano:

Sea X el número de días que uso el autobús.

$X \sim \mathrm{B}(5,\ 0{,}4)$

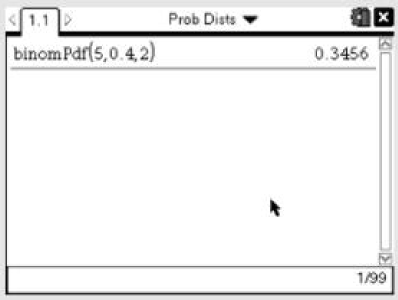
¿Podemos ver por qué es una situación binomial?

$$\mathrm{P}(X = 2) = \binom{5}{2}(0{,}4)^2\ (0{,}6)^3$$

Necesitamos P(X = 2).

$$= 10 \times 0{,}16 \times 0{,}216$$
$$= 0{,}3456$$
$$= 0{,}346\,(3\,\mathrm{cs})$$

***Usando la CPG*:**



Véase la sección 5.12 en el capítulo 17.

Ejemplo 6

Se sabe que, al suministrar cierto medicamento, el 80% de las personas que lo usan se curan. En el ensayo se administró el medicamento a dos grupos de 10 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que los 10 pacientes de ambos grupos se curen?

Respuesta

Sea X "el número de pacientes curados en un grupo de 10".

$\mathrm{P}(X = 10) = 0{,}8^{10} = 0{,}10737\ldots$

$[\mathrm{P}(X = 10)]^2 = (0{,}10737\ldots)^2$

$= 0{,}0115\ (3\,\mathrm{cs})$

Multiplicar las probabilidades P(X = 10) y P(X = 10) porque los dos sucesos (que los pacientes de cada grupo se curen) son independientes. Por lo tanto, para los dos grupos de 10 pacientes, la probabilidad de que todos se curen es [P(X = 10)]².

Suponemos que X sigue una distribución binomial dado que hay dos resultados: un éxito es "se cura" y un fracaso "no se cura". Suponemos que los resultados de los experimentos de paciente en paciente son independientes entre sí. La probabilidad de éxito es fija e igual a 0,8.

Ejercitación 15 D

1 Un tetraedro regular tiene tres caras blancas y una cara roja. Se lo lanza cuatro veces y se registra el color de la cara inferior. ¿Cuál es el número más probable de veces que la cara roja terminará hacia abajo? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra este valor?

2 La probabilidad de que un tirador dé en la diana cuando tira con el arco es de 0,55.
Halle la posibilidad de que ocurra lo siguiente en ocho intentos:

a El tirador **da** en la diana cinco veces.
b El tirador **no da** en la diana al menos cinco veces.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

3 Una fábrica tiene cuatro máquinas que producen el mismo tipo de pieza. La probabilidad de que cualquiera de las máquinas produzca una pieza defectuosa es de 0,01. Determine la probabilidad de que, en una muestra de cuatro piezas de cada máquina, ocurra lo siguiente:

a Ninguna será defectuosa. **b** Exactamente 13 no serán defectuosas.
c Al menos dos serán defectuosas.

4 La probabilidad de que una línea telefónica de una compañía esté ocupada es de 0,25. Si la central de esa compañía tiene 10 líneas, halle la probabilidad de que:

a La mitad de las líneas estén ocupadas.
b Al menos tres líneas estén libres (con una aproximación de 4 cifras significativas).

5 La probabilidad de que Nicole se acueste a las 7:30 un día determinado es de 0,4. Calcule la probabilidad de que de cinco días consecutivos ella se acueste a las 7:30 como máximo tres días.

6 En una sala de examen, se sabe que el 15% de los escritorios se tambalean.

a ¿Cuál es la probabilidad de que, en una fila de seis escritorios, más de uno se tambalee?
b ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno se tambalee, en una fila de seis escritorios?

7 En la producción en masa de procesadores de computadores se encontró que el 5% son defectuosos. Los procesadores se seleccionan al azar y se embalan en paquetes de 15.

a Se selecciona al azar un paquete. Halle la probabilidad de que contenga:
i Tres procesadores defectuosos **ii** Ningún procesador defectuoso
iii Al menos dos procesadores defectuosos

b Se seleccionan al azar dos paquetes. Halle la probabilidad de encontrar:
i Ningún procesador defectuoso en cada uno de los paquetes
ii Al menos dos procesadores defectuosos en cada paquete
iii Ninguno defectuoso en un paquete y al menos dos en el otro

Ejemplo 7

Una caja contiene un gran cantidad de claveles de los cuales un cuarto son rojos. El resto son blancos. Se escogen claveles al azar de la caja. ¿Cuántas flores deben escogerse para que la probabilidad de que haya al menos un clavel rojo entre ellas sea mayor que 0,95?

Respuesta

Sea X la variable aleatoria "el número de claveles rojos".
$X \sim \mathrm{B}(n, 0{,}25)$

$\frac{1}{4}$ son rojos, entonces P(rojo) = 0,25.

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - (0{,}75)^n$$

$$1 - (0{,}75)^n > 0{,}95$$

Se requiere que $\mathrm{P}(X \geq 1) > 0{,}95$.

$$0{,}05 > (0{,}75)^n$$

$$\log 0{,}05 > n \log 0{,}75$$

Resolver la inecuación en n

y en consecuencia

$$n \log 0{,}75 < \log 0{,}05$$

$$n > \frac{\log 0{,}05}{\log 0{,}75}$$

$$n > 10{,}4$$

El menor valor de n es 11.

Se deben tomar al menos 11 claveles de la caja para asegurarse de que la probabilidad de que haya al menos un clavel rojo entre ellos sea mayor que 0,95.

Cuando se divide por un número negativo, la inecuación se invierte.

Ejercitación 15E

1 Si $X \sim \mathrm{B}(n, 0{,}6)$ y $\mathrm{P}(X < 1) = 0{,}0256$, halle n.

2 El 1% de los fusibles en una gran caja están averiados. ¿Cuál es el tamaño más grande de muestra que se puede tomar para que la probabilidad de que no haya fusibles averiados sea mayor que 0,5?

3 Si $X \sim \mathrm{B}(n, 0{,}2)$ y $\mathrm{P}(X \geq 1) > 0{,}75$, halle el valor mínimo posible de n.

4 La probabilidad de que Ana anote un gol de penal en una competencia de hockey es 0,3. Halle el menor número posible de intentos que necesitaría para que la probabilidad de anotar al menos un gol sea mayor que 0,95.

5 ¿Cuántas veces se debe lanzar una moneda equilibrada para que la probabilidad de que caiga ceca sea de al menos 0,99?

Esperanza matemática de una distribución binomial

Pensemos en el ejemplo de la moneda no equilibrada, con $P(C) = \frac{2}{3}$.

Si se arroja la moneda 3 veces, ¿cuántas veces se puede esperar que salga cara?

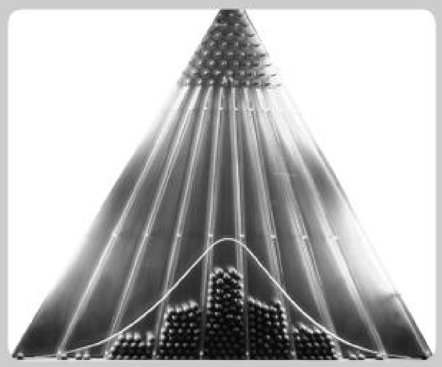
Intuitivamente, la respuesta es 2.

Esto es lo mismo que calcular $3 \times \frac{2}{3} = 2$

→ Para la distribución binomial donde $X \sim B(n, p)$, $E(X) = np$.

La demostración de esta fórmula no está en el programa de estudios de Matemáticas NM.

La máquina de Galton, o máquina Quincunx, es un dispositivo para experimentos estadísticos que tomó el nombre de su inventor, el británico Sir Francis Galton. Se compone de una placa vertical con clavos espaciados uniformemente. En la mitad superior, los clavos están dispuestos de forma escalonada. La mitad inferior está dividida en ranuras rectangulares espaciadas de forma pareja. En la mitad del extremo superior hay un embudo por el cual se pueden verter las bolas. El embudo está directamente encima del clavo superior de modo que cada bola cae directamente sobre este clavo. Cada vez que una bola pega en uno de los clavos, puede orientarse a la derecha o a la izquierda con igual probabilidad. Por lo tanto, este proceso da lugar a una distribución binomial de las alturas de los montones de bolas en las ranuras de la parte inferior. Si el número de bolas es suficientemente grande, entonces la distribución de las alturas de los montones de bolas se aproximará a una distribución normal (véase la sección 15.3). Podemos entender por qué sucede esto investigando un poco más sobre el tema.



Ejemplo 8

Un dado no equilibrado se lanza 30 veces y se obtiene un seis 8 veces. El dado se lanza 12 veces más. Halle el número esperado de veces que se obtendrá un número seis en estos 12 lanzamientos.

Respuesta

$X \sim B(12, p)$ donde $p = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

Sea X el número de veces que se obtiene un seis en 12 lanzamientos.

$E(X) = np = 12 \times \frac{4}{15} = 3{,}2$

Ejercitación 15F

1 **a** Una moneda normal se lanza 40 veces. Halle el número esperado de caras.

b Un dado normal se arroja 40 veces. Halle el número esperado de veces que se obtendrá un seis.

c Un naipe se extrae de una baraja de 52 naipes, se anota y se devuelve. 13 de estos naipes son de corazones. El proceso se repite 40 veces. Halle el número esperado de corazones.

Posiblemente querramos hacer nuestro propio experimento binomial y explorar cuán cerca se encuentran nuestros resultados de los resultados esperados en una distribución binomial.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 X es una variable aleatoria tal que $X \sim \mathrm{B}(n, p)$. Sabiendo que la media de la distribución es 10 y $p = 0{,}4$, halle n.

3 Un test tiene 15 preguntas y cuatro posibles respuestas para cada una, con solamente una respuesta correcta por pregunta. Suponga que un estudiante adivina cada respuesta. Si X es "el número de preguntas contestadas correctamente", dé:

a La distribución de X

b La media de X

c La probabilidad de que este estudiante logre la nota de aprobación de 10 o más

4 Se halla que 100 familias con tres hijos cada una tienen los siguientes números de niñas.

Número de niñas	0	1	2	3
Frecuencia	13	34	40	13

a Halle la probabilidad de que un bebé que nace en este grupo de familias sea una niña.

b Usando el valor obtenido en **a**, calcule el número de familias con tres hijos, en una muestra de 100, que se espera tengan dos niñas.

Varianza de una distribución binomial

En el capítulo 8 se introdujo el concepto de varianza como medida de dispersión de un conjunto de datos.

La fórmula para la varianza de una distribución binomial está en el cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NM.

La demostración de la fórmula de la varianza no está en el programa de estudios de Matemáticas NM.

→ Si $X \sim \mathrm{B}(n,p)$, entonces $\mathrm{Var}(X) = npq$ donde $q = p - 1$.

Volviendo al ejemplo original de la moneda no equilibrada para la cual $\mathrm{P(C)} = \frac{2}{3}$, si arrojamos la moneda 3 veces, esperamos que caiga cara 2 veces.

Sin embargo, obviamente, esto no siempre ocurrirá. Si repetimos este experimento muchas veces, algunas obtendremos 0, 1 y 3 caras.

Podemos calcular la desviación típica tomando la raíz cuadrada de la varianza.

Usando la fórmula para la varianza,

$$\text{Varianza} = npq = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

En general

→ Para la distribución binomial donde $X \sim \mathrm{B}(n, p)$
- Esperanza de X, $\mathrm{E}(X) = np$
- Varianza de X, $\mathrm{Var}(X) = npq$ donde $q = 1 - p$

Al valor esperado de X, $\mathrm{E}(X)$, también se lo llama la media, μ. Entonces $E(X) = \mu$.

Ejemplo 9

El 40% de los trabajadores de una empresa grande usa transporte público para ir al trabajo.
Se selecciona al azar una muestra de 15 trabajadores.
Halle el número esperado de trabajadores en esta muestra que van al trabajo en transporte público y la desviación típica.

Respuesta	
Sea T el número de trabajadores que van en transporte público.	*n = 15, p = 0,4*
$T \sim B(15; 0{,}4)$	
$E(T) = 15 \times 0{,}4 = 6$	*$E(T) = np$*
$\text{Var}(T) = 15 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 3{,}6$	*$Var(T) = npq$*
La desviación típica es $\sqrt{3{,}6} = 1{,}90$ (3 cs)	*La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.*

Ejercitación 15G

1 Si $X \sim \text{B}\left(0, \frac{1}{4}\right)$, calcule la media y la varianza de X.

2 Halle la media y la desviación típica de la distribución binomial B(12; 0,6).

3 Una moneda equilibrada se lanzó 40 veces. Halle la media y la desviación típica del número de caras.

4 Se lanza un dado equilibrado 10 veces. Sea X el número de veces que se obtiene un seis. Halle:

a El número esperado de veces que sale un seis

b $\text{Var}(X)$

c $\text{P}(X < \mu)$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 Una viajera frecuente encuentra que está demorada en un aeropuerto en particular una vez cada 5 viajes, en promedio.
Un año usa el aeropuerto en 22 ocasiones. Usando un modelo binomial, halle:

a El número esperado de viajes en que estará demorada en ese aeropuerto

b La varianza

c La probabilidad de que esté demorada en menos de 4 ocasiones

6 En el club de atletismo local, el número esperado de personas que pueden correr 100 metros en menos de 13 segundos es 4,5 y la varianza es 3,15.
Hallar la probabilidad de que al menos 3 personas puedan correr 100 metros en menos de 13 segundos.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

7 X es una variable aleatoria tal que $X \sim B(n, p)$.
Sabiendo que la media de la distribución es 7,8 y $p = 0{,}3$, halle:

a n **b** La varianza de X

8 Para una variable aleatoria $X \sim B(n, p)$, $E(X) = 9{,}6$ y $\text{Var}(X) = 1{,}92$. Halle los valores posibles de n y de p.
A partir de lo anterior, calcule $P(X = 6)$ para cada par posible.

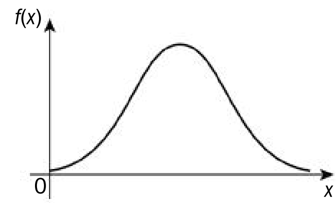
15.3 La distribución normal

Investigación: la distribución normal

Recoja datos de alrededor de 50 estudiantes de su colegio para una de estas categorías: estatura, peso, máxima extensión de la mano abierta, longitud del pie, circunferencia de la muñeca.

1. Dibuje un histograma para los datos.
2. ¿Dónde está el pico del histograma?
3. ¿Es el histograma aproximadamente simétrico?
4. Una los puntos medios de las barras de su histograma con una curva.

Probablemente, el histograma obtenido es más o menos simétrico y la curva tiene forma de campana con la mayoría de las mediciones en torno de un valor central.



Si se tomaran más medidas, se dibujara otro histograma y se unieran los puntos medios de las barras por medio de una curva, el histograma sería más simétrico y la forma se aproximaría más a la de una campana, hasta llegar a parecerse a la curva que se muestra aquí.

Esta es una **distribución normal**.

La distribución normal es probablemente la más importante distribución en estadística, ya que es un modelo adecuado para muchas variables que se dan naturalmente. Estas incluyen los atributos físicos de personas, animales y plantas, e incluso los artículos producidos en masa en las fábricas. La distribución podría también aplicarse como una aproximación de, por ejemplo, las puntuaciones obtenidas en un examen, los tiempos para completar un trabajo, los tiempos de reacción o las medidas del CI.

En cada caso:

- La curva tiene forma de campana.
- Es simétrica respecto de la media(μ).
- La media, la moda y la mediana coinciden.

La curva de Gauss

A la curva normal también se la llama “la curva de Gauss” en honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777–1855).
Gauss usó la curva normal para analizar datos astronómicos en 1809. El retrato del matemático, la curva normal y la función de probabilidad asociada aparecieron en el viejo billete de 10 marcos alemanes. Si bien Gauss jugó un papel importante en la historia de esta curva, los estadísticos franceses Abraham de Moivre (1667–1754) y Pierre-Simon Laplace (1749–1827) llevaron a cabo muchos de los primeros trabajos. De Moivre desarrolló la curva normal matemáticamente en 1733 como una aproximación a la distribución binomial, aunque el ensayo que había escrito sobre el tema no fue descubierto hasta 1924 por Karl Pearson. Laplace usó la curva normal en 1783 para describir la distribución de errores, y en 1810 demostró un teorema esencial de la estadística, llamado teorema del límite central.

Características de una distribución normal

No existe una única curva normal, sino una **familia de curvas**, cada una de ellas definida por su media, μ, y desviación típica, σ.

> → Si la variable aleatoria X tiene una distribución normal con media μ y desviación típica σ, esto se escribe $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

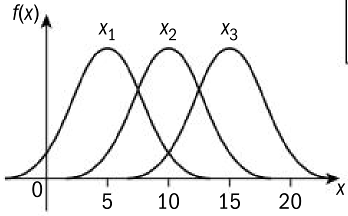
Recordemos que la media, μ, es el promedio, y la desviación típica, σ, es una medida de dispersión.

μ y σ son los **parámetros de la distribución**.

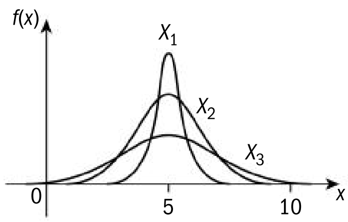
La media es el punto central de la distribución y la desviación típica describe la dispersión de la distribución. Cuanto más grande sea la desviación típica, más ancha será la curva normal.

En la expresión $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 es la varianza. Recordemos que la varianza es el cuadrado de la desviación típica.

Estos tres gráficos muestran $X_1 \sim N(5, 2^2)$, $X_2 \sim N(10, 2^2)$ y $X_3 \sim N(15, 2^2)$. Las desviaciones típicas son todas iguales, por lo que las curvas tienen el mismo ancho, pero $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$.



Estos tres gráficos muestran $X_1 \sim N(5, 1^2)$, $X_2 \sim N(5, 2^2)$ y $X_3 \sim N(5, 3^2)$. Aquí las medias son todas iguales y todas las curvas están centradas respecto de esta media, pero $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, por lo que la curva de X_1 es más estrecha que la de X_2, y la de X_2 es más estrecha que la de X_3.

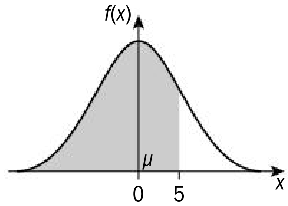


Las curvas pueden tener diferentes medias o diferentes desviaciones típicas, pero todas tienen las mismas características.

El área bajo la curva de distribución normal

Independientemente de cuáles sean los valores de μ y σ para una distribución normal, el área total bajo la curva es siempre igual a 1. Por lo tanto, podemos considerar las áreas parciales bajo la curva como la representación de probabilidades.

Entonces, en esta distribución normal podríamos hallar la probabilidad $P(X < 5)$ hallando el área sombreada en el diagrama.



Desafortunamente, la función de probabilidad (la ecuación de la curva) para la distribución normal es muy complicada y difícil de usar.

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\left(\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad -\infty < X < \infty$$

Sería muy difícil para nosotros usar la integración para hallar áreas bajo la curva. Sin embargo, hay otros métodos que podemos utilizar.

La distribución normal estándar

La **distribución normal estándar** es la distribución normal en la que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. La variable aleatoria se llama Z. Usa "valores z" para describir el número de desviaciones típicas entre cada valor y la media.

→ La distribución normal estándar se escribe $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Podemos usar la CPG para calcular las áreas bajo la curva de $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ para valores entre a y b, y a partir de allí, $\mathrm{P}(a < Z < b)$.

Vemos que $\mathrm{P}(Z = a) = 0$. Podemos pensar en esto como una recta que no tiene ancho y por lo tanto tampoco área.
Esto significa que:
$\mathrm{P}(a < Z < b)$
$= \mathrm{P}(a \le Z \le b)$
$= \mathrm{P}(a < Z \le b)$
$= \mathrm{P}(a \le Z < b)$

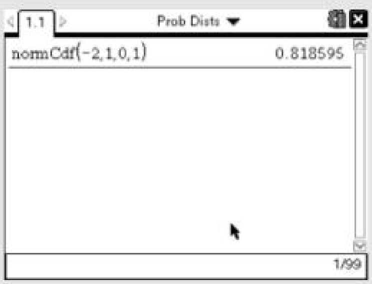
Ejemplo 10

Sabiendo que $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$, halle:

a $\mathrm{P}(-2 < Z < 1)$ **b** $\mathrm{P}(Z < 1)$ **c** $\mathrm{P}(Z > -1{,}5)$
d $\mathrm{P}(Z < 0)$ **e** $\mathrm{P}(|Z| > 0{,}8)$

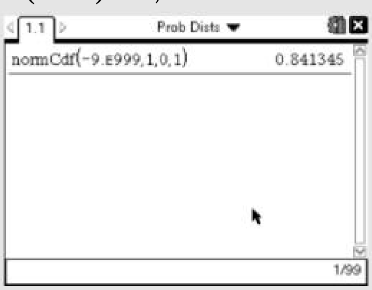
Respuestas

a $\mathrm{P}(-2 < Z < 1) = 0{,}819$



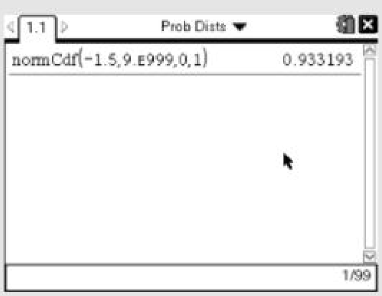
Usando el menú de ***Distributions*** *(distribuciones) en la CPG, elegir* ***normCdf*** *(dpA normal) e ingresar los valores en este orden: límite inferior, límite superior, media, desviación típica*

b $\mathrm{P}(Z < 1) = 0{,}841$



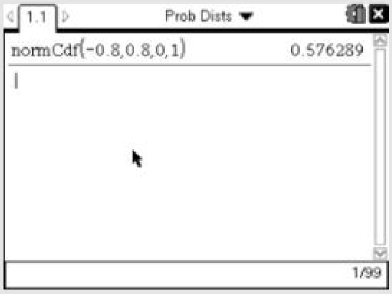
Ingresar el límite inferior como un número negativo muy pequeño, -9×10^{999}

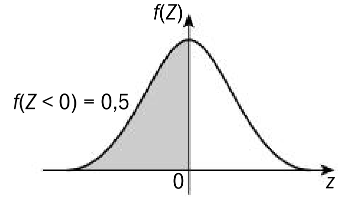
c $\mathrm{P}(Z > -1{,}5) = 0{,}933$



Ingresar el límite superior como un número muy grande, 9×10^{999}

▶ Continúa en la página siguiente.

d $P(Z < 0) = 0{,}5$	*Aquí no se necesita usar la calculadora porque el gráfico es simétrico respecto de la media.*
e $P(\lvert Z\rvert > 0{,}8) = 1 - 0{,}576$ $= 0{,}424$ 	*$\lvert Z\rvert > 0{,}8$ significa $Z < -0{,}8$ o $Z > 0{,}8$*



Véase la sección 5.13 en el capítulo 17.

Ejercitación 15H

1 Sabiendo que $Z \sim N(0,1)$, halle:
a $P(-1 < Z < 1)$ **b** $P(-2 < Z < 2)$ **c** $P(-3 < Z < 3)$

2 Halle el área bajo la curva normal estándar:
a Entre 1 y 2 desviaciones típicas de la media
b Entre 0,5 y 1,5 desviaciones típicas de la media

3 Halle el área bajo la curva que está más de:
a 1 desviación típica arriba de la media
b 2,4 desviaciones típicas arriba de la media

4 Halle el área bajo la curva que está menos de:
a 1 desviación típica debajo de la media
b 1,75 desviaciones típicas debajo de la media

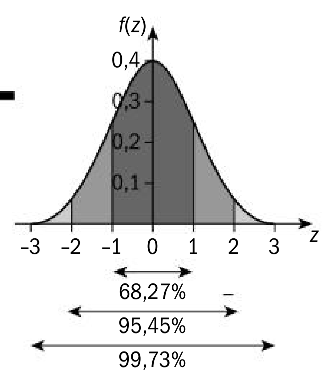
5 Sabiendo que $Z \sim N(0,1)$, use la CPG para hallar:
a $P(Z < 0{,}65)$ **b** $P(Z > 0{,}72)$ **c** $P(Z \geq 1{,}8)$
d $P(Z > -2)$ **e** $P(Z \leq -0{,}28)$

6 Sabiendo que $Z \sim N(0,1)$, use la CPG para hallar:
a $P(0{,}2 < Z < 1{,}2)$ **b** $P(-2 < Z \leq 0{,}3)$ **c** $P(-1{,}3 \leq Z \leq -0{,}3)$

7 Sabiendo que $Z \sim N(0,1)$, use la CPG para hallar:
a $P(\lvert Z\rvert < 0{,}4)$ **b** $P(\lvert Z\rvert > 1{,}24)$

En la pregunta 1 de la ejercitación 15H, encontramos la probabilidad de que Z se encuentre a menos de una desviación típica de la media, dos desviaciones típicas de la media y tres desviaciones típicas de la media, respectivamente.

Se puede ver que la mayor parte de los datos de una distribución normal quedarán a menos de tres desviaciones típicas de la media.



Probabilidades para otras distribuciones normales

Es evidente, sin embargo, que muy pocas variables de la vida cotidiana se distribuyen según la distribución normal estándar (con una media de 0 y una desviación típica de 1). Pero podemos transformar cualquier distribución normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para equipararla a la distribución normal estándar, porque todas las distribuciones normales tienen la misma forma básica, con cambios en la ubicación y la dispersión.

Para transformar cualquier valor dado de x en $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a su valor z equivalente en $Z \sim N(0, 1)$, utilizamos la siguiente forma:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Después se puede usar la CPG para hallar la probabilidad requerida.

> ➔ Si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria transformada $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ tiene una distribución normal estándar.

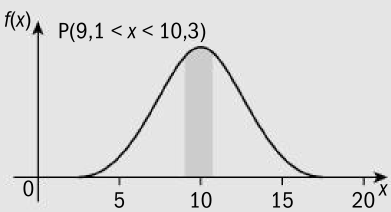
Ejemplo 11

La variable aleatoria $X \sim \mathrm{N}(10, 2^2)$. Halle $\mathrm{P}(9{,}1 < X < 10{,}3)$.

Respuesta

$\mathrm{P}(9{,}1 < X < 10{,}3)$

Dibujar un gráfico aproximado

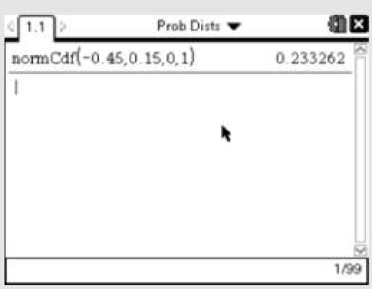


$$z = \frac{9{,}1-10}{2} = -0{,}45 \qquad z = \frac{10{,}3-10}{2} = 0{,}15$$

Estandarizar cada valor de x

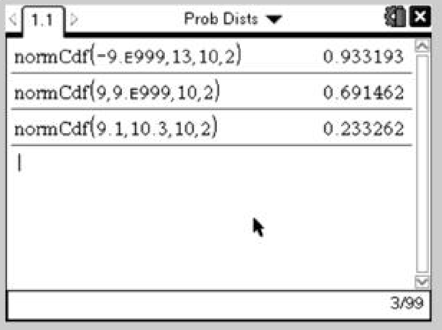
$\mathrm{P}(9{,}1 < X < 10{,}3)$
$= \mathrm{P}(-0{,}45 < Z < 0{,}15)$

Ingresar los valores en la CPG



$\mathrm{P}(9{,}1 < X < 10{,}3) = 0{,}233$

Verificar que la respuesta parezca razonable, comparada con el gráfico aproximado



También podemos hallar estas soluciones directamente, usando la CPG. Sin usar la fórmula de estandarización, este es el método más rápido y eficiente de responder esta pregunta. Pero es importante saber aplicar el método de estandarización. Ingresar límite inferior, límite superior, media = 10, desviación típica = 2.

Ejercitación 15I

1 La variable aleatoria $X \sim \mathrm{N}(14, 5^2)$. Halle:
a $\mathrm{P}(X < 16)$ **b** $\mathrm{P}(X > 9)$ **c** $\mathrm{P}(9 \le X < 12)$ **d** $\mathrm{P}(X < 14)$

2 La variable aleatoria $X \sim \mathrm{N}(48, 81)$. Halle:
a $\mathrm{P}(X < 52)$ **b** $\mathrm{P}(X \ge 42)$ **c** $\mathrm{P}(37 < X < 47)$

3 La variable aleatoria $X \sim \mathrm{N}(3{,}15; 0{,}02^2)$. Halle:
a $\mathrm{P}(X < 3{,}2)$ **b** $\mathrm{P}(X \ge 3{,}11)$ **c** $\mathrm{P}(3{,}1 < X < 3{,}15)$

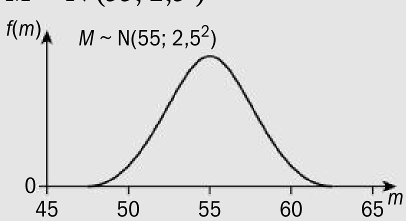
Ejemplo 12

Se sabe que las masas de los huevos puestos por una gallina siguen una distribución normal, con una media de 55 g y una desviación típica de 2,5 g.
Halle la probabilidad de que:
a Un huevo pese más de 59 g. **b** Un huevo pese menos de 53 g.
c Un huevo pese entre 52 y 54 g.

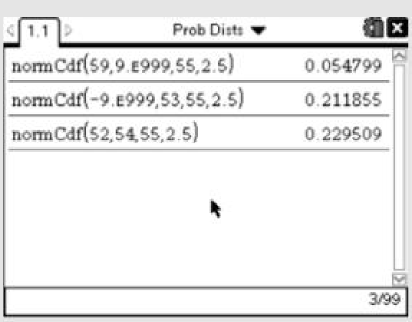
Respuesta

$M \sim \mathrm{N}(55; 2{,}5^2)$

Primero realizar un gráfico aproximado
Media = 55



Ingresar los valores en la CPG: límite inferior, límite superior, media = 55, desviación típica = 2,5



a $\mathrm{P}(M > 59) = 0{,}0548\,(3\,\mathrm{cs})$
b $\mathrm{P}(M < 53) = 0{,}212\,(3\,\mathrm{cs})$
c $\mathrm{P}(52 < M < 54) = 0{,}230\,(3\,\mathrm{cs})$

Ejercitación 15J

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 Los hogares en Portugal gastan una media de 100 euros por semana en comestibles, con una desviación típica de 20 euros. Suponiendo que los gastos de comestibles siguen una distribución normal, halle la probabilidad de que el gasto de un hogar sea:

a Menos de 130 euros por semana

b Más de 90 euros por semana

c Entre 80 euros y 125 euros por semana

2 Una máquina produce pernos con diámetros distribuidos normalmente, con una media de 4 mm y una desviación típica de 0,25 mm. Los pernos pasan un control de calidad riguroso y cualquiera cuyo diámetro mida menos de 3,5 mm o más de 4,5 mm se descarta. De un lote de 500 pernos, ¿cuántos serían aceptables?

3 Se sabe que los tiempos que aguardan los pacientes del Dr. Barret en la sala de espera siguen una distribución normal, con una media de 14 minutos y una desviación típica de 4 minutos.

a Halle la probabilidad de tener que esperar más de 20 minutos para ver al doctor.

b ¿Qué proporción de los pacientes esperan menos de 10 minutos?

4 Según se indica en el cartón, cada paquete de copos de cereal "Copito" pesa 550 g. La producción de copos garantiza que las masas siguen una distribución normal, con una media de 551,3 g y una desviación típica de 15 g. ¿Qué proporción de los paquetes contendrá más de lo que indica el paquete?

5 Las masas de los paquetes de polvo para lavar siguen una distribución normal, con una media de 500 g y una desviación típica de 20 g.

a Halle la probabilidad de que un paquete elegido al azar tenga una masa de menos de 475 g.

b Tres paquetes son elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los paquetes tengan una masa menor que 475 g?

La distribución normal inversa

Habrá veces en que será necesario hallar el valor del conjunto de datos que tiene determinada probabilidad acumulada. Por ejemplo, una empresa embotella cartones de jugo a un valor nominal de 150 ml. El 5% de los envases son rechazados porque contienen muy poco jugo. El propietario de la empresa puede querer determinar el punto límite para el volumen mínimo de un envase.

Podemos hallar este valor usando la CPG, que tiene una función llamada **Inverse Normal** (normal inversa) para hacer esto. En estos ejemplos regresaremos a la distribución normal estándar $Z \sim N(0,1)$.

Véase la sección 5.14 en el capítulo 17.

Ejemplo 13

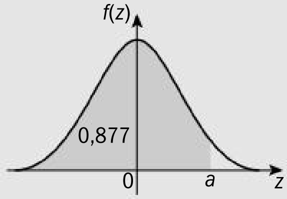
Sabiendo que $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$, use la CPG para hallar a.

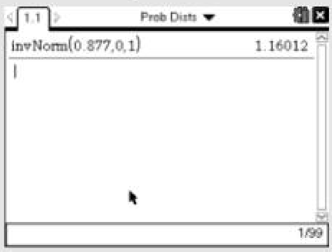
a $\mathrm{P}(Z < a) = 0{,}877$ **b** $\mathrm{P}(Z > a) = 0{,}2$ **c** $\mathrm{P}(-a < Z < a) = 0{,}42$

Respuestas

a

Dibujar un gráfico aproximado



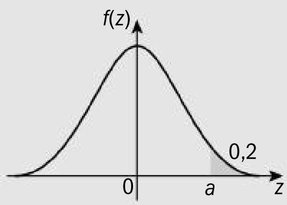


$\mathrm{P}(Z < a) = 0{,}877$

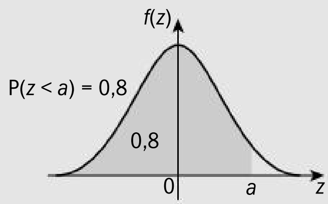
$a = 1{,}16$ (3 cs)

b

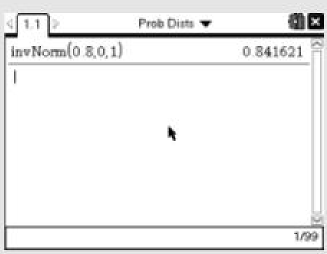
Tener en cuenta que para hallar el valor de a tal que P(Z > a) = 0,2 es más fácil hallar a tal que P(Z < a) = 0,8



$\mathrm{P}(Z > a) = 0{,}2$



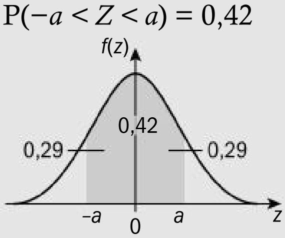
$\mathrm{P}(Z < a) = 0{,}8$

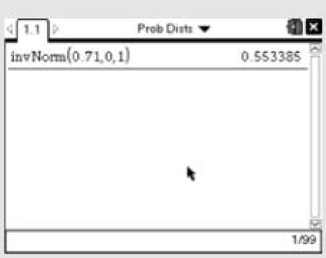


$a = 0{,}842$ (3 cs)

c $\mathrm{P}(-a < Z < a) = 0{,}42$

Las áreas a cada lado de la región sombreada tienen el mismo tamaño y ambas valen $\frac{1}{2}(1 - 0{,}42) = 0{,}29$; *luego* $P(Z < a) = 1 - 0{,}29 = 0{,}71$





$a = 0{,}553$ (3 cs)

Ejercitación 15K

1 Halle a tal que:

a $P(Z < a) = 0{,}922$ **b** $P(Z > a) = 0{,}342$

c $P(Z > a) = 0{,}005$

2 Halle a tal que:

a $P(1 < Z < a) = 0{,}12$ **b** $P(a < Z < 1{,}6) = 0{,}787$

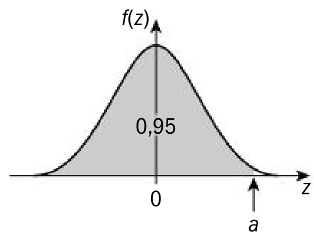
c $P(a < Z < -0{,}3) = 0{,}182$

3 Halle a tal que:

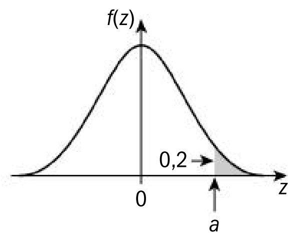
a $P(-a < Z < a) = 0{,}3$ **b** $P(|Z| > a) = 0{,}1096$

4 Halle los valores de a representados en estos diagramas:

a



b

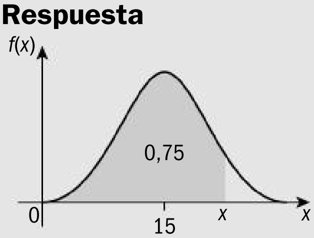


Una vez más, sin embargo, es más probable que nos encontremos con distribuciones distintas de la distribución normal estándar.

Ejemplo 14

Sabiendo que $X \sim N(15, 3^2)$, determine x tal que $P(X < x) = 0{,}75$.

Respuesta



Dibujar un gráfico aproximado para mostrar el valor de x pedido

Esta pregunta se resuelve mejor en la CPG. En ***invNorm*** *(normal inversa), ingresar x, media, desviación típica.*

$x = 17{,}0$

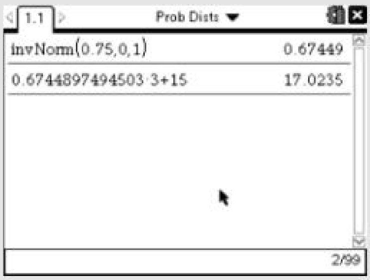
$$z = \frac{x-15}{3}$$

También se podría responder la pregunta estandarizando primero el valor de x.

▶ Continúa en la página siguiente.

$P\,(X < x) = 0,75$

$$P\left(Z < \frac{x-15}{3}\right) = 0,75$$



$$\frac{x-15}{3} = 0,6745$$

$$x = 17,0$$

Ejemplo 15

Determinados envases de cartón de jugo son tales que sus volúmenes siguen una distribución normal, con una media de 150 ml y una desviación típica de 5 ml.
El 5% de los cartones son rechazados por contener muy poco jugo. Hallar el volumen mínimo, al ml más próximo, que debe contener un cartón para ser aceptado.

Respuesta

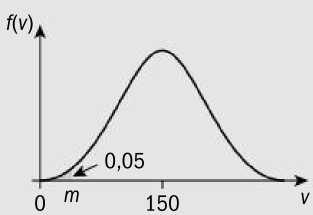
Sea V el volumen de un envase

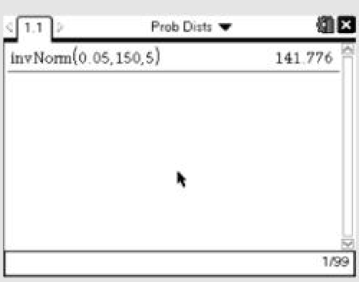
$V \sim N(150,\ 5^2)$

$P(V < m) = 0,05$

Sea m el volumen mínimo que debe tener un envase para ser aceptado.

Dibujar un gráfico aproximado





El volumen mínimo es 142, al ml más próximo.

Ejercitación 15L

1 $X \sim N(5{,}5; 0{,}2^2)$ y $P(X > a) = 0{,}235$. Halle el valor de a.

2 La masa, M, de una lata de determinada comida para perros es tal que $M \sim N(420, 10^2)$. Halle:

a El primer cuartil **b** El percentil 90

El 25% de los valores son menores que el primer cuartil.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Las regulaciones de un país insisten en que todas las botellas de agua mineral que afirman contener 500 ml deben tener al menos esa cantidad. La empresa "Ricacola" tiene una máquina para embotellar bebidas, que llena un promedio de 502 ml en cada botella con una desviación típica de 1,6 ml, de manera tal que los volúmenes siguen una distribución normal.

a Un inspector selecciona al azar una botella de "Ricacola". ¿Cuál es la probabilidad de que no cumpla con las regulaciones?

b ¿Qué proporción de las botellas contendrán entre 500 ml y 505 ml?

c El 95% de las botellas contienen entre a ml y b ml de bebida, donde a y b son simétricos respecto de la media. ¿Cuáles son los valores de a y de b?

4 Las masas de las plantas de lechuga que se venden en un hipermercado siguen una distribución normal, con una masa media de 550 g y una desviación típica de 25 g.

a Si se elige una planta de lechuga al azar, halle la probabilidad de que su masa esté entre 520 g y 570 g.

b Halle la masa que es superada por un 10% de las plantas de lechuga.

5 Las puntuaciones de 500 alumnos en un examen siguen una distribución normal, con una media de 55 puntos, y un desviación típica de 15 puntos.

a Si el 5% de los alumnos obtienen un distinguido porque obtienen una puntuación de d o más, halle el valor de d.

b Si el 10% de los alumnos reprueban porque obtienen una puntuación de f o menos, halle el valor de f.

También es posible que nos den las probabilidades acumuladas y nos pidan que hallemos ya sea la media (si se conoce el valor de σ) o la desviación típica (si se conoce el valor de μ) o ambas.

Ejemplo 16

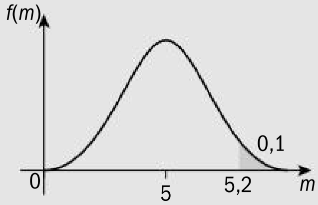
Una empacadora automática embolsa sacos de patatas con un peso medio de 5 kg. En una prueba se encontró que el 10% de las bolsas pesaban más de 5,2 kg. Utilice esta información para hallar la desviación típica del proceso.

Respuesta Sea M la masa de las patatas en un saco. $M \sim N(5, \sigma^2)$	*El 10% (0,1) de las bolsas pesaban más de 5,2 kg.*

Continúa en la página siguiente.

P(M > 5,2) = 0,1

Dibujar un gráfico aproximado



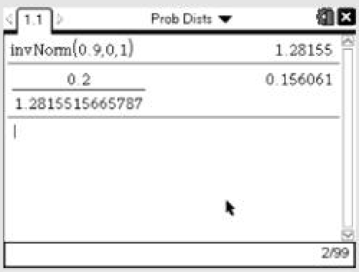
$$Z = \frac{5{,}2-5}{\sigma} = \frac{0{,}2}{\sigma}$$

Estandarizar

$$\mathrm{P}\left(Z > \frac{0{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}1$$

o $\mathrm{P}\left(Z < \frac{0{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}9$

De la CPG
P(Z < 1,28155…) = 0,9



$$\frac{0{,}2}{\sigma} = 1{,}28155....$$

$\sigma = 0{,}156$ (3 cs)

Ejemplo 17

Una fabricante desconoce la media y la desviación típica de los diámetros de los rodamientos que produce. Sin embargo, un sistema de control de calidad rechaza todos los rodamientos con diámetros mayores de 2,4 cm y aquellos con diámetros menores de 1,8 cm. Se encontró que el 8% de los rodamientos son rechazados por ser demasiado pequeños y el 5,5% por ser muy grandes. ¿Cuál es la media y la desviación típica de los rodamientos producidos?

Respuesta

Sea d el diámetro de los rodamientos producidos.

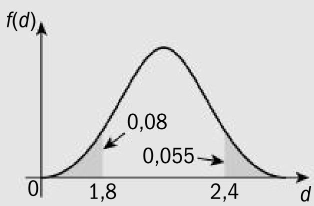
$D \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

P(D < 1,8) = 0,08

P(D > 2,4) = 0,055

Sabemos que el 8% son muy pequeños, y el 5,5% son muy grandes.

Dibujar un gráfico aproximado



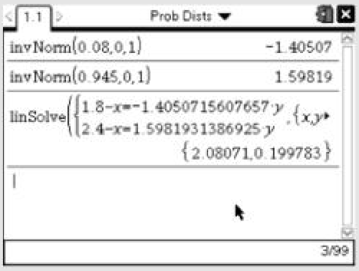
$$\frac{1{,}8-\mu}{\sigma} \text{ y } \frac{2{,}4-\mu}{\sigma}$$

Estandarizar cada valor

$$\mathrm{P}\left(Z < \frac{1{,}8-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}08$$

De la primera expresión

▶ Continúa en la página siguiente.

$\mathrm{P}\left(Z > \dfrac{2{,}4-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}055$	*De la segunda expresión*
o $\mathrm{P}\left(Z < \dfrac{2{,}4-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}945$	*1 – 0,005 = 0,945*
	*De la CPG sabemos que* *P(Z < −1,40507 . . .) = 0,08 y* *P(Z < 1,59819 . . .) = 0,945*
$\dfrac{1{,}8-\mu}{\sigma} = -1{,}40507\ldots$ y $\dfrac{2{,}4-\mu}{\sigma} = 1{,}59819\ldots$	*Resolver el sistema en* μ *y* σ
$\mu = 2{,}08$ y $\sigma = 0{,}200$	

Ejercitación 15M

1 $X \sim \mathrm{N}(30, \sigma^2)$ y $\mathrm{P}(X > 40) = 0{,}115$. Halle el valor de σ.

2 $X \sim \mathrm{N}(\mu, 4^2)$ y $\mathrm{P}(X < 20{,}5) = 0{,}9$. Halle el valor de μ.

3 $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Sabiendo que $\mathrm{P}(X > 58{,}39) = 0{,}0217$ y $\mathrm{P}(X < 41{,}82) = 0{,}0287$, halle μ y σ.

4 Una variable aleatoria X sigue una distribución normal, con media μ y desviación típica σ, tal que $\mathrm{P}(X < 89) = 0{,}90$ y $\mathrm{P}(X < 94) = 0{,}95$. Halle μ y σ.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 La estatura media de los niños de cierta edad es de 136 cm. El 12% de los niños tienen una estatura de 145 cm o más. Halle la desviación típica de las estaturas.

6 La desviación típica de las masas de panes es de 20 g. Solo el 1% de los panes pesan menos de 500 g. Halle la masa media de los panes.

7 Las masas de las coliflores siguen una distribución normal, con una media de 0,85 kg. El 74% de las coliflores tienen una masa inferior a 1,1 kg. Halle:

a La desviación típica de las masas de las coliflores

b El porcentaje de coliflores con masa superior a 1 kg

8 Las longitudes de los clavos siguen una distribución normal, con media μ y desviación típica 7 mm. Si el 2,5% de los clavos miden más de 68 mm, halle el valor de μ.

9 Un rollo de papel de regalo se vende como de “3 m de largo”. Se ha encontrado que en realidad solo el 35% de los rollos miden más de 3 m y que la longitud media de los rollos es de 2,9 m.
Halle el valor de la desviación típica de las longitudes de los rollos de papel, suponiendo que las longitudes siguen una distribución normal.

> El científico belga Adolphe Jacques Quetelet (1796–1874) fue el primero en aplicar la distribución normal a las características humanas.
> Quetelet notó que características tales como la estatura, el peso, la altura y la fuerza seguían distribuciones normales.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

10 Se sospecha que las puntuaciones de un examen siguen una distribución normal. El 30% de los estudiantes logró menos de 108 puntos en la prueba, y el 20% más de 154 puntos.

a Halle la media y la desviación típica de las puntuaciones, si siguen una distribución normal.

b El 60% de los estudiantes logró más de 117 puntos. ¿Apoya este dato razonablemente la idea de que las puntuaciones siguen una distribución normal, como se indicó más arriba?

11 Debido a variaciones en la fabricación, las longitudes de las madejas de determinada lana se pueden modelizar mediante una distribución normal. Halle la media y la desviación típica, sabiendo que el 95% de las madejas tienen longitudes que exceden los 495 m y el 99% tienen longitudes que exceden los 490 m.

Ejercicio de revisión

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

1 La tabla muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X*.

x	−2	−1	0	1	2
P(*X* = *x*)	0,3	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	0,1	0,1

a Halle el valor de *k*.

b Halle el valor esperado de *X*.

2 La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X* se define por $P(X = x) = cx(6 - x)$, $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

a Halle el valor de *c*. **b** Halle E(*X*).

3 En un juego un jugador lanza un dado tetraédrico (de cuatro caras), que no es equilibrado. Se muestra la probabilidad de cada resultado posible. Halle la probabilidad de obtener una puntuación total de seis, después de dos juegos.

Puntuación	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	x

4 Un juego consiste en hacer girar dos perinolas. Una está numerada 1, 2, 3, 4. La otra está numerada 2, 2, 4, 4.
Se gira cada perinola una vez y se anota el resultado obtenido.
Sea *P* el producto de los números en las perinolas.

a Anote todos los valores posibles de *P*.

b Halle la probabilidad de cada valor de *P*.

c ¿Cuál es el valor esperado de *P*?

d Un matemático decide la cantidad de dinero de bolsillo para darle a su hijo cada semana haciéndole jugar a las perinolas el lunes a la mañana. Si el hijo hace girar las perinolas y el producto es mayor que 10, entonces recibe 10 libras. En cualquier otro caso, recibe 5. ¿Cuánto espera recibir el muchacho después de 10 semanas de jugar al juego?

PREGUNTA TIPO EXAMEN

5 En un tren, $\frac{1}{3}$ de los pasajeros escuchan música. Se eligen cinco pasajeros al azar. Halle la probabilidad de que exactamente tres estén escuchando música.

6 Cuando un niño juega un juego en una feria, la probabilidad de que gane un premio es 0,1. Juega el juego dos veces. Sea X el número total de premios que gana. Suponiendo que los juegos son independientes entre sí, halle $E(X)$.

7 X tiene una distribución normal con media 75 y desviación típica 5.

a Sabiendo que $P(X < 65) = P(X > a)$, halle el valor de a.

b Sabiendo que $P(65 < X < a) = 0{,}954$, halle $P(X > a)$.

Ejercicio de revisión

1 Se lanzan tres dados. Si sale un 1 o un 6 en alguno de los dados, se gana $1; si no, se debe pagar $5.
Le toca jugar a usted.

a ¿Cuál es la probabilidad de que gane $1?

b Copie y complete la tabla que muestra la distribución de probabilidad de X, "números de dólares ganados en el juego".

x	-5	1
$P(X = x)$		

c Halla la cifra que espera ganar (o perder) en:

i 1 juego **ii** 9 juegos

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Me gustan el 30% de las canciones que tiene mi amigo en su MP3.
Si elijo ocho canciones al azar:

a Halle la probabilidad de que me gusten exactamente tres canciones.

b Halle la probabilidad de que me gusten al menos tres canciones.

3 Halle la probabilidad de que salgan tres seises dos veces, en cinco lanzamientos de seis dados.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 En un colegio que tiene muchos alumnos una de cada cinco personas es zurda.

a Se toma una muestra aleatoria de 10 personas. Halle la probabilidad de que:

i Exactamente cuatro sean zurdas.

ii Más de la mitad sean zurdas.

b Halle el número más probable de gente zurda en una muestra de 10 personas.

c ¿Qué tan grande debe ser una muestra aleatoria para que la probabilidad de que contenga al menos una persona zurda sea mayor que 0,95?

5 Z es la variable aleatoria normalizada con media 0 y varianza 1. Halle el valor de a tal que $P(|Z| \le a) = 0{,}85$.

6 Los resultados de un grupo de alumnos en una prueba siguen una distribución normal, con media 71. El 85% de los alumnos tienen puntuaciones menores de 80.

a Halle la desviación típica de las puntuaciones.

Para pasar el examen un alumno debe tener una puntuación mayor de 65.

b Halle la probabilidad de que un alumno elegido al azar pase la prueba.

PREGUNTAS ESTILO EXAMEN

7 Las vidas útiles de ciertas baterías siguen una distribución normal. Se halló que el 15% de las baterías duran menos de 30 horas y el 10% de las baterías duran más de 50. Halle la media y la desviación típica de la vida útil de las baterías.

8 Los tiempos que le toma a Samuel llegar a la escuela cada mañana siguen una distribución normal, con una media de μ minutos y una desviación típica de 2 minutos. La probabilidad de que el viaje tome más de 35 minutos es 0,2.

a Halle el valor de μ.

Samuel debe estar en la escuela a las 8:45 y por lo tanto durante cinco días consecutivos se pone en marcha a las 8:10.

b Halle la probabilidad de que llegue antes de las 8:45 los cinco días.

c Halle la probabilidad de que llegue tarde al menos dos días.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 15

Variables aleatorias

- Una **variable aleatoria** es una cantidad cuyo valor depende del azar.
- La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta es una lista de todos los valores posibles de la variable aleatoria y la probabilidad de que ocurra cada valor.
- Para cualquier variable aleatoria X, $0 \leq \mathrm{P}(X = x) \leq 1$; $\sum \mathrm{P}(X = x) = 1$.
- El **valor esperado** de una variable aleatoria X es $\mathrm{E}(X) = \sum x\, \mathrm{P}(X = x)$.

La distribución binomial

Los elementos esenciales de una distribución binomial son:

- Hay un número (n) fijo de experimentos.
- Cada experimento tiene dos resultados posibles: "éxito" o "fracaso".
- La probabilidad de éxito es constante de experimento en experimento.
- Los experimentos son independientes entre sí.
- Una distribución binomial de la variable aleatoria X se escribe $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.
- La probabilidad de obtener r éxitos en n experimentos independientes, cuando p es la probabilidad de éxito en cada intento es

$$\mathrm{P}(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$$

- Para la distribución binomial donde $X \sim \mathrm{B}(n, p)$, $\mathrm{E}(X) = np$ y $\mathrm{Var}(X) = npq$ donde $q = 1 - p$.

La distribución normal

- Si una variable aleatoria, X, tiene una distribución normal con media μ y desviación típica σ, esto se escribe $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
- La distribución normal estándar se escribe $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.
- Si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces la variable aleatoria transformada $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ tiene una distribución normal estándar.

Estadísticas de la conducta humana

Los científicos sociales usan la estadística para estudiar el comportamiento humano. Algunas variables se pueden medir con bastante facilidad recogiendo y analizando datos, por ejemplo, población, ingresos, tasas de natalidad y mortalidad.

- ¿Es posible reducir toda actividad humana a un conjunto de datos estadísticos?
- ¿Existen características de la conducta humana que no se pueden medir?

La Organización de las Naciones Unidas y la Organización Mundial de la Salud recaban estadísticas de datos como estos y las utilizan para planificar programas de ayuda y de desarrollo.

Datos dinámicos

Hans Rosling es profesor en el Instituto Karolinska de Suecia, donde imparte cursos sobre salud mundial. En estos cursos se estudian muchísimos datos procedentes de diferentes países sobre fertilidad, esperanza de vida, mortalidad infantil y otros aspectos de la salud. Para hacer que los datos se entiendan más fácilmente, Rosling los transforma en gráficos móviles donde los datos cambian dinámicamente con el tiempo. Para ello desarrolló un software llamado Gapminder, el cual es de acceso gratuito. Su enfoque innovador y entretenido brindó conocimientos sorprendentes acerca de la pobreza mundial y la salud internacional.

Podemos ver al científico en acción y sus gráficos en sitios como YouTube o en el de Gapminder.

Experimentos de comportamiento humano

Los científicos sociales y los psicólogos a menudo recopilan datos sobre el comportamiento humano de la manera más científica posible.

A continuación presentamos algunos problemas asociados con este tipo de obtención de datos. Halle un ejemplo para cada uno.

El comportamiento de las personas puede cambiar cuando saben que están siendo estudiadas.

- Podemos investigar el "efecto Hawthorne".

Repetibilidad

Los experimentos científicos necesitan ser repetibles. Esto significa que otro grupo de investigadores (que no tienen conexión con el primer grupo) que llevan a cabo el mismo experimento en el marco de las mismas condiciones controladas deben obtener los mismos resultados. Cada repetición del experimiento que da el mismo resultado ayuda a confirmar la teoría.

- ¿La repetición **demuestra** la teoría?

Control

En un experimento científico en un laboratorio, se pueden controlar las condiciones para poder estudiar solo una variable (por ejemplo, el efecto del calor en una sustancia). Todas las variables que pueden afectar el resultado del experimento se controlan.

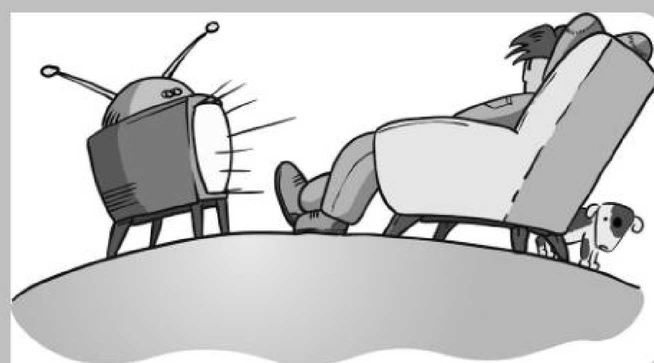
- ¿Es posible controlar todos los factores en un comportamiento humano?

Para llevar a cabo una investigación controlada de los efectos de la violencia televisiva en el comportamiento de los niños, se tendría que aislar a los niños de todos los demás factores que podrían influir en su comportamiento.

¡La gente miente!

En un estudio donde se les preguntó a los adolescentes estadounidenses cuánta televisión miraban, se halló una media de 7 horas a la semana. Pero los datos de otras fuentes sugieren una media nacional de 7 horas por día.

- ¿Qué razones llevaron a los adolescentes a mentir acerca de la cantidad de televisión que miraban?



Profecías que se cumplen

Las personas (quizás inconscientemente) se comportan en la forma en que se espera de ellas. Cuando un ministro de transporte predice que habrá colas en los surtidores de gasolina, esto podría causar que la gente vaya a las estaciones de gasolina y se formen largas colas.

- ¿Cómo podría cambiar nuestro comportamiento si supiéramos que nuestras interacciones con los demás están siendo observadas?

Agenda oculta

Los investigadores pueden tener una razón para querer que se dé un resultado en particular.

- ¿En quién confiaríamos para llevar a cabo una encuesta imparcial sobre los efectos del tabaquismo pasivo?
  - ¿En un importante fabricante de tabaco?
  - ¿En una campaña antitabaco?
  - ¿En una compañía que produce drogas contra el cáncer de pulmón?

El prejuicio y las preguntas capciosas

Cuando el investigador redacta sus preguntas de modo que las respuestas apoyen su teoría, sus prejuicios pueden haberse interpuesto.

Las preguntas capciosas fomentan una respuesta en particular.

- ¿Por qué estas preguntas son capciosas?
  - ¿Está de acuerdo en que los niños hoy hacen menos ejercicio?
  - ¿Cuánto cree usted que aumentará el desempleo?

16 La exploración

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

Como parte del curso de Matemáticas NM, los alumnos deben escribir un trabajo denominado “Exploración”. Este trabajo se evalúa internamente y su nota representa el 20% de la calificación final de la asignatura. En este capítulo se proporciona asesoramiento para planificar la exploración, así como consejos prácticos para redactarla de acuerdo a los criterios de evaluación del IB y así ayudar a los alumnos a obtener una buena nota. También se incluyen sugerencias para elegir el tema y cómo comenzar el trabajo.

16.1 Acerca de la exploración

La exploración es una oportunidad para mostrar cómo se aplican las matemáticas en un área de interés para los alumnos.

Los alumnos deberán procurar:

Dedicar 10 horas de clase a:	Dedicar 10 horas de su propio tiempo a:

• Examinar los criterios de evaluación
• Discutir sobre los temas y títulos adecuados
• Conversar con el profesor sobre cómo progresa el trabajo
	• Planificar la exploración e investigar qué temas se pueden elegir como los más apropiados
	• Buscar, recopilar y organizar los datos y la información
	• Aplicar los procesos matemáticos, asegurándose de que:
	  ▪ Todos los resultados se obtengan mediante el razonamiento deductivo lógico.
	  ▪ Las demostraciones, si fueran necesarias, sean coherentes y correctas.
	• Demostrar las habilidades de comunicación y presentación matemática asegurándose de:
	  ▪ Comprobar que la notación y la terminología se utilicen correctamente en todo momento
	  ▪ Agregar diagramás, gráficos o cuadros cuando resulte necesario
	  ▪ Redactar una exploración bien organizada y de fácil lectura

El colegio del alumno establecerá los plazos para la presentación de un borrador y el trabajo final.

Si un alumno no presenta una exploración, obtendrá una calificación de "N" para Matemáticas NM, lo que significa que no recibirá su diploma del IB.

Todos los alumnos matriculados en Matemáticas NM **deben** presentar una exploración. Deberán estar al tanto de los plazos que ha establecido su colegio al respecto, y asegurarse de cumplirlos.

16.2 Criterios de evaluación interna

El profesor del alumno evalúa la exploración teniendo en cuenta criterios de evaluación predeterminados. Posteriormente, el IB modera externamente el trabajo utilizando los mismos criterios.

Para calcular la nota final de la exploración se suman las puntuaciones otorgadas en cada criterio. La nota final máxima es 20 y representa el 20% de la calificación final de Matemáticas NM.

Una buena exploración debe ser clara y fácil de entender para los compañeros del alumno autor del trabajo, y explicarse por sí misma del principio al fin.

Los criterios se dividen en cinco áreas, de A a E:

Criterio A	Comunicación
Criterio B	Presentación matemática
Criterio C	Compromiso personal
Criterio D	Reflexión
Criterio E	Uso de las matemáticas

En este capítulo se proporciona más información sobre estos criterios, así como consejos prácticos para asegurar que la exploración se ajuste a los mismos. Es importante entender los criterios y consultarlos con frecuencia durante el proceso de redacción de la exploración.

Criterio A: Comunicación

Este criterio evalúa la organización, la coherencia, la concisión y la exhaustividad de la exploración.

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	La exploración tiene cierta coherencia.
2	La exploración tiene cierta coherencia y muestra cierta organización.
3	La exploración es coherente y está bien organizada.
4	La exploración es coherente, está bien organizada, y es concisa y completa.

Consejos prácticos

Cómo obtener una buena nota en el criterio A: Comunicación

✓ Una exploración bien organizada debe tener:

- Una **introducción** en la que se discute el contexto de la exploración
- Unos **fundamentos** o bases donde se explique por qué se eligió un determinado tema
- Una descripción del **propósito** de la exploración que permita delimitarla claramente
- Una **conclusión**

✓ Una exploración coherente está lógicamente desarrollada y es fácil de seguir.

✓ Su contenido debe “leerse bien”.

✓ Los gráficos, las tablas y los diagramas se deben incluir donde corresponda en el trabajo y no como anexos al final del documento.

✓ Una exploración concisa es aquella que se centra en el propósito de la exploración y evita todo lo que no es de pertinencia para el trabajo.

✓ Una exploración completa es una en la que todos los pasos se explican claramente sin comprometer la concisión.

✓ Es esencial citar las referencias de la manera apropiada. Es decir:

- Se deben incluir notas a pie de página. Si se usan citas de una publicación, una fórmula de un libro de matemáticas o cualquier otro material, se deberá colocar la fuente de la informacion en una nota a pie de página.
- Se debe incluir una bibliografía, según corresponda. Puede aparecer en un apéndice al final del trabajo. En ella se deberán anotar todos los libros, publicaciones, sitios web y demás fuentes que se utilicen.

Criterio B: Presentación matemática

Este criterio evalúa en qué medida el alumno es capaz de:

- Utilizar el lenguaje matemático apropiado (por ejemplo, notación, símbolos y terminología)
- Definir términos clave, cuando sea necesario
- Usar múltiples formas de representación matemática, tales como fórmulas, diagramas, tablas, gráficos y modelos, donde sea apropiado

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	La presentación matemática es, en cierto grado, adecuada.
2	La presentación matemática es, en su mayor parte, adecuada.
3	La presentación matemática es adecuada en su totalidad.

Consejos prácticos

Cómo obtener una buena nota en el criterio B: Comunicación matemática

- ✓ Se espera que el alumno utilice un lenguaje matemático apropiado para comunicar ideas, razonamientos y hallazgos matemáticos.
- ✓ Se anima a los alumnos a elegir y a utilizar las herramientas tecnológicas apropiadas, como calculadoras de pantalla gráfica, software matemático, hojas de cálculo, bases de datos, procesadores de texto y software de gráficos, según corresponda, con el fin de mejorar la comunicación matemática.
- ✓ Deberán definirse los términos clave, cuando sea necesario.
- ✓ Los resultados deberán expresarse con el grado adecuado de aproximación, cuando corresponda.
- ✓ Si se utilizan gráficos, estos siempre deberán estar rotulados e incluir la escala. Las tablas deberán tener los encabezados apropiados.
- ✓ Se deberán definir explícitamente todas las variables.
- ✓ No se debe utilizar la notación de una calculadora o un computador. Por ejemplo, se debe usar 2^x en lugar de 2^x; × en lugar de *; 0,028 en lugar de 2,8E-2.

Criterio C: Compromiso personal

Este criterio evalúa la medida en que el alumno se compromete con la exploración y la hace propia.

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Hay indicios de un compromiso personal limitado o superficial.
2	Hay indicios de cierto compromiso personal.
3	Hay indicios de un importante compromiso personal.
4	Hay numerosos indicios de un excelente compromiso personal.

Consejos prácticos

Cómo obtener una buena nota en el criterio C: Compromiso personal

✓ El alumno deberá elegir un tema que despierte su interés personal, puesto que de esa manera le será más fácil demostrar su compromiso.

✓ El compromiso personal puede evidenciarse a través de ciertos atributos y destrezas, por ejemplo:

- Pensar y trabajar independientemente
- Pensar creativamente
- Abordar temas que nos interesan especialmente
- Presentar las ideas matemáticas de manera original
- Hacer preguntas, elaborar conjeturas e investigar ideas matemáticas
- Identificar y crear modelos matemáticos para situaciones del mundo real
- Tener en cuenta las perspectivas históricas y mundiales
- Explorar aspectos desconocidos de las matemáticas

Criterio D: Reflexión

Este criterio evalúa en qué medida el alumno revisa, analiza y evalúa la exploración.

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Hay indicios de una reflexión limitada o superficial.
2	Hay indicios de una reflexión significativa.
3	Hay indicios contundentes de una reflexión crítica.

Consejos prácticos

Cómo obtener una buena nota en el criterio D: Reflexión

✓ Aunque la reflexión puede verse en la conclusión de la exploración, también puede evidenciarse a lo largo de la exploración.

✓ Reflexionar en la exploración puede consistir en lo siguiente:

- Discutir las implicaciones de los resultados
- Considerar la importancia de las conclusiones y los hallazgos
- Indicar las posibles limitaciones o ampliaciones de los resultados
- Hacer conexiones con diferentes campos o áreas de las matemáticas

Criterio E: Uso de las matemáticas

Este criterio evalúa en qué medida los alumnos utilizan las matemáticas en la exploración.

Nivel	Descriptor de nivel
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes.
2	Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes. Se demuestra una comprensión limitada.
3	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Se demuestra una comprensión limitada.
4	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son parcialmente correctos. Se demuestran cierto conocimiento y cierta comprensión.
5	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son, en su mayor parte, correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión buenos.
6	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión sólidos.

Consejos prácticos

Cómo obtener una buena nota en el criterio E: Uso de las matemáticas

- ✓ Se espera que el alumno produzca un trabajo que sea acorde con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados deben ser, o bien parte del programa de estudios, o de un nivel similar (o superior).
- ✓ Estos aspectos no deben estar basados únicamente en los temas de matemáticas incluidos en los conocimientos previos.
- ✓ **Si el nivel de matemáticas no es acorde con el nivel del curso, se puede otorgar, como máximo, dos puntos en este criterio.**
- ✓ El alumno necesita demostrar que comprende completamente las matemáticas que empleó en su exploración.

16.3 Cómo se evalúa la exploración

El profesor evaluará la exploración después de que el alumno presente la versión final de la misma. Para hacerlo, examina la exploración con respecto a los criterios, uno por vez. Cuando llega a un descriptor de nivel que la exploración no llega a satisfacer, establece la puntuación del nivel anterior como la puntuación para el criterio que está evaluando.

El profesor envía las puntuaciones al IB, a través de un sitio web especial. El IB hace una selección automática de una muestra de las exploraciones de cada colegio en base a las puntuaciones ingresadas y envía esta muestra a un moderador externo. El moderador examina los trabajos de acuerdo con los criterios de evaluación y verifica si el profesor ha calificado las exploraciones adecuadamente.

Si el profesor ha aplicado los criterios de evalución de manera muy severa, entonces las puntuaciones de la exploración de un colegio particular pueden aumentarse. Si en cambio lo ha hecho de forma demasiado generosa, ello puede hacer que todas las puntuaciones de un colegio disminuyan.

16.4 Probidad académica

La probidad académica es un tema de importancia fundamental. Por tal motivo, los alumnos deberán leer las directrices del IB sobre probidad académica y estar familiarizados con ellas.

El profesor o el coordinador del Programa del Diploma del colegio pueden ayudar a los alumnos a acceder a estas directrices.

Un alumno cumple con los requisitos de **probidad académica** cuando:

- Presenta un trabajo que es de su autoría original.
- Es el propietario intelectual del trabajo que presenta.
- Se comporta correctamente en los exámenes escritos.
- Cita correctamente el material tomado de otras fuentes.

Un **trabajo original** es aquel que:

- Se basa en las ideas originales del alumno.
- Utiliza el trabajo o las ideas de otros, pero lo reconoce explícitamente (a través de notas a pie de página y la bibliografía, por ejemplo).
- Utiliza el lenguaje y la expresión propios del alumno, tanto en tareas de evaluación orales como escritas.
- Cita todas las fuentes completamente y de manera apropiada (por ejemplo, en una bibliografía).

Conducta improcedente

La Organización del IB define la **conducta improcedente** como toda "acción (ya sea deliberada o involuntaria) de un alumno matriculado por la cual este u otro alumno matriculado sale o puede salir beneficiado injustamente en uno o varios componentes de la evaluación".

La palabra "plagio" se deriva del latín *plagium*, que significa "apropriación indebida de una persona".

La **conducta improcedente** incluye:

- El plagio, es decir, la copia del trabajo de los demás, sea publicado o no
- La colusión, es decir, colaborar en secreto con al menos otra persona con el fin de obtener una ventaja indebida. Esto incluye hacer pasar la exploración de otro como propia, y viceversa.
- El doble uso de un trabajo (para distintos componentes de evaluación)
- Cualquier otro comportamiento que permita ganar una ventaja injusta

Se recomienda que los colegios:

- Estipulen y promuevan su propia política de probidad académica en toda la institución.
- Se aseguren de que todos los alumnos matriculados comprendan claramente la política.
- Garanticen que todas las áreas de estudio apliquen la política.
- Informen claramente a los alumnos matriculados acerca de las posibles sanciones por infringir las reglas relacionadas con la probidad académica.

Los colegios **deben** hacer cumplir las sanciones, en caso de haberse incurrido en ellas.

Fuentes de referencia

Es importante recordar que se deben citar todas las fuentes de referencia utilizadas en la exploración. Tanto los docentes como los moderadores pueden generalmente darse cuenta cuando una exploración ha sido plagiada.

El documento del IB sobre probidad académica contiene una definición de lo que se considera "plagio".

Muchos colegios emplean programas informáticos especiales para detectar el plagio. Si se comprueba que un alumno ha cometido plagio, no se le otorgará el diploma. Por lo tanto, no vale la pena correr el riesgo.

16.5 Registros

Llevar un diario durante la exploración también contribuirá a demostrar probidad académica.

A lo largo de todo el curso, resulta provechoso mantener un diario de la exploración, ya sea de forma manual o virtual. Llevar un diario ayudará a centrar la búsqueda de un tema y también a recordar los plazos de entrega.

Quienes utilizan un diario para Teoría del Conocimiento probablemente comprenderán la utilidad que presta para escribir el ensayo. Del mismo modo, un diario de la exploración ayudará a los alumnos a concentrar mejor los esfuerzos.

- A medida que se avanza en la exploración, es conveniente anotar los libros y sitios web que se consultan, para así poder incluirlos en la bibliografía.
- Existen diferentes métodos para citar fuentes. Los alumnos deberán utilizar el aconsejado por el colegio y asegurarse de emplearlo **sistemáticamente**.
- Conviene también llevar un registro de las diferentes actividades para así poder mostrar al profesor cómo se utiliza el tiempo en la exploración. Se deberá incluir el tiempo de las reuniones con el profesor para hablar de la exploración.
- Es muy importante seguir el consejo del profesor y cumplir los plazos de entrega dispuestos por el colegio.
- El profesor está allí para ayudar a los alumnos, así que nadie debe tener reparos en pedir orientación. Cuanto más centradas las preguntas, mejor el consejo que puede dar el profesor.

16.6 Elección del tema

El profesor puede presentar como estímulo a la clase una serie de áreas generales de donde podría surgir el tema. O también puede animar a los alumnos a encontrar sus propios temas en función de sus intereses y nivel de competencia matemática.

Se deberá escoger un tema que sea de particular interés para cada uno de nosotros: así, podremos disfrutar mejor de nuestro trabajo, esforzarnos más y demostrar el compromiso personal de manera más efectiva. La discusión del tema con el profesor debe tener lugar antes de dedicarnos de lleno a la redacción de la exploración.

En cada capítulo de este libro se sugieren ideas para investigar, que pueden resultar un punto de partida para la elección del tema de la exploración.

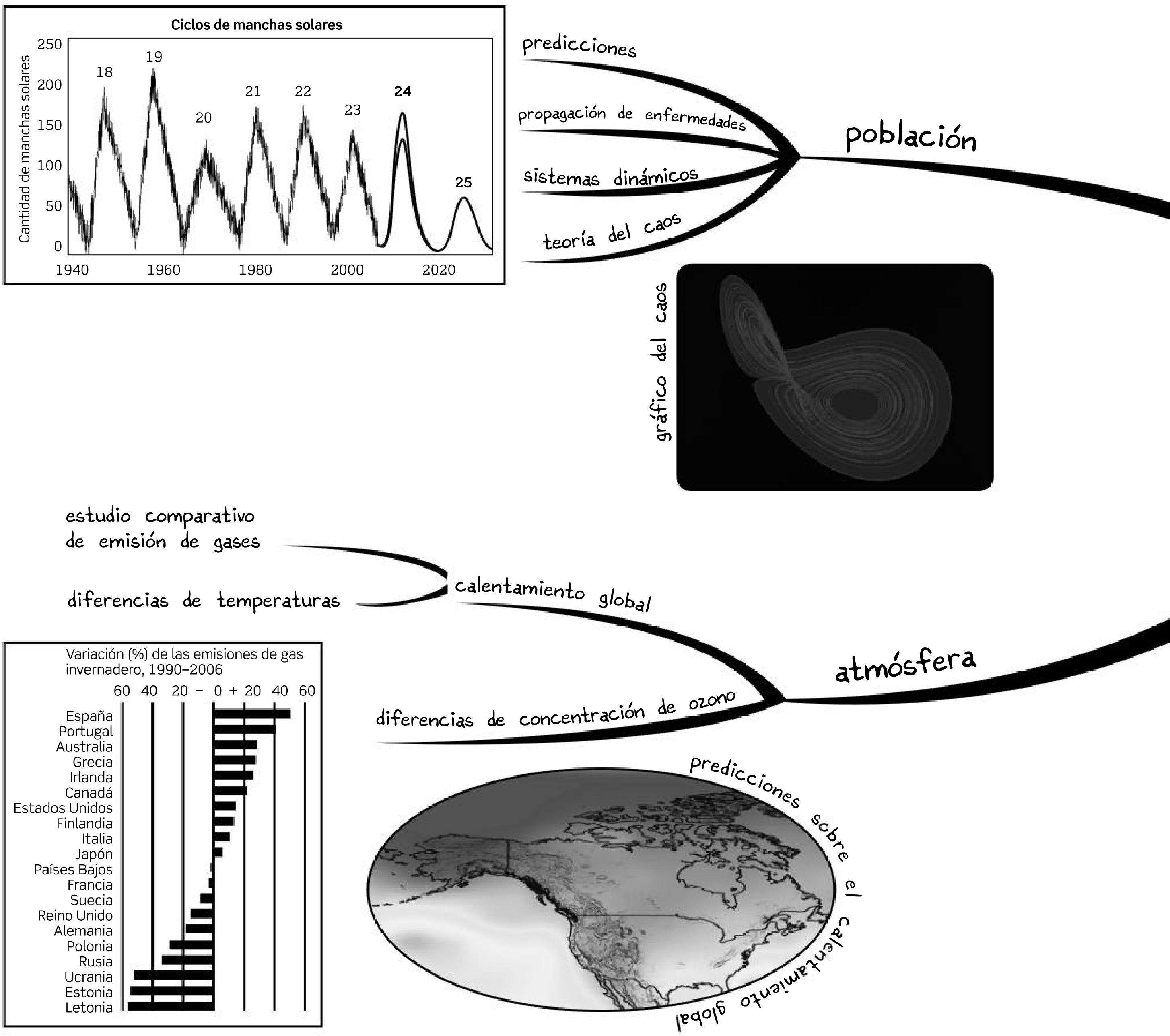
Las siguientes preguntas nos pueden ayudar a encontrar un tema apropiado para nuestra exploración:

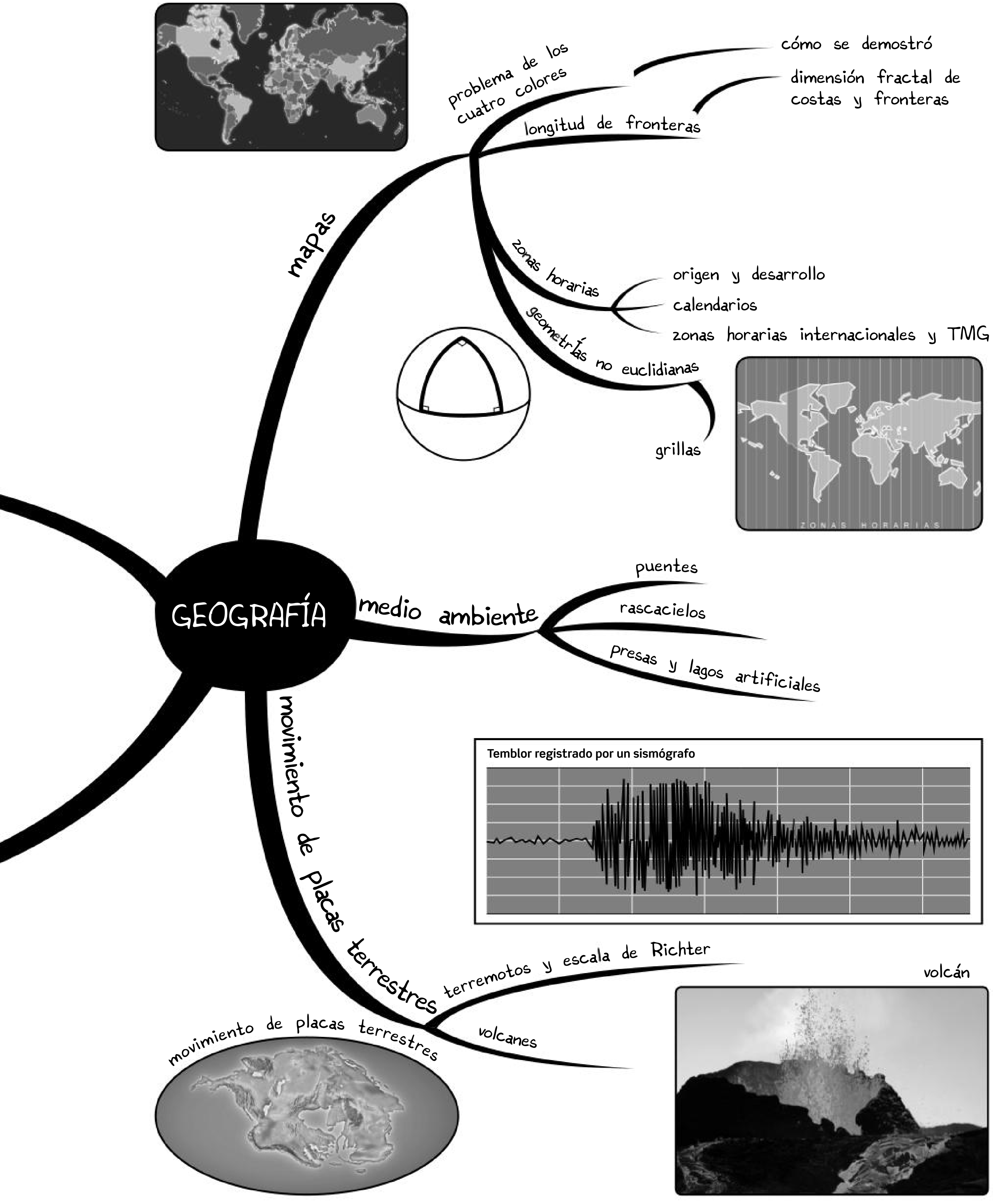
- ¿Cuáles son las áreas del programa de estudios que más disfruto?
- ¿Cuáles son las áreas del programa de estudios en las que me va mejor?
- ¿En qué habilidades matemáticas soy más competente?
- ¿Prefiero las matemáticas puras, o los problemas de aplicación y la modelización?
- ¿He descubierto, ya sea por la lectura o los medios de comunicación, áreas matemáticas fuera del programa de estudios que me parezcan interesantes?
- ¿Qué camino profesional deseo seguir y qué tipo de matemáticas son útiles en ese campo?
- ¿Cuáles son mis propios intereses o pasatiempos? ¿Qué lugar ocupan las matemáticas en estas áreas?

Una herramienta para elegir el tema

Un modo de elegir el tema es comenzar con un área general que nos interese y a partir de ella construir lo que se denomina un mapa mental. El mapa mental puede conducirnos a ideas interesantes sobre aplicaciones matemáticas que podríamos explorar.

El mapa que se presenta a continuación muestra cómo un área amplia, "Geografía", puede llevarnos a encontrar sugerencias para exploraciones en tópicos diversos como la propagación de las enfermedades, los terremotos o el calentamiento global.




GEOGRAFÍA
mapas
problema de los cuatro colores
cómo se demostró
longitud de fronteras
dimensión fractal de costas y fronteras
zonas horarias
origen y desarrollo
calendarios
zonas horarias internacionales y TMG
geometrías no euclidianas
grillas
ZONAS HORARIAS
medio ambiente
puentes
rascacielos
presas y lagos artificiales
Temblor registrado por un sismógrafo
movimiento de placas terrestres
terremotos y escala de Richter
volcanes
volcán
movimiento de placas terrestres

16.7 Comienzo de la exploración

Después de que se ha elegido el tema, el siguiente paso es hacer algunas indagaciones con el fin de determinar si el tema es apropiado para la exploración.

No debemos limitarnos a buscar en Internet: la biblioteca del colegio seguramente tendrá muchos libros interesantes sobre matemáticas y relacionados con una gran variedad de campos.

Las siguientes preguntas nos ayudarán a decidir si el tema elegido es apropiado.

- ¿Qué áreas de las matemáticas abarca mi tema?
- ¿Cuáles de estas áreas son accesibles para mí o son parte del programa de estudios?
- ¿Hay alguna área conectada con el tema pero fuera del programa de estudios con la que me tengo que familiarizar para poder completar mi exploración? ¿Soy capaz de hacer esto?
- ¿El tema elegido me permite mostrar mi compromiso personal? ¿Cómo?
- ¿El tema elegido me permite redactar la exploración dentro del límite recomendado de páginas de 6 a 12?

Si la opción original del tema no resulta conveniente, quizás podamos ver si nuestras indagaciones nos han sugerido otro mejor. De lo contrario, ¿podemos ampliar o acotar el tema original para hacerlo más apropiado para la exploración?

Una vez que hemos encontrado un tema que nos parece viable, es útil describir brevemente lo siguiente:

- Las razones para elegir el tema
- La relación del tema con las matemáticas
- Las áreas matemáticas a las que pertenece el tema, por ejemplo: álgebra, geometría, trigonometría, análisis, probabilidad y estadística, etc.
- Los principales conceptos matemáticos relacionados con el tema, por ejemplo: áreas de figuras irregulares, ajuste de curvas, modelización de datos, etc.
- Las habilidades matemáticas que necesitaremos, por ejemplo: desarrollo de demostraciones formales, integración, operaciones con números complejos, representación gráfica de funciones definidas por partes, etc.

- Las áreas fuera del programa de estudios con las que necesitaremos familiarizarnos
- Los recursos tecnológicos y programas informáticos que nos pueden ayudar a diseñar la exploración y a presentar los procedimientos matemáticos
- La terminología y la notación matemáticas que se requieran según el tema

Ahora ya estamos listos para comenzar a escribir sobre el tema de forma más detallada.

Debemos recordar que la exploración debe tener un nivel que resulte fácil de leer y entender para uno de nuestros compañeros de clase. Incluso podemos pedir a uno de ellos que lea nuestro trabajo y nos dé comentarios sobre partes que no estén claras, para así poder mejorarlas.

Debemos asegurarnos de cumplir con los plazos internos que nos asigna el profesor. De esta manera, podemos continuar el trabajo teniendo en cuenta las observaciones y comentarios que nos ha dado el profesor sobre la etapa anterior.

17 Problemas y operaciones con la calculadora de pantalla gráfica

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

Este capítulo nos muestra cómo usar la calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG) para resolver los distintos tipos de problemas que encontraremos en el curso de Matemáticas NM. No es necesario leer el capítulo completo, ya que ha sido incluido en este libro a modo de referencia. Cuando resolvemos los problemas que se plantean en el libro, podemos referirnos a este capítulo para obtener ayuda adicional con la CPG, en caso de necesitarla.

Estas instrucciones son para el modelo TI-Nspire.

Contenidos del capítulo

Antes de comenzar

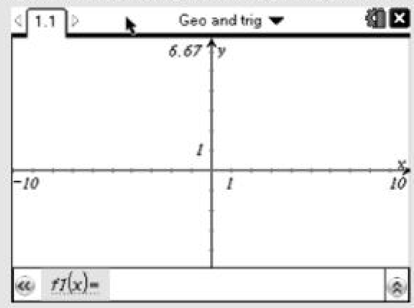
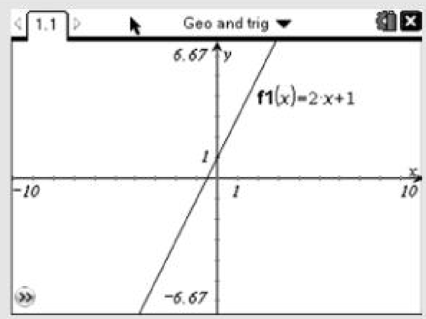
Qué necesitamos saber

- Cuáles son las teclas importantes: On, menu, esc, tab, ctrl, shift, enter, del
- Cómo es la pantalla de inicio
- Cómo abrir un nuevo documento, agregar páginas nuevas y cambiar configuraciones
- Cómo pasar de una página a otra en un documento
- Cómo agarrar y desplazar los ejes para cambiar la ventana en una página de gráficos
- Cómo cambiar la configuración en una página de gráficos
- Cómo usar las herramientas de zoom en una página de gráficos
- Cómo trazar un gráfico en una página de gráficos
- Ajustar el número de cifras significativas o cifras decimales

1 Funciones

1.1 Gráficos de funciones lineales

Ejemplo 1

Obtenga el gráfico de la función $y = 2x + 1$.	
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Graphs** (gráficos) La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo. El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), así que aparece la forma "*f1*(*x*)=". Los ejes predeterminados son $-10 \le x \le 10$ y $-6{,}67 \le y \le 6{,}67$. Ingresar $2x + 1$ y presionar enter	
El gráfico de $y = 2x + 1$ se visualiza en la pantalla y aparece rotulado.	

Información del gráfico

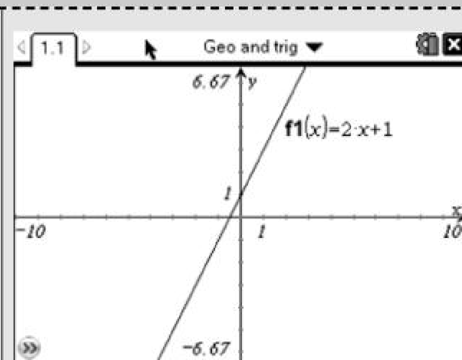
La CPG puede ofrecer mucha información acerca del gráfico de una función, como por ejemplo las coordenadas de puntos de interés y la pendiente.

1.2 Cómo hallar los ceros

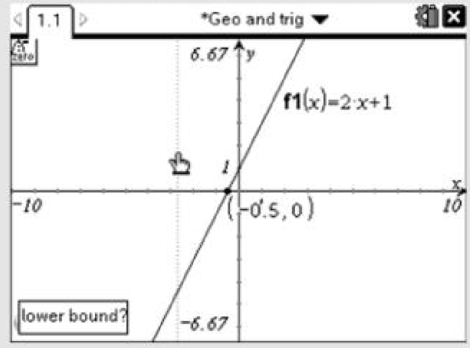
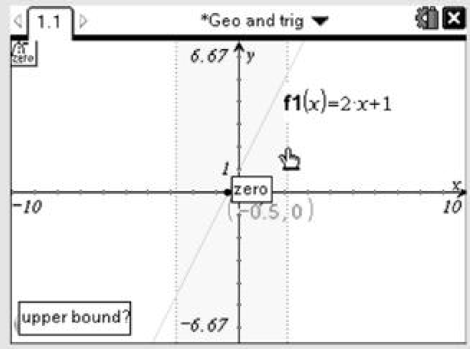
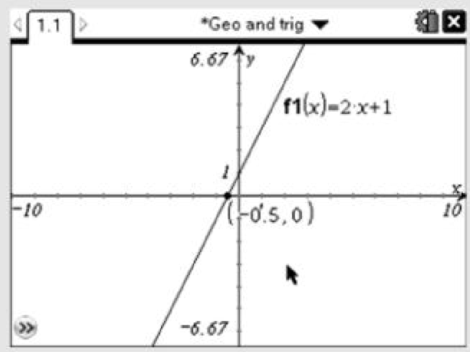
La coordenada x de un punto de intersección del gráfico de una función con el eje x se denomina *cero* de la función.

En el punto de intersección con el eje x, $y = 0$.

Ejemplo 2

Halle el cero de $y = 2x + 1$.	
Primero dibujar el gráfico de $y = 2x + 1$ (véase el ejemplo 1)	

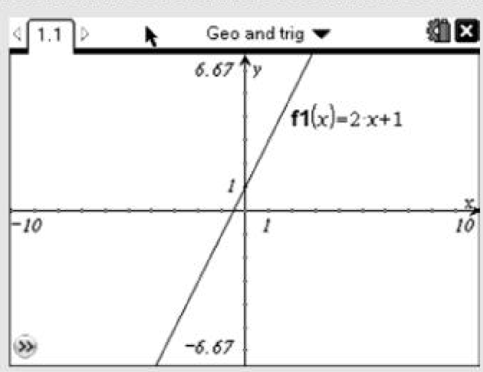
▶ Continúa en la página siguiente.

Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) | **1: Zero** (cero) Presionar enter Para hallar el cero, es necesario marcar el límite inferior y el límite superior de una región de búsqueda que lo contenga. La CPG muestra una línea punteada y pide un límite inferior (“lower bound?”). Mover la línea usando el *touchpad* (pantalla sensible al tacto) y elegir una posición a la izquierda del cero Hacer clic en el *touchpad*	
La CPG muestra otra línea y pide el límite superior (“upper bound?”). Utilizar el *touchpad* para mover la línea, de manera que la región entre el límite inferior y el superior contenga al cero. Cuando esto suceda, aparecerá la palabra “zero” (cero) en una etiqueta. Hacer clic en el *touchpad*	
En la CPG se visualiza el cero de la función $y = 2x + 1$ en el punto $(-0{,}5; 0)$. El cero de la función es $-0{,}5$.	

1.3 Cómo hallar la pendiente de una recta

La expresión matemática correcta para la pendiente es $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y esta es la notación que utiliza la CPG.

Ejemplo 3

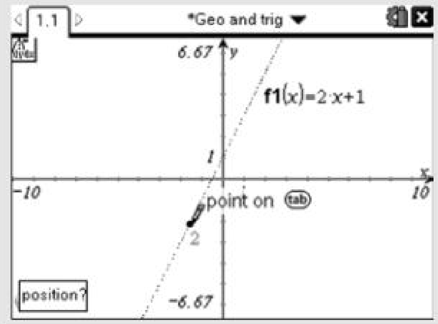
Halle la pendiente de $y = 2x + 1$.	
Primero dibujar el gráfico de $y = 2x + 1$ (véase el ejemplo 1)	

▶ Continúa en la página siguiente.

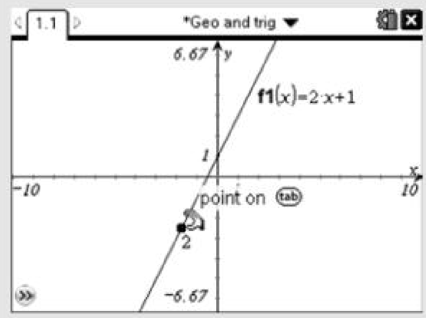
Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) | **5 : dy/dx**

Presionar enter

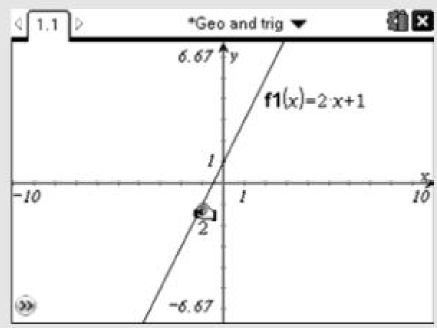
Usar el *touchpad* para seleccionar un punto que esté sobre la recta
Hacer clic en el *touchpad*



El punto seleccionado se visualiza junto con la pendiente de la recta en ese punto.
La pendiente es 2.



Con el símbolo de la mano abierta, hacer clic en el *touchpad* nuevamente. Ahora la mano está agarrando el punto. Mover el punto a lo largo de la recta usando el *touchpad*.
Esto confirma que la pendiente de $y = 2x + 1$ en cualquier punto es 2.



Sistemas de ecuaciones

1.4 Resolución de sistemas de ecuaciones de forma gráfica

Para resolver sistemas de ecuaciones de manera gráfica, se dibujan las rectas y luego se halla el punto de intersección. Las coordenadas del punto de intersección son los valores de las incógnitas del sistema, x e y.

Para resolver sistemas de ecuaciones con un método que no sea gráfico, véase la sección 1.5 de este capítulo.

Ejemplo 4

Utilice un método gráfico para resolver el sistema de ecuaciones:

$2x + y = 10$

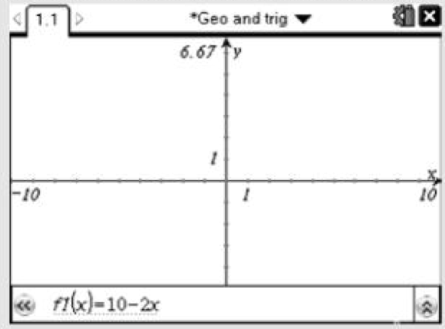
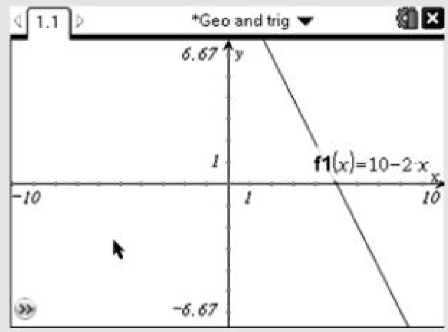
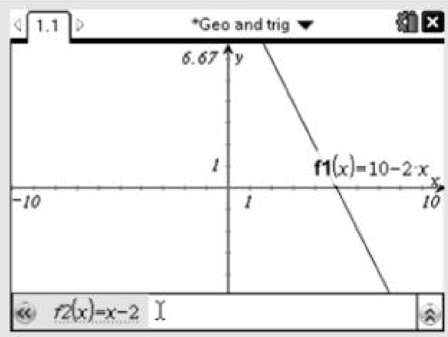
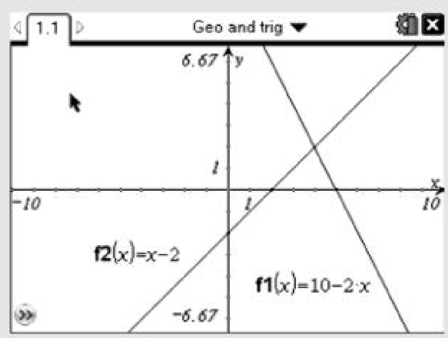
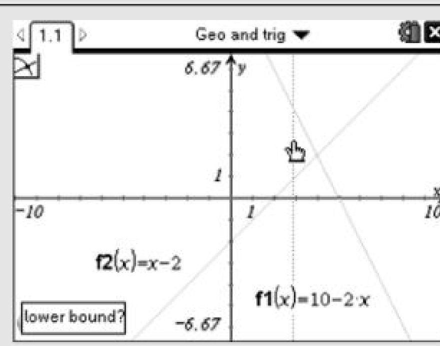
$x - y = 2$

Primero reescribir las ecuaciones en la forma "$y =$"

$2x + y = 10$	$x - y = 2$
$y = 10 - 2x$	$-y = 2 - x$
	$y = x - 2$

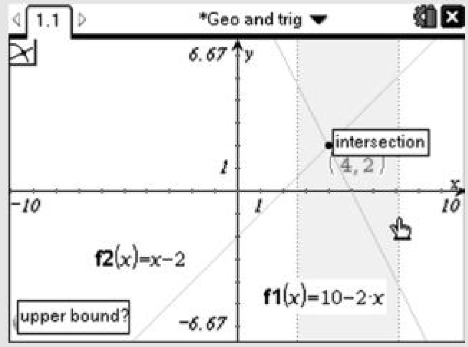
La CPG solo dibujará los gráficos de funciones definidas explícitamente, es decir, como "y = una función de x". Si la ecuación está escrita en una forma diferente, primero habrá que reordenarla.

▶ Continúa en la página siguiente.

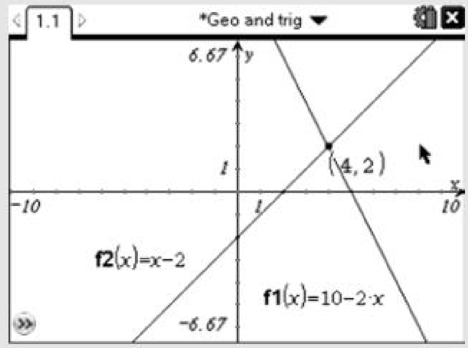
<table>
<tr><td>Para dibujar los gráficos $y = 10 - 2x$ e $y = x - 2$:
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Graphs** (gráficos)
La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo.
El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), así que aparece la forma "$f1(x)$=".
Los ejes predeterminados son $-10 \le x \le 10$ y $-6{,}67 \le y \le 6{,}67$.
Ingresar $10 - 2x$ y presionar enter</td><td>
</td></tr>
<tr><td>La CPG muestra la primera recta:
$f1(x) = 10 - 2x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Usar el *touchpad* para hacer clic en las flechas que se encuentran en la parte inferior izquierda de la pantalla
Esto abrirá de nuevo la línea de ingreso. Esta vez se visualiza "$f2(x)$=".
Ingresar $x - 2$ y presionar enter</td><td>
</td></tr>
<tr><td>La CPG ahora muestra ambas rectas:
$f1(x) = 10 - 2x$
$f2(x) = x - 2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) \|
4: Intersection Point(s) (punto[s] de intersección)
Presionar enter
Para hallar el punto de intersección, es necesario marcar el límite inferior y el límite superior de una región de búsqueda que contenga al punto.
La CPG muestra una línea punteada y pide un límite inferior ("lower bound?").
Mover la línea usando el *touchpad* y elegir una posición a la izquierda del punto de intersección
Hacer clic en el *touchpad*</td><td>
</td></tr>
</table>

▶ Continúa en la página siguiente.

La CPG muestra otra línea y pide el límite superior (“upper bound?”).
Utilizar el *touchpad* para mover la línea, de manera que la región entre el límite inferior y el superior contenga al punto de intersección
Cando esto suceda, aparecerá la palabra “intersection” (intersección) en una etiqueta.
Hacer clic en el *touchpad*
Presionar enter



La CPG muestra la intersección de ambas rectas en el punto (4, 2).
La solución es $x = 4$, $y = 2$.



1.5 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

No es necesario escribir las ecuaciones de ninguna forma en particular cuando se utiliza la CPG para resolver un sistema de ecuaciones, siempre que ambas sean *lineales*; es decir, que ninguna de las ecuaciones contenga x^2 o términos de mayor grado.

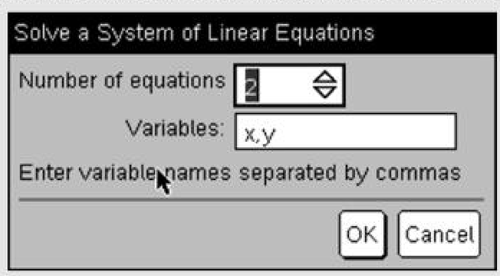
Al resolver un sistema de ecuaciones en un examen, no es necesario mostrar ningún método de resolución. Simplemente se deben escribir las ecuaciones en la forma correcta y luego dar las soluciones. La CPG hará todo el trabajo por nosotros.

Ejemplo 5

Resuelva el sistema de ecuaciones:

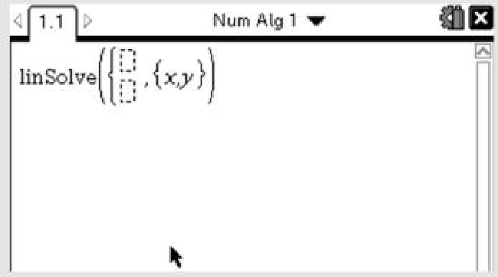
$$2x + y = 10$$
$$x - y = 2$$

Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Presionar menu **3: Algebra** (álgebra) | **2: Solve System of Linear Equations** (resolver un sistema de ecuaciones lineales)
Presionar enter
Se verá este cuadro de diálogo, que muestra dos ecuaciones y las dos variables, x e y.
Nota: Esta es la forma en que se usa la CPG para resolver ecuaciones lineales en los exámenes. En la exploración, quizás necesite resolver un sistema más complejo, con más ecuaciones y más variables.

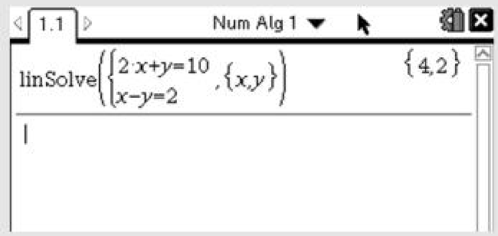


▶ Continúa en la página siguiente.

Al presionar enter, se verá la plantilla de la derecha. Ingresar las dos ecuaciones en la plantilla, usando las teclas ▼▲ para moverse dentro de la plantilla
Al presionar enter, la CPG resolverá el sistema, dando las soluciones en la forma $\{x, y\}$.



Las soluciones son $x = 4$, $y = 2$.



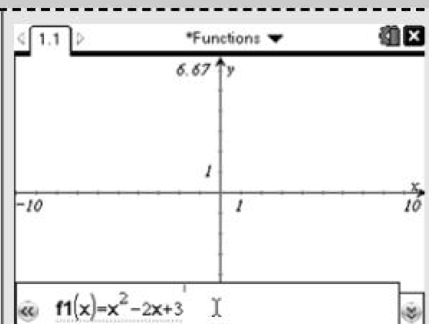
Funciones cuadráticas

1.6 Gráficos de funciones cuadráticas

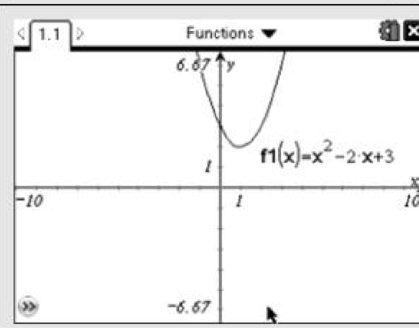
Ejemplo 6

Obtenga el gráfico de $y = x^2 - 2x + 3$, usando escalas apropiadas en los ejes.

Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Graphs** (gráficos)
La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo.
El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), así que aparece la forma "*f1*(x)=".
Los ejes predeterminados son $-10 \le x \le 10$ y $-6{,}67 \le y \le 6{,}67$.
Ingresar $x^2 - 2x + 3$ y presionar enter

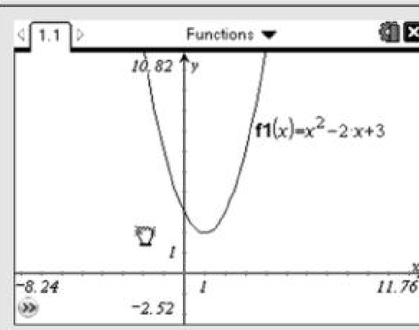


La CPG muestra la curva con los ejes predeterminados.



Desplazar los ejes para obtener una mejor vista de la curva

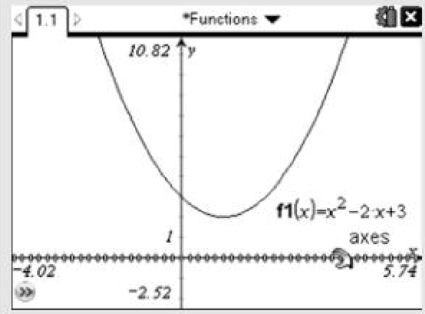
Para obtener ayuda con el desplazamiento de los ejes, véase el manual de la CPG.



▶ Continúa en la página siguiente.

Agarrar el eje x y cambiarlo para que la curva cuadrática se ajuste mejor a la pantalla

Para obtener ayuda sobre cómo cambiar los ejes, véase el manual de la CPG.



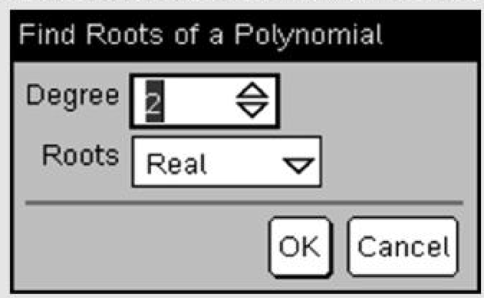
1.7 Resolución de ecuaciones cuadráticas

Al resolver ecuaciones cuadráticas en un examen, no es necesario mostrar ningún método de resolución. Simplemente se deben escribir las ecuaciones en la forma correcta y luego dar las soluciones. La CPG hará todo el trabajo por nosotros.

Ejemplo 7

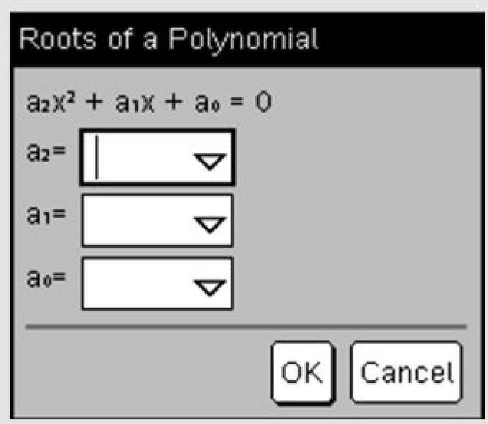
Resuelva $3x^2 - 4x - 2 = 0$.

Presionar menu **3: Algebra** (álgebra) | **3: Polynomial Tools** (herramientas para polinomios) | **1: Find Roots of a Polynomial** (encontrar raíces del polinomio)
Presionar enter
Se verá este cuadro de diálogo, que muestra un polinomio de grado 2 (expresión cuadrática) con raíces reales. No es necesario cambiar nada.
Presionar enter

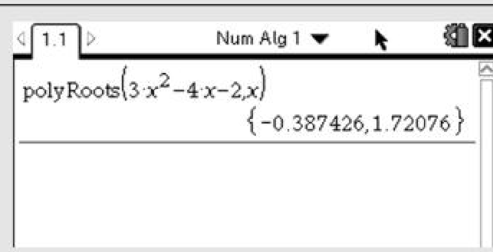


Se abre otro cuadro de diálogo para ingresar la ecuación. La forma general de una ecuación cuadrática es $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, así que debemos ingresar el valor de los coeficientes a_0, a_1 **y** a_2.
Aquí, $a_2 = 3$, $a_1 = -4$ y $a_0 = -2$. Hay que asegurarse de usar la tecla (-) al ingresar los valores negativos. Usar la tecla tab para moverse alrededor del cuadro de diálogo.

Al presionar enter, la CPG resolverá la ecuación, dando las raíces en la forma $\{x, y\}$.



Las soluciones son $x = -0{,}387$ o $x = 1{,}72$ (3 cs).

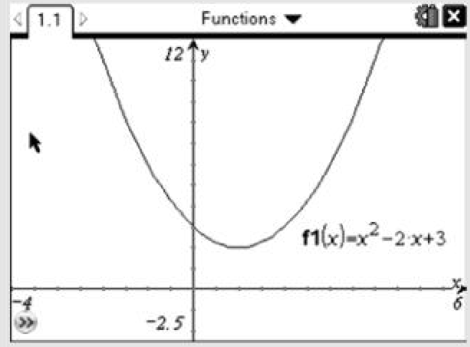


1.8 Cómo hallar un punto mínimo o punto máximo local

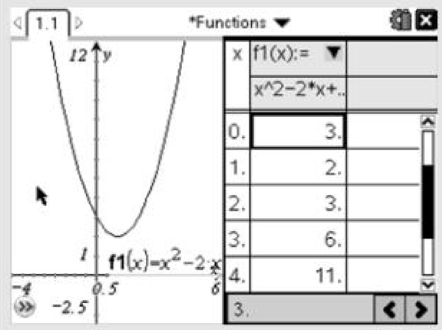
Ejemplo 8

Halle el punto mínimo del gráfico de $y = x^2 - 2x + 3$.

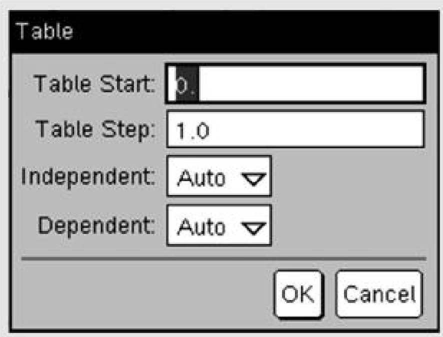
Primero dibujar el gráfico de $y = x^2 - 2x + 3$ (véase el ejemplo 6)



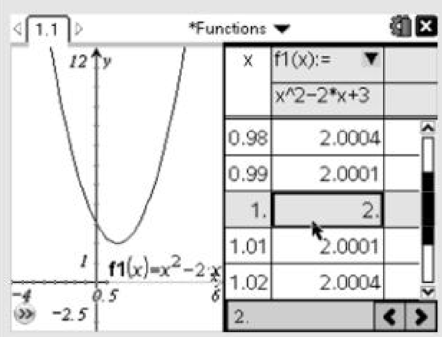
Método 1: usar una tabla
Se puede ver el gráfico **y** una tabla de valores del gráfico, usando una pantalla dividida.
Presionar menu **2: View** (ver) | **9: Show Table** (mostrar tabla), o simplemente ctrl T
El valor mínimo que se ve en la tabla es 2, cuando $x = 1$.



Se deben mirar más de cerca los valores de la función alrededor de $x = 1$.
Cambiar la configuración de la tabla
Seleccionar cualquiera de las celdas y presionar menu
5: Table (tabla) | **5: Edit Table Settings** (editar configuración de tabla)
Definir "Table Start" (inicio de tabla) en 0.98 y "Table Step" (paso de tabla) en 0.01
Presionar enter

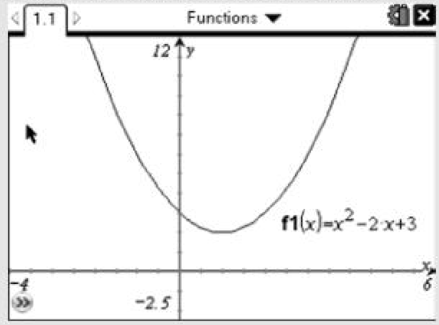


La tabla muestra que la función toma valores más grandes en puntos que están alrededor del (1, 2). Podemos concluir entonces que el punto (1, 2) es un mínimo local de la curva.



▶ Continúa en la página siguiente.

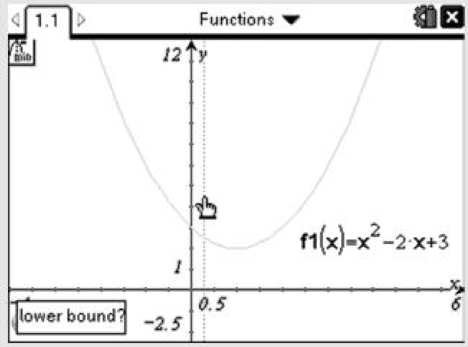
Método 2: usar la herramienta "Minimum" (mínimo)



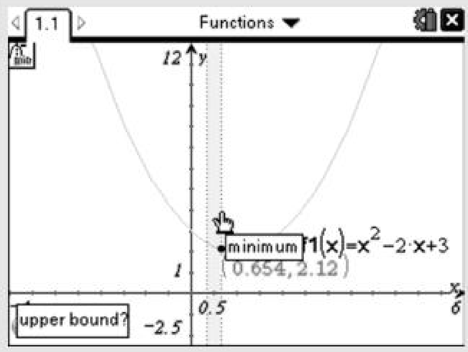
Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) | **2: Minimum** (mínimo)

Presionar enter

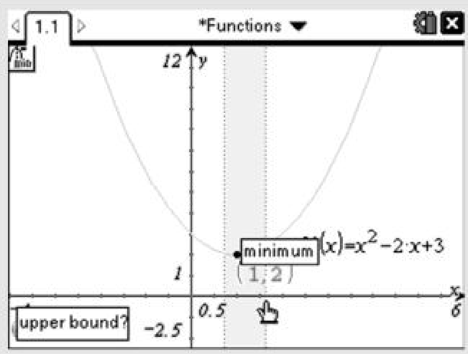
Para hallar el mínimo, es necesario marcar el límite inferior y el límite superior de una región de búsqueda que lo contenga. La CPG muestra una línea punteada y pide un límite inferior ("lower bound?").
Mover la línea usando el *touchpad* y elegir una posición a la izquierda del mínimo
Hacer clic en el *touchpad*



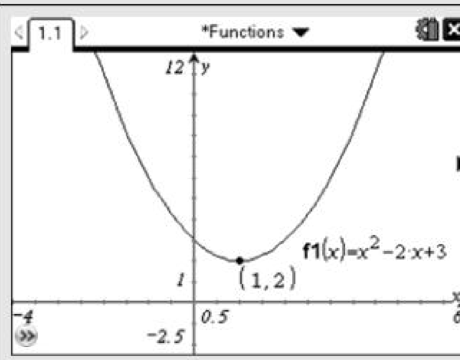
La CPG muestra otra línea y pide el límite superior ("upper bound?").
Utilizar el *touchpad* para mover la línea, de manera que la región entre el límite inferior y el superior contenga al mínimo.
Nota: En cada región que se define, la CPG muestra el mínimo. En esta captura de pantalla, el punto que se muestra no es el mínimo local de la curva. Hay que asegurarse de definir las líneas de manera que la región definida contenga al punto mínimo que se está buscando.



Cuando la región contiene al mínimo, aparecerá una etiqueta con la palabra "minimum" (mínimo) y un punto que se encuentra entre el límite inferior y el superior. El punto que se muestra está claramente entre esos límites.
Hacer clic en el *touchpad*



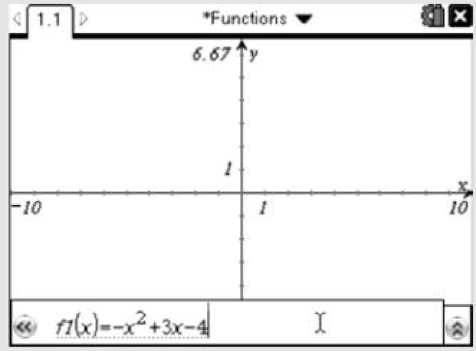
La CPG muestra el punto mínimo de la curva en (1, 2).



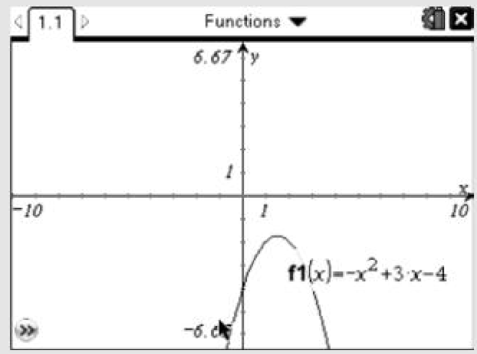
Ejemplo 9

Halle el punto máximo del gráfico de $y = -x^2 + 3x - 4$.

Primero dibujar el gráfico de $y = -x^2 + 3x - 4$:
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Graphs** (gráficos)
La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo.
El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), así que aparece la forma "$f1(x)$=".
Los ejes predeterminados son $-10 \le x \le 10$ y $-6{,}67 \le y \le 6{,}67$.
Ingresar $-x^2 + 3x - 4$ y presionar enter

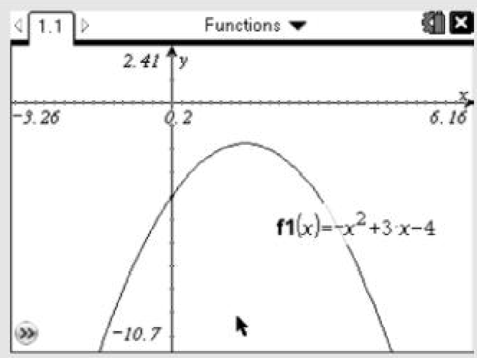


La CPG muestra la curva con los ejes predeterminados.

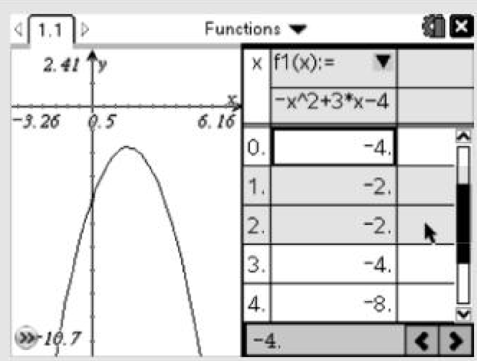


Desplazar los ejes para obtener una mejor vista de la curva
Agarrar el eje x y cambiarlo para que la curva cuadrática se ajuste mejor a la pantalla.

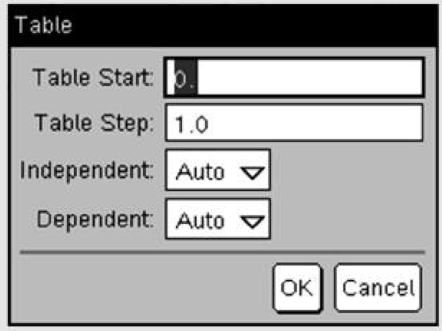
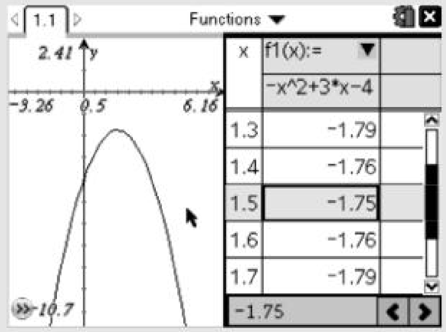
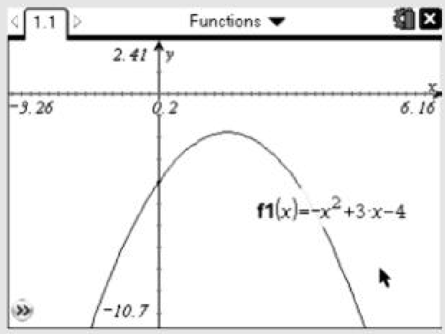
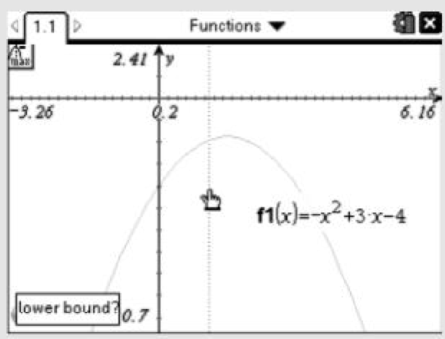
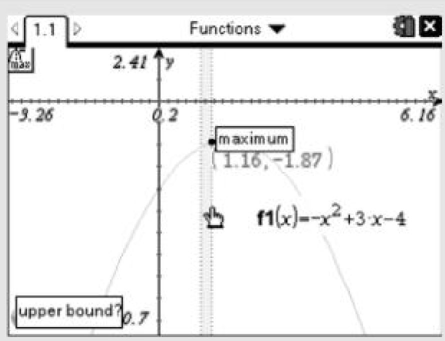
Para obtener ayuda con el desplazamiento de los ejes o para cambiarlos, véase el manual de la CPG.



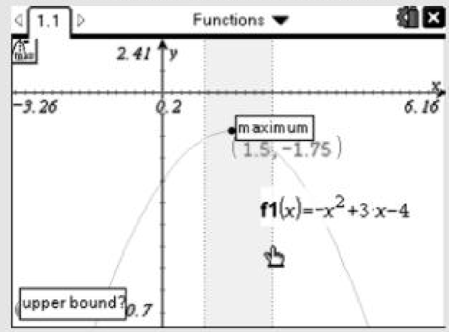
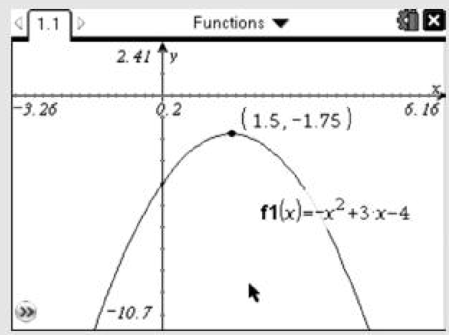
Método 1: usar una tabla
Se puede ver el gráfico **y** una tabla de valores del gráfico, usando una pantalla dividida.
Presionar menu **2: View** (ver) | **9: Show Table** (mostrar tabla), o simplemente ctrl T
El valor máximo que se ve en la tabla es -2, cuando $x = 1$ y cuando $x = 2$.



▶ Continúa en la página siguiente.

Se deben mirar más de cerca los valores de la función entre $x = 1$ y $x = 2$. Cambiar la configuración de la tabla Seleccionar cualquiera de las celdas y presionar menu **5: Table** (tabla) | **5: Edit Table Settings** (editar configuración de tabla) Definir “Table Start” (inicio de tabla) en 1.0 y “Table Step” (paso de tabla) en 0.1 Presionar enter	
Desplazarse hacia abajo en la tabla. Observar que la función toma su mayor valor en (1,5; −1,75). Por lo tanto, el punto (1,5; −1,75) es un máximo local de la curva.	
Método 2: usar la herramienta “Maximum” (máximo)	
Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) | **3: Maximum** (máximo) Presionar enter Para hallar el máximo, es necesario marcar el límite inferior y el superior de una región de búsqueda que lo contenga. La CPG muestra una línea punteada y pide un límite inferior (“lower bound?”). Mover la línea usando el *touchpad* y elegir una posición a la izquierda del máximo Hacer clic en el *touchpad*	
La CPG muestra otra línea y pide el límite superior (“upper bound?”). Utilizar el *touchpad* para mover la línea, de manera que la región entre el límite inferior y el superior contenga al punto máximo **Nota:** En cada región que se define, la CPG muestra el máximo. En esta captura de pantalla, el punto que se muestra no es el máximo local de la curva. Hay que asegurarse de definir las líneas de manera que la región definida contenga al punto máximo que se está buscando.	

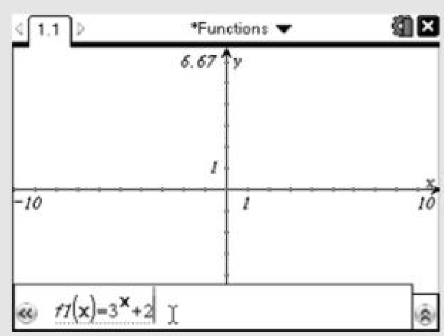
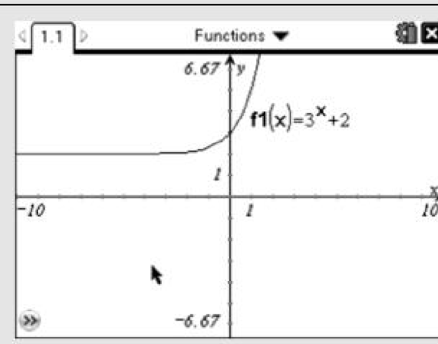
▶ Continúa en la página siguiente.

Cuando la región contiene al máximo, aparecerá una etiqueta con la palabra "maximum" (máximo) y un punto que se encuentra entre el límite inferior y el superior. El punto que se muestra está claramente entre esos límites. Hacer clic en el *touchpad*	
La CPG muestra el punto máximo de la curva en (1,5; −1,75).	

Funciones exponenciales

1.9 Gráficos de funciones exponenciales

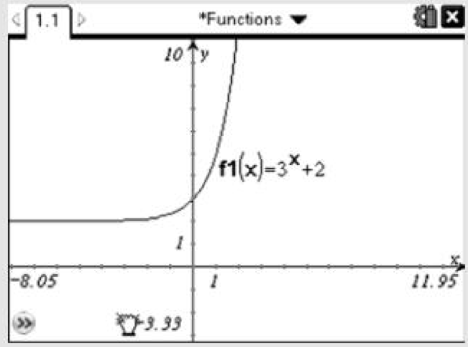
Ejemplo 10

Obtenga el gráfico de $y = 3^x + 2$.	
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Graphs** (gráficos) La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo. El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), así que aparece la forma "*f1*(*x*)=". Los ejes predeterminados son $-10 \leq x \leq 10$ y $-6{,}67 \leq y \leq 6{,}67$. Ingresar $3^x + 2$ y presionar enter (**Nota:** Ingresar 3 ^ X ▶ para ingresar 3^x. La ▶ permite volver a la línea base desde el exponente.)	
La CPG muestra la curva con los ejes predeterminados.	

▶ Continúa en la página siguiente.

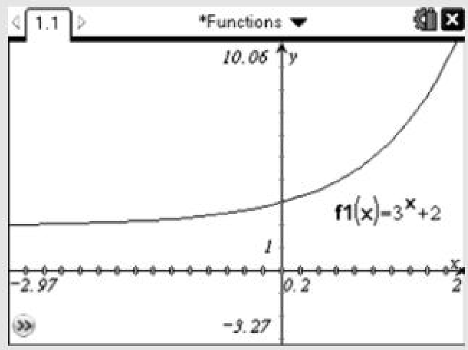
Desplazar los ejes para obtener una mejor vista de la curva.

Para obtener ayuda con el desplazamiento de los ejes, véase el manual de la CPG.



Agarrar el eje x y cambiarlo, para que la curva exponencial se ajuste mejor a la pantalla

Para obtener ayuda sobre cómo cambiar los ejes, véase el manual de la CPG.

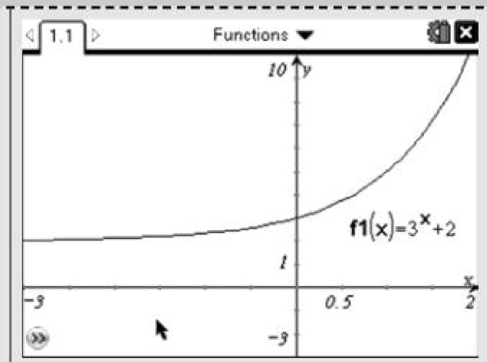


1.10 Cómo hallar una asíntota horizontal

Ejemplo 11

Halle la asíntota horizontal al gráfico de $y = 3^x + 2$.

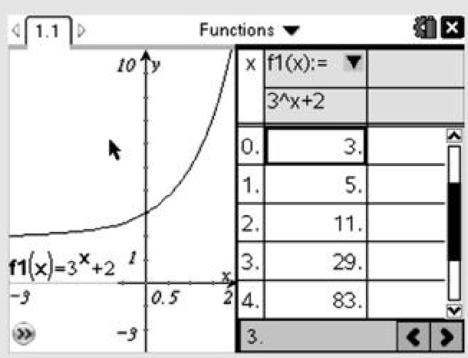
Primero dibujar el gráfico de $y = 3^x + 2$ (véase el ejemplo 10)



Se puede ver el gráfico **y** una tabla de valores del gráfico, usando una pantalla dividida.

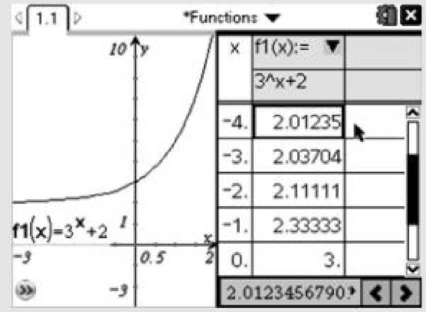
Presionar menu **2: View** (ver) | **9: Show Table** (mostrar tabla), o simplemente ctrl T

Está claro que los valores de la función decrecen cuando $x \to 0$.

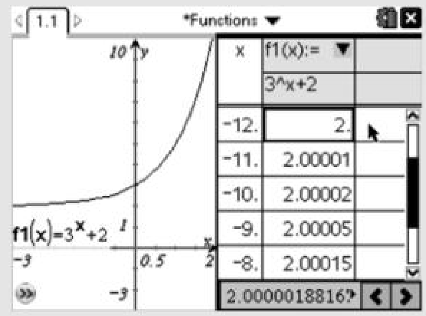


▶ Continúa en la página siguiente.

Presionar y mantener presionado ▲ para desplazarse hacia arriba en la tabla
La tabla muestra que, a medida que los valores de x se hacen más pequeños, $f1(x)$ se acerca a 2.



A partir de determinado valor (12), el valor de $f1(x)$ es 2.
Mirando más minuciosamente, se puede ver, en la parte inferior de la pantalla, que el valor real de $f1(x)$ cuando $x = -12$ es 2,0000018816….
Podemos decir que $f1(x) \to 2$ a medida que $x \to -\infty$.
La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la curva $y = 3^x + 2$.



Funciones logarítmicas

1.11 Evaluación de logaritmos

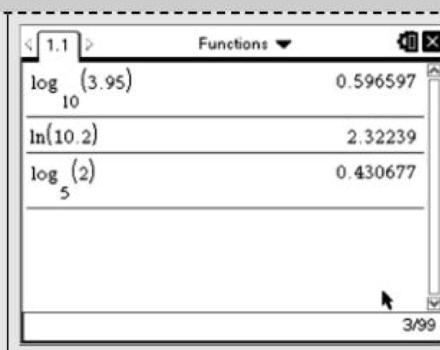
Ejemplo 12

Evalúe $\log_{10} 3{,}95$; $\ln 10{,}2$ y $\log_5 2$.

Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Presionar ctrl log para editar la plantilla del logartimo
Ingresar la base y el argumento y luego presionar enter del

Para obtener un logaritmo natural, es posible usar el mismo método, con la base igual a e, pero resulta más eficiente presionar ctrl ln.

La CPG evaluará logaritmos en cualquier base sin tener que usar la fórmula del cambio de base.



1.12 Cómo hallar la función inversa

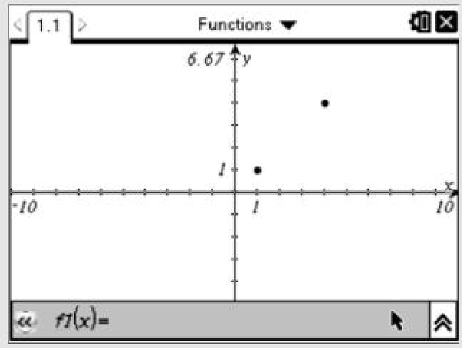
La inversa es una función que se puede hallar intercambiando la x y la y. Geométricamente, esto puede lograrse aplicando a los puntos una simetría respecto de la recta $y = x$.

Ejemplo 13

Muestre que la función inversa de la función $y = 10^x$ es $y = \log_{10} x$, aplicando una simetría a $y = 10^x$ respecto de la recta $y = x$.

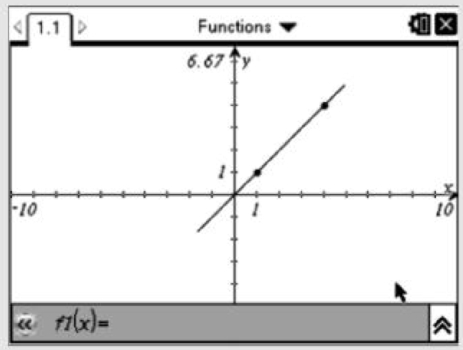
Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Graphs** (gráficos)
Primero dibujar la recta $y = x$. Esta recta la debemos dibujar y no representar gráficamente como una función, para que se la pueda identificar como eje de simetría.
Presionar menu **7: Points and Lines** (puntos y líneas) | **1: Point** (punto)

Luego ingresar (1 enter 1 enter y después (4 enter 4 enter esc
Se representarán los puntos (1, 1) y (4, 4), que pertenecen a la recta $y = x$.



Presionar menu **7: Points and Lines** (puntos y líneas) | **4: Line** (línea)

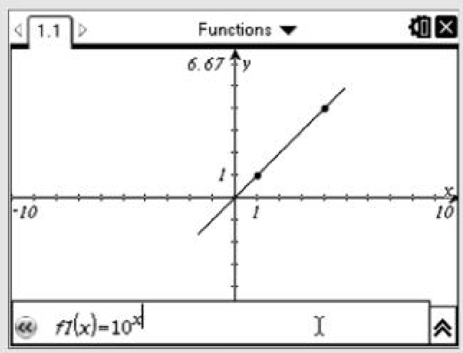
Seleccionar ambos puntos representados y dibujar una recta que los contenga
Presionar esc para salir del modo dibujo



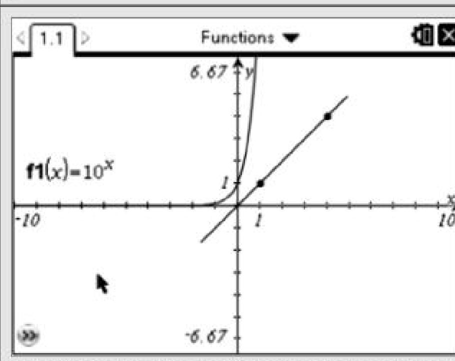
Hacer clic en la línea de ingreso al pie del área de trabajo

El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), por lo que veremos "$f1(x)$=".

Ingresar 10^x y presionar enter



La calculadora muestra la función con los ejes predeterminados, $-10 \leq x \leq 10$ y $-6{,}67 \leq y \leq 6{,}67$.



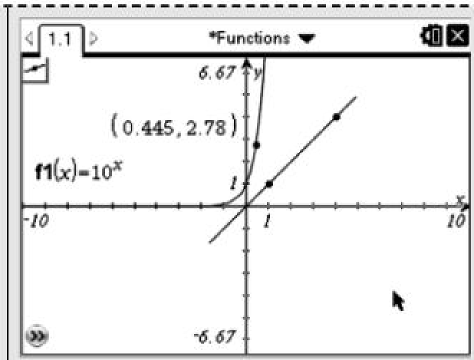
▶ Continúa en la página siguiente.

<table>
<tr>
<td>

Presionar menu **7: Points and Lines** (puntos y líneas) | **2: Point on** (punto en)

Seleccionar la curva con el *touchpad* (se verá resaltada cuando sea seleccionada)
Se puede colocar un punto en cualquier lugar de la curva.

</td>
<td>



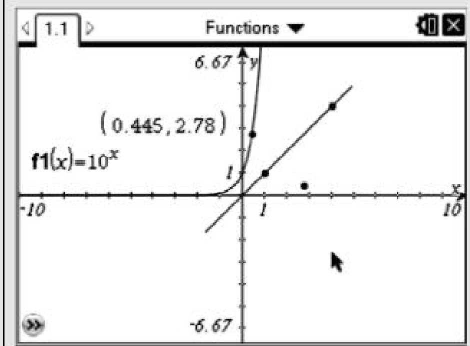
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Presionar menu **B: Transformation** (transformación) | **2: Reflection** (simetría)

Usar el *touchpad* para seleccionar el punto que recién se colocó en la curva y luego la recta $y = x$

Presionar esc cuando se haya finalizado. Se debería ver la imagen simétrica del punto, respecto de la recta $y = x$.

</td>
<td>

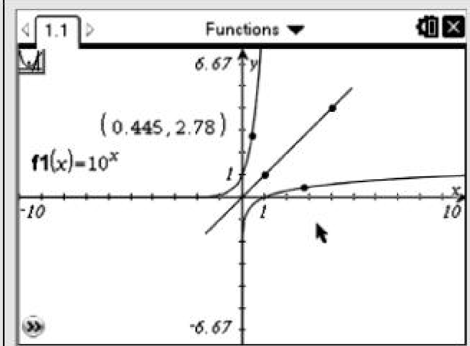


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Presionar menu **A: Construction** (construcción) | **6: Locus** (lugar geométrico)

Usar el *touchpad* para seleccionar los puntos. La calculadora mostrará el lugar geométrico de la simetría, a medida que desplace el punto a lo largo de la curva.

</td>
<td>



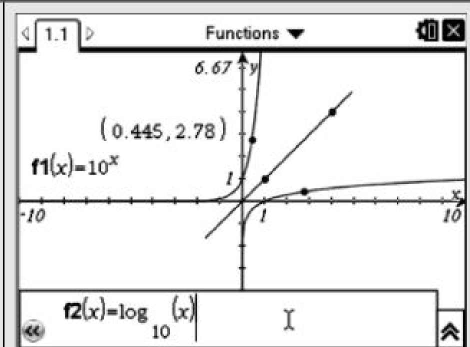
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Hacer clic en la línea de ingreso al pie del área de trabajo
Se muestra "*f2*(*x*)=".

Ingresar $\log_{10}(x)$ y presionar enter

La curva simétrica y la función logaritmo coinciden, lo cual comprueba que $y = \log_{10} x$ es la función inversa de $y = 10^x$.

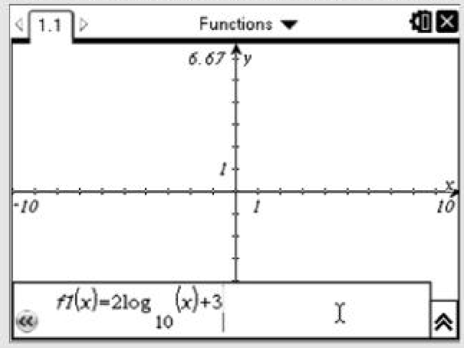
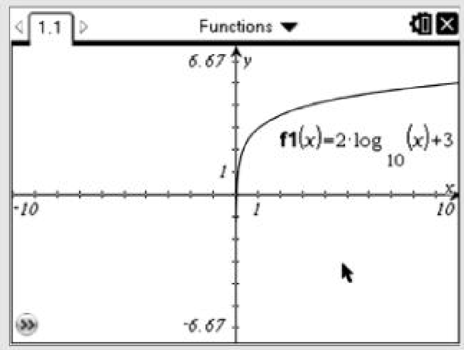
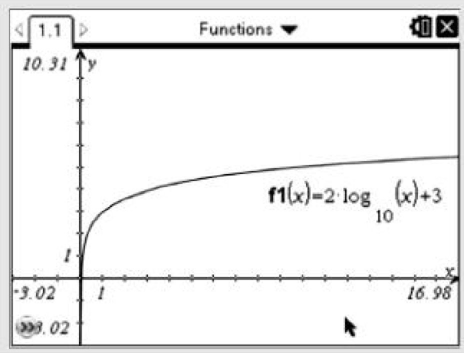
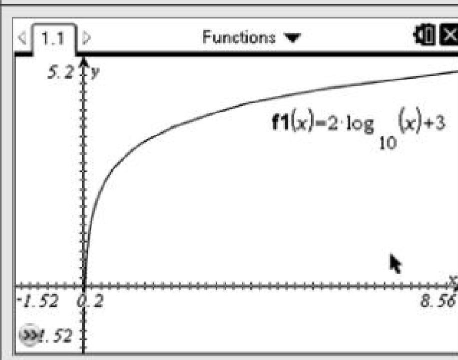
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

1.13 Gráficos de funciones logarítmicas

Ejemplo 14

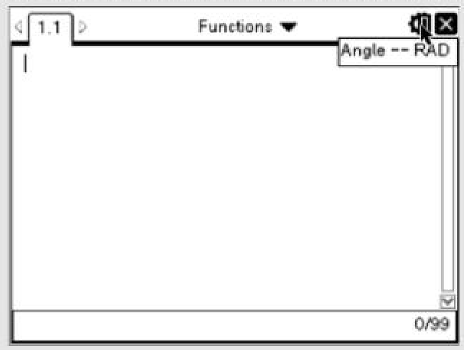
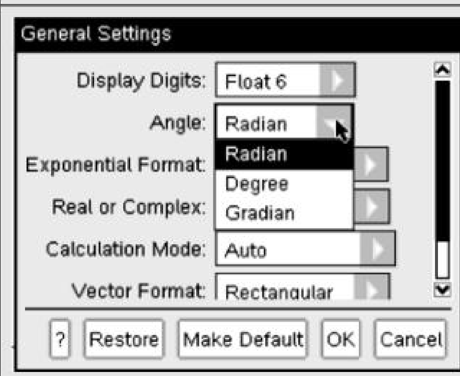
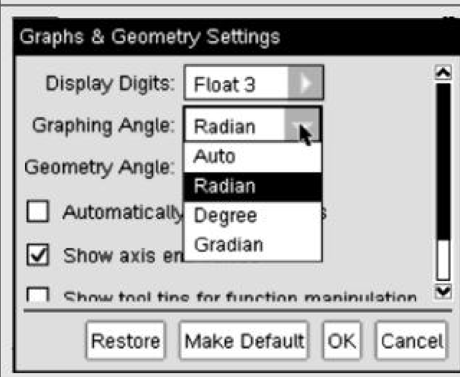
<table>
<tr><td colspan="2">Obtenga el gráfico de $y = 2\log_{10} x + 3$.</td></tr>
<tr><td>Abrir un documento nuevo y agregar una página de Graphs (gráficos)
La línea de ingreso aparece al pie del área de trabajo.
El tipo de gráfico predeterminado es Function (función), por lo que veremos “$f1(x)$=”.
Los ejes predeterminados son $-10 \leq x \leq 10$ y $-6{,}67 \leq y \leq 6{,}67$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ingresar $2\log_{10}(x) + 3$ y presionar enter
(Nota: ingresar 2 ctrl log y 10 como la base del logaritmo. Ingresar x en la parte correspondiente al argumento en la plantilla, usar la ▶ para desplazarse fuera de los paréntesis para ingresar +3.)
La calculadora muestra la curva con los ejes predeterminados.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Desplazar los ejes para obtener una mejor vista de la curva</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Seleccionar el eje x con la mano que agarra y cambiarlo para hacer que la curva logarítmica se ajuste mejor a la pantalla</td><td>
</td></tr>
</table>

Funciones trigonométricas

1.14 Grados y radianes

Como en los problemas de trigonometría se emplearán tanto grados como radianes, es importante saber cómo verificar en qué modo está operando la CPG y cómo cambiar de uno a otro. En el modelo TI-Nspire, la CPG puede configurarse según tres opciones distintas: general, gráfica y geométrica. En las opciones general y gráfica la configuración predeterminada es en radianes y en la opción geométrica, en grados. Normalmente, las configuraciones importantes son la general y la gráfica, pues la geométrica se usa solamente para dibujar figuras geométricas planas. La configuración general permite medir los ángulos empleados en los cálculos y la gráfica permite dibujar gráficos trigonométricos.

Ejemplo 15

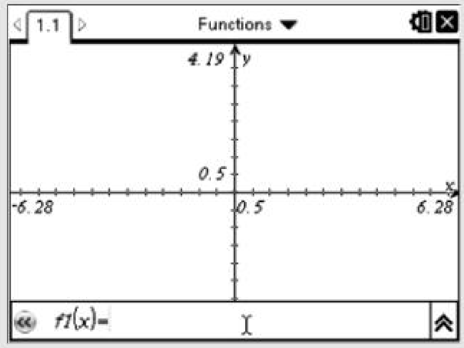
<table>
<tr><td colspan="2">Cambie la configuración de radianes a grados y viceversa.</td></tr>
<tr><td>Abrir un documento nuevo y agregar una página de Calculator (calculadora)
Mover el cursor hacia el símbolo en la parte superior derecha de la pantalla. Mostrará el modo general para el ángulo: radianes o grados.
Hacer clic en el símbolo y seleccionar 2: Settings (configuraciones) | 1: General (general)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>En el cuadro de diálogo, seleccionar la opción Radian (radián) o Degree (grado) y luego hacer clic en OK</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Para modificar la configuración gráfica, hacer clic en el símbolo y seleccionar 2: Settings (configuraciones) | 2: Graphs and Geometry (gráficos y geometría)
En el cuadro de diálogo, seleccionar la opción Radian (radián) o Degree (grado) en “Graphing Angle” (ángulo para graficar) y luego hacer clic en OK</td><td>
</td></tr>
</table>

1.15 Gráficos de funciones trigonométricas

Ejemplo 16

Obtenga el gráfico de $y = 2\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Graphs** (gráficos)
Presionar menu **4: Window/Zoom** (ventana/zoom) | **8: Zoom-Trig** (zoom-trigonometría)
La línea de ingreso aparece al pie del área de trabajo. El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), por lo que veremos "$f1(x)$=".
Los ejes predeterminados son $-6{,}28 \leq x \leq 6{,}28$ y $-4{,}19 \leq y \leq 4{,}19$.
Estos son los ejes predeterminados para la representación de funciones trigonométricas cuyo valores de x se encuentren entre -2π y 2π. En el caso de que la calculadora esté configurada en el modo grados, el eje x abarcará valores entre $-360°$ y $360°$.



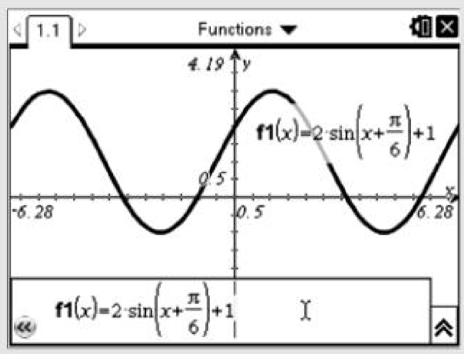
Ingresar $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ y presionar enter

Para ingresar la función seno, presionar trig y seleccionar **sin** (seno) del cuadro de diálogo

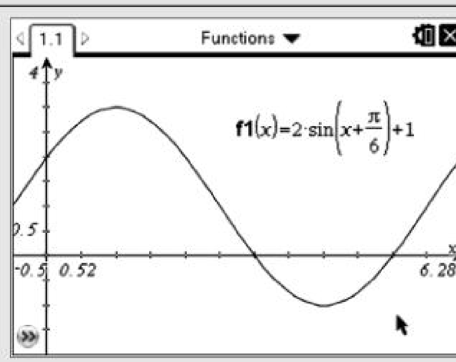
sin	cos	tan	csc	sec	cot
sin⁻¹	cos⁻¹	tan⁻¹	csc⁻¹	sec⁻¹	cot⁻¹

Para ingresar π, presionar π y seleccionar π del cuadro de diálogo

π	i	∞	e
θ	r	g	



Desplazar los ejes para visualizar mejor la curva y moverlos con la mano de agarre para cambiar la pantalla de visualización
También resulta útil que la escala en el eje x sea múltiplo de π, por ejemplo $\frac{\pi}{6}$, dado que esto mostrará mejor la posición de las intersecciones y los puntos de inflexión.
Para cambiar la escala, presionar menu **4: Window/Zoom** (ventana/zoom) | **1: Window Settings** (configuraciones de ventana)
XScale (escala$X$): pi/6
Ingresar $\frac{pi}{6}$ en el cuadro de diálogo para ***XScale*** (escala$X$)



Funciones más complejas

1.16 Resolución de una ecuación que combina cuadrática y exponencial

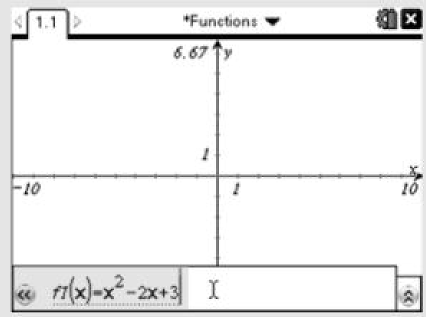
En este caso se debe seguir el mismo procedimiento con la CPG que se usó para resolver sistemas de ecuaciones gráficamente (véanse los ejemplos 4 y 17).

Ejemplo 17

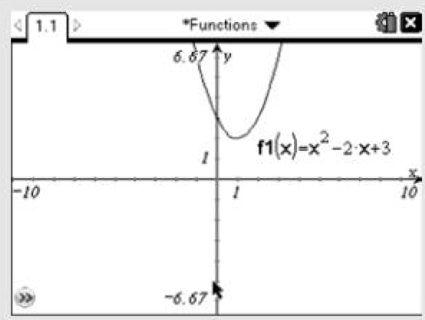
Resuelva la ecuación $x^2 - 2x + 3 = 3 \times 2^{-x} + 4$.

Para resolver la ecuación, halle el punto de intersección del gráfico de la función cuadrática $f1(x) = x^2 - 2x + 3$ con el gráfico de la función exponencial $f2(x) = 3 \times 2^{-x} + 4$.

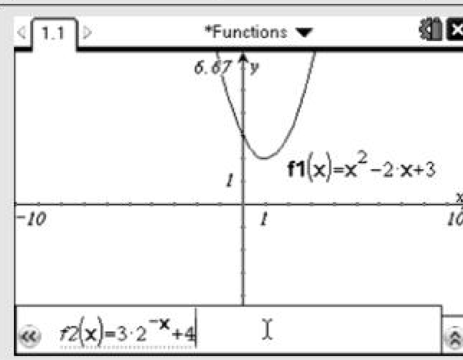
Para dibujar los gráficos de $f1(x) = x^2 - 2x + 3$ y $f2(x) = 3 \times 2^{-x} + 4$:
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Graphs** (gráficos). La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo.
El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), así que aparece la forma "$f1(x)$=".
Los ejes predeterminados son $-10 \leq x \leq 10$ y $-6{,}67 \leq y \leq 6{,}67$.
Ingresar $x^2 - 2x + 3$ y presionar enter



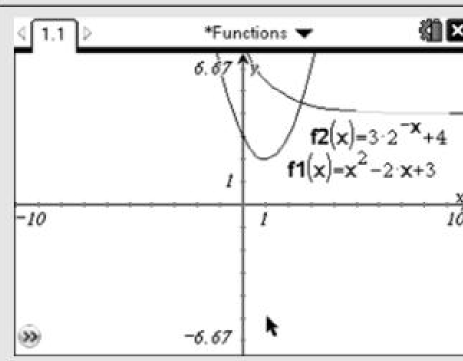
La CPG muestra la primera curva:
$f1(x) = x^2 - 2x + 3$



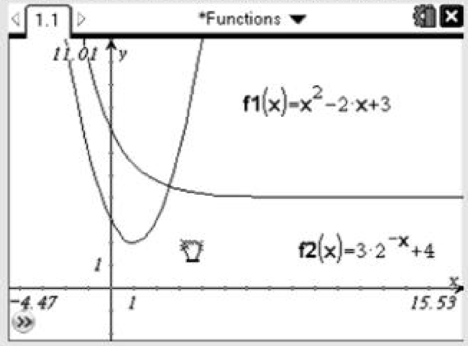
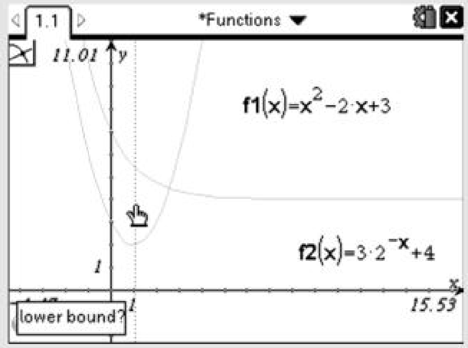
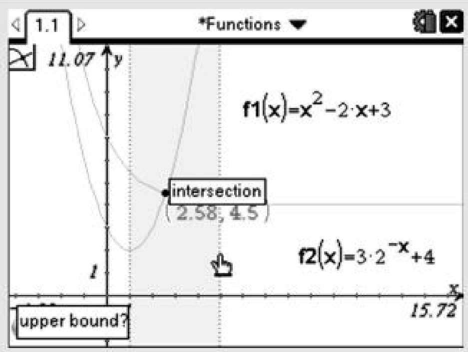
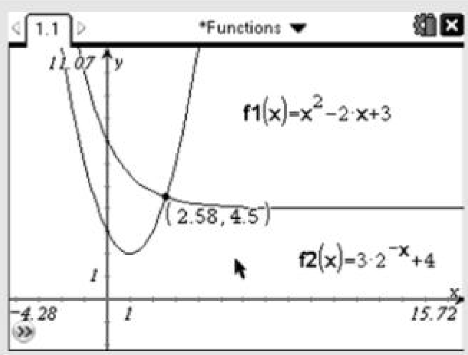
Usar el *touchpad* para hacer clic en las flechas que se encuentran en la parte inferior izquierda de la pantalla Esto abrirá de nuevo la línea de ingreso. Esta vez se visualiza "*f2(x)* =".
Ingresar $3 \times 2^{-x} + 4$ y presionar enter



La CPG muestra ambas curvas:
$f1(x) = x^2 - 2x + 3$
$f2(x) = 3 \times 2^{-x} + 4$



▶ Continúa en la página siguiente.

Desplazar los ejes para obtener una mejor vista de las curvas Para obtener ayuda con el desplazamiento de los ejes, véase el manual de la CPG.	
Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) | **4: Intersection** (intersección) Presionar enter Para hallar el punto de intersección, es necesario marcar el límite inferior y el límite superior de una región de búsqueda que lo contenga. La CPG muestra una línea punteada y pide un límite inferior (“lower bound?”). Mover la línea usando el *touchpad* y elegir una posición a la izquierda del punto de intersección Hacer clic en el *touchpad*	
La CPG muestra otra línea y pide el límite superior (“upper bound?”). Utilizar el *touchpad* para mover la línea, de manera que la región entre el límite inferior y el superior contenga al punto de intersección Cuando esto suceda, aparecerá la palabra “intersection” (intersección) en una etiqueta. Hacer clic en el *touchpad* Presionar enter	
La CPG muestra la intersección de ambas curvas en el punto (2,58; 4,5). La solución es $x = 2{,}58$.	

Modelos matemáticos

1.17 Uso de la regresión sinusoidal

Nota: la notación sen²*x*, cos²*x*, tan²*x*, … es una convención matemática que tiene poco significado algebraico. Para ingresar estas funciones en la CPG, *se debería* ingresar $(\sin(x))^2$, etc. Sin embargo, la calculadora convenientemente interpretará $\sin(x)^2$ y lo traducirá como $(\sin(x))^2$.

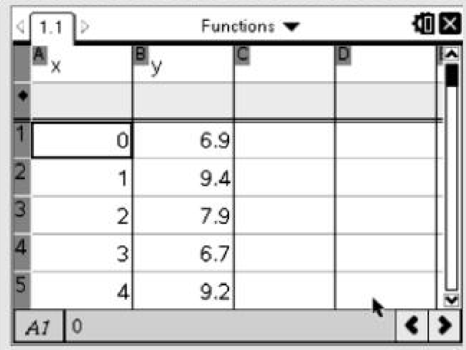
Ejemplo 18

Se sabe que los siguientes datos pueden ser modelizados mediante una curva sinusoidal.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	6,9	9,4	7,9	6,7	9,2	8,3	6,5	8,9

Use la regresión sinusoidal para hallar una función que modelice estos datos.

Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)
En la primera celda ingresar "x" y a la izquierda de dicha celda ingresar y
En la primera columna ingresar los valores de x y en la segunda columna ingresar los de y
Usar las teclas ▼ ▲ ◀ ▶ para desplazarse dentro de la hoja de cálculo

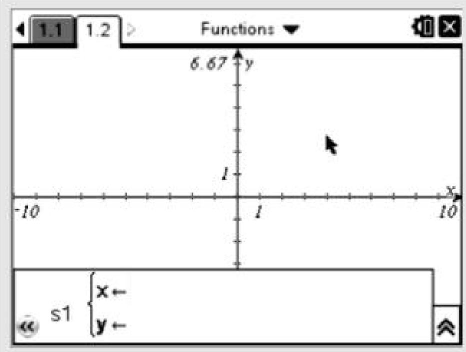


Presionar [On] y agregar una página de **Graphs** (gráficos) al documento

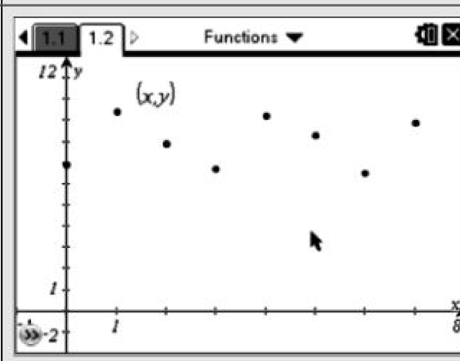
Presionar [menu] **3: Graph Type** (tipo de gráfico) | **4: Scatter Plot** (diagrama de dispersión)

Presionar [enter]

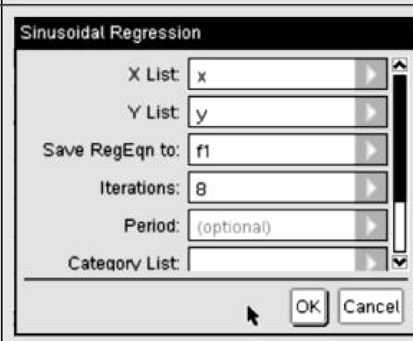
La línea de ingreso aparece al pie del área de trabajo.
Se muestra el gráfico de dispersión.
Ingresar los nombres de las listas, x e y, en la función del gráfico de dispersión
Usar la tecla [tab] para moverse de x a y
Presionar [enter] [del]



Ajustar la configuración de la ventana para mostrar los datos, el eje x y el eje y
Ahora vemos un gráfico de puntos x-y.

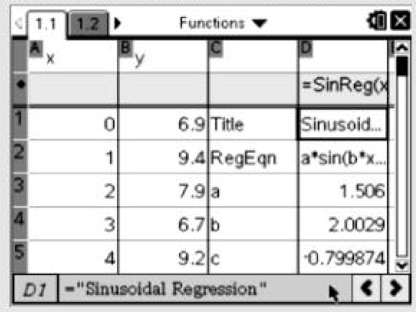


Presionar [ctrl] ◀ para volver a la página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)
Seleccionar una celda vacía y presionar [menu] **4: Statistics** (estadística) | **Stat Calculations** (cálculos estadísticos) | **C: Sinusoidal Regression** ... (regresión sinusoidal...)
Presionar [enter]
De las listas desplegables seleccionar "x" para la opción "X List" (lista X) e "y" para la opción "Y List" (lista Y).
Presionar [tab] para moverse entre los campos.
Presionar [enter]

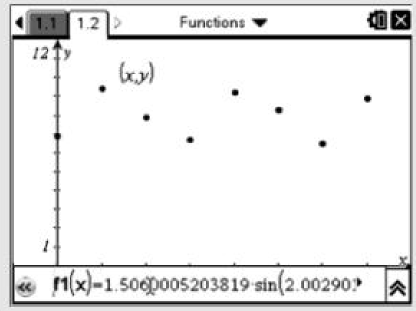


▶ Continúa en la página siguiente.

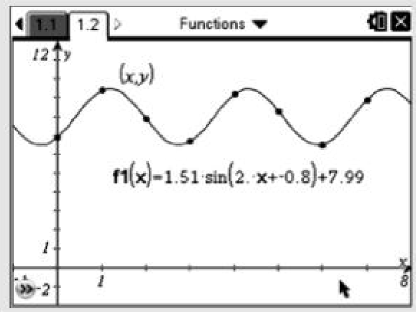
En la pantalla, se mostrarán los resultados de la regresión sinusoidal en listas contiguas a las listas de x e y.
La ecuación está en la forma $y = a\sin(bx + c) + d$ y se visualizarán por separado los valores de a, b, c y d.
La ecuación de la curva de regresión sinusoidal es
$y = 1{,}51\text{sen}(2{,}00x - 0{,}80) + 7{,}99$.



Presionar ctrl ▶ para volver a la página de **Graphs** (gráficos)
Con el *touchpad* hacer clic en » para abrir la línea de ingreso al pie del área de trabajo
Veremos que la ecuación de la curva de regresión ha sido pegada en *f1*(x).
Presionar enter



La curva de regresión se muestra ahora en el gráfico.



1.18 Uso de transformaciones para modelizar una función cuadrática

También podemos modelizar una función lineal hallando la ecuación de la recta de regresión por mínimos cuadrados (véase la sección 5.15).

Ejemplo 19

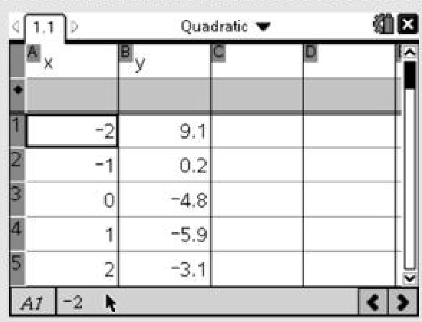
Estos datos están conectados aproximadamente por una función cuadrática.

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	9,1	0,2	–4,8	–5,9	–3,1	4,0	15,0

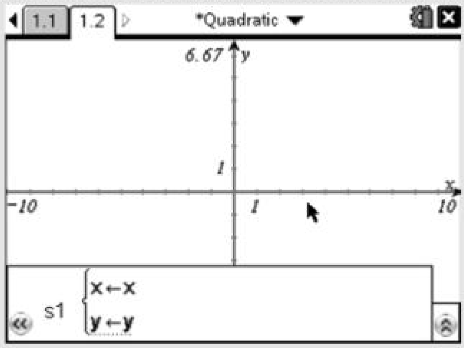
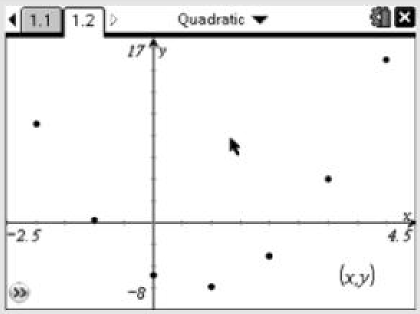
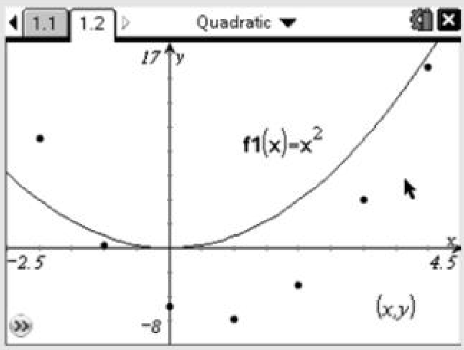
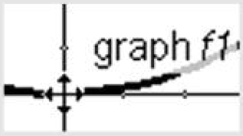
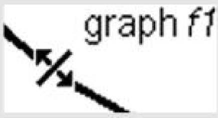
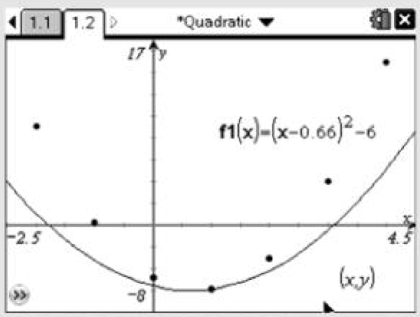
Halle una función que se ajuste a estos datos.

Transforme una curva cuadrática simple para hallar una ecuación que se ajuste a datos que se aproximan a una cuadrática.

Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)
Ingresar los datos en dos listas:
Ingresar "x" en la primera celda e "y" en la celda que está a su derecha
Ingresar los valores de x en la primera columna y los de y en la segunda. Recordar que se debe utilizar (–) para los valores negativos.
Usar las teclas ▼ ▲ ◀ ▶ para navegar por la hoja de cálculo

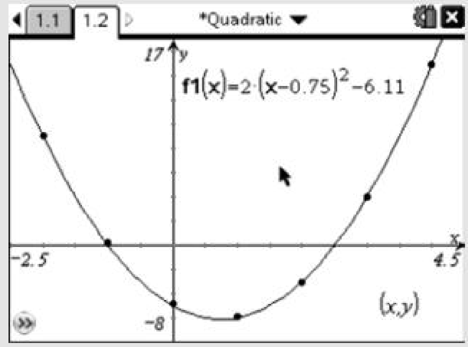


▶ Continúa en la página siguiente.

Agregar una página de **Graphs** (gráficos) al documento Presionar menu **3: Graph Type** (tipo de gráfico) | **4: Scatter Plot** (diagrama de dispersión) Presionar enter La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo. Se visualiza el formato de diagrama de dispersión. Ingresar los nombres de las listas, x e y, en la función del diagrama de dispersión Usar tab para moverse de x a y Presionar enter	
Presionar menu **4: Zoom Fit** (ajuste de zoom) del menú **Window/Zoom** (ventana/zoom) Este es un método rápido para elegir una escala apropiada que permita ver todos los puntos. Se debería reconocer que los puntos están dispuestos en forma de parábola.	
El próximo paso es ingresar una función cuadrática simple, $y = x^2$, y manipularla para que se ajuste a los puntos. Presionar menu **3: Graph Type** (tipo de gráfico) | **1: Function** (función) Presionar enter Esto cambia el tipo de gráfico de diagrama de dispersión a función. Ingresar x^2 como la función *fl*(x) Está claro que la curva no se ajusta a los puntos, pero tiene la forma general correcta para poder hacerlo.	
Usar el *touchpad* para mover el cursor y que este se aproxime a la curva. Se verá uno de los dos iconos que se muestran a la derecha. El primero permite arrastrar la parábola por la pantalla, tomándola del vértice. El segundo permite estirar la función verticalmente u horizontalmente.	 or 
Usar ✥ para posicionar el vértice en el lugar donde pareciera que debería estar, de acuerdo a los puntos representados	

▶ Continúa en la página siguiente.

Usar para ajustar la amplitud de la curva
Hacer los ajustes finales usando ambas herramientas, hasta tener un buen ajuste a los puntos
La ecuación de una función que se ajusta a los datos es:
$f1(x) = 2(x - 0{,}75)^2 - 6{,}11$



1.19 Uso de deslizadores para modelizar una función exponencial

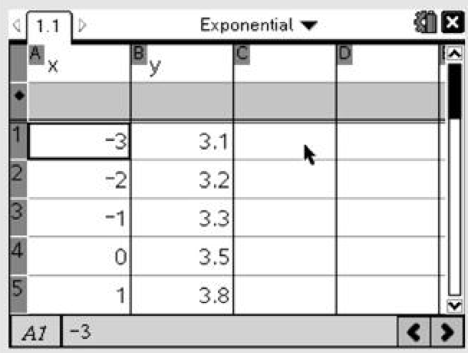
Ejemplo 20

En general, la ecuación de una función exponencial tiene la forma $y = ka^x + c$.
Para estos datos, se sabe que $a = 1{,}5$ así que $y = k(1{,}5)^x + c$.

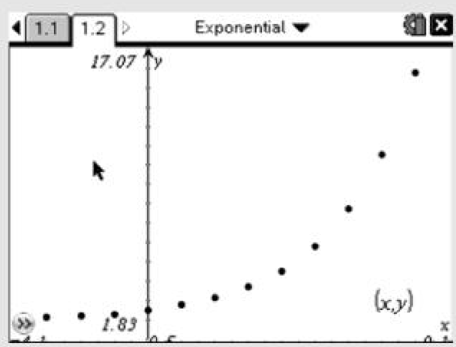
x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3,1	3,2	3,3	3,5	3,8	4,1	4,7	5,5	6,8	8,7	11,5	15,8

Halle los valores de las constantes k y c.

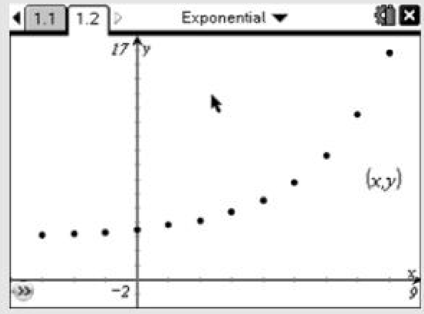
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)
Ingresar los datos en dos listas:
Ingresar "x" en la primera celda e "y" en la celda que está a su derecha
Ingresar los valores de x en la primera columna y los de y en la segunda. Recordar que se debe utilizar (-) para los valores negativos.
Usar las teclas ▼ ▲ ◀ ▶ para navegar por la hoja de cálculo

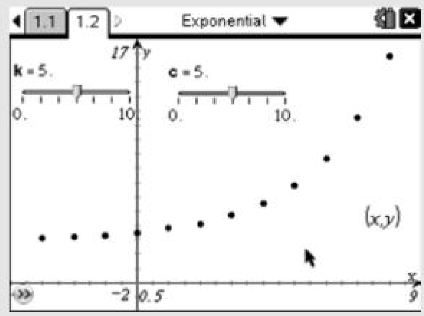
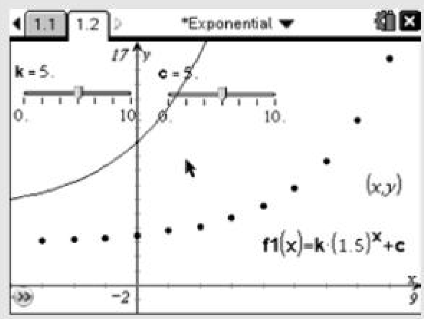
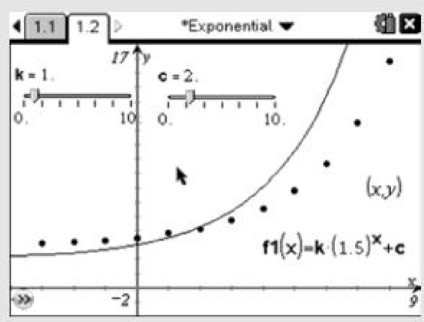
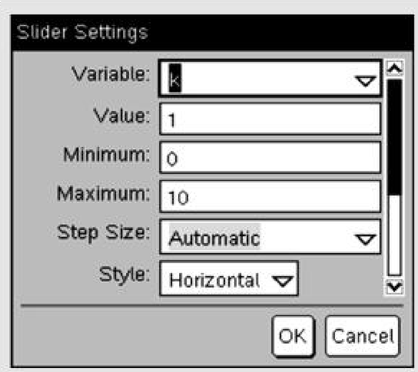


Agregar una página de **Graphs** (gráficos) al documento
Presionar menu **3: Graph Type** (tipo de gráfico) |
4: Scatter Plot (diagrama de dispersión)
Presionar enter
La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo.
Se visualiza el formato de diagrama de dispersión.
Ingresar los nombres de las listas, x e y, en la función del diagrama de dispersión
Usar tab para moverse de x a y
Presionar enter



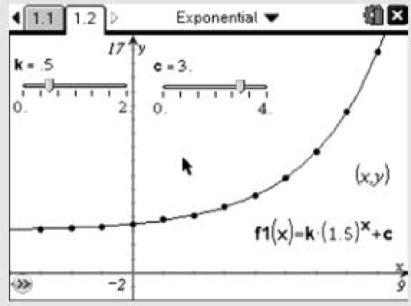
▶ Continúa en la página siguiente.

<table>
<tr>
<td>Modificar la configuración de la ventana para que se ajuste a los datos y para mostrar claramente los ejes</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Presionar menu 1: Actions (acciones) | A: Insert Slider (insertar deslizador)
Ubicar el deslizador en algún lugar en el que no impida la visual y cambiar el nombre de la constante a k
Repetir y agregar un segundo deslizador para c

Para obtener ayuda con los deslizadores, véase el manual de la CPG.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Presionar menu 3: Graph Type (tipo de gráfico) |
1: Function (función)
Presionar enter
Esto cambia el tipo de gráfico de diagrama de dispersión a función.
Ingresar $k \cdot (1.5)^x + c$ como la función fl(x)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Intentar ajustar los deslizadores
Es posible acercar la curva a los puntos, pero no lo suficiente como para obtener un buen ajuste.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Se puede cambiar la configuración de los deslizadores seleccionando uno de ellos, presionando ctrl menu y seleccionando 1: Settings (configuraciones).
Cambiar los valores predeterminados de k a:
“Minimum” (mínimo) 0
“Maximum” (máximo) 2
“Step Size” (tamaño de paso) 0.1
Cambiar los valores predeterminados de c a:
“Minimum” (mínimo) 0
“Maximum” (máximo) 4
“Step Size” (tamaño de paso) 0.1</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

▶ Continúa en la página siguiente.

Ahora se pueden adaptar los deslizadores para obtener un mejor ajuste a la curva.
La pantalla muestra que k es 0,5 y c es 3.
Así que el mejor ajuste para la fórmula de esta función es aproximadamente $y = 0{,}5(1{,}5)^x + 3$.



2 Cálculo diferencial

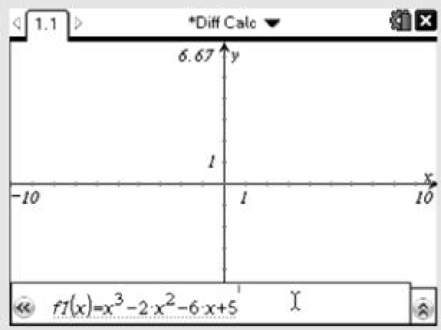
Pendientes, tangentes, y puntos máximos y mínimos

2.1 Cómo hallar la pendiente en un punto

Ejemplo 21

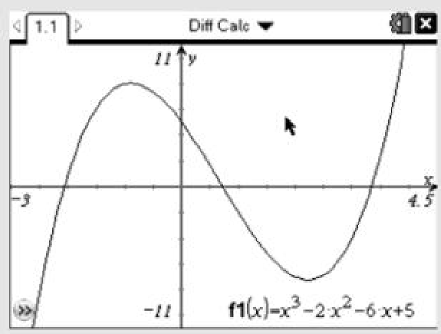
Halle la pendiente de la función cúbica $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 5$.

Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Graphs** (gráficos)
La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo.
El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), así que aparece la forma "*f1*(x)=".
Los ejes predeterminados son $-10 \leq x \leq 10$
y $-6{,}67 \leq y \leq 6{,}67$.
Ingresar $x^3 - 2x^2 - 6x + 5$ y presionar enter
(**Nota:** Ingresar X ^ 3 ▶ para ingresar x^3. El ▶ es para volver a la línea de base desde el exponente.)

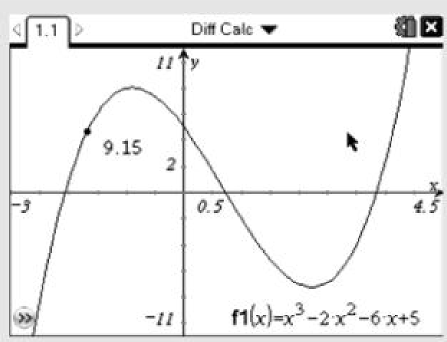


La CPG muestra la curva con los ejes predeterminados.
Desplazar los ejes para obtener una mejor vista de la curva, y agarrar el eje x y el eje y para que la curva se ajuste a la ventana

Para obtener ayuda con el desplazamiento de los ejes, véase el manual de la CPG.

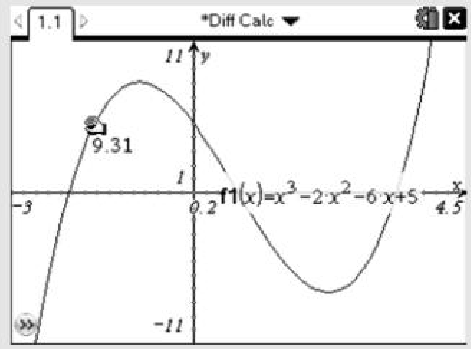


Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) | **5: dy/dx**
Presionar enter
Usando el *touchpad*, mover el icono hacia la curva.
Cuando se aproxima a la curva, el cursor se convierte en
y muestra el valor numérico de la pendiente.
Presionar enter para sujetar un punto de la curva



▶ Continúa en la página siguiente.

Usar el *touchpad* para mover el icono al punto
Se puede mover ese punto a lo largo de la curva y observar cómo cambia la pendiente a medida que cambia el punto. En esta captura de pantalla, la pendiente de la curva en este punto es 9,31.

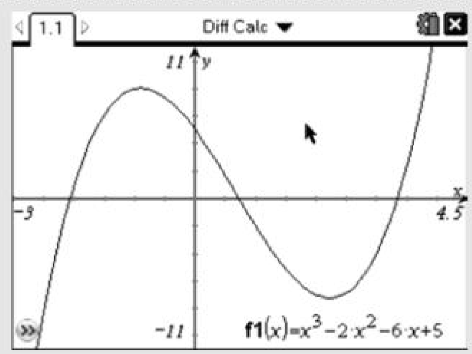


2.2 Dibujo de la tangente a una curva

Ejemplo 22

Dibuje una tangente a la curva $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 5$.

Primero dibujar el gráfico de $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 5$
(véase el ejemplo 21)



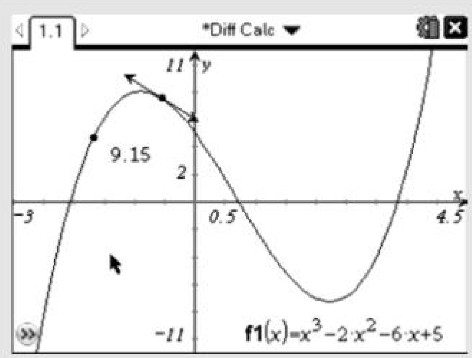
Presionar menu **7: Points and Lines** (puntos y líneas) | **7: Tangent** (tangente)

Presionar enter

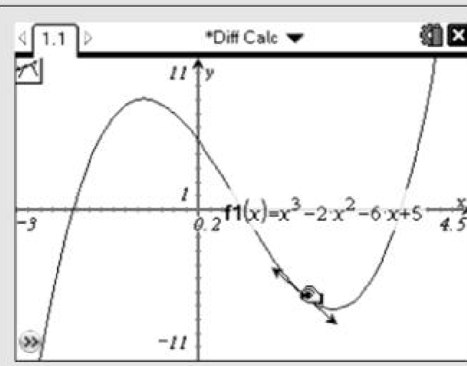
Usando el *touchpad*, mover el cursor hacia la curva. Al aproximarse a la curva, el cursor se convierte en .

Presionar enter

El cursor cambia a y muestra la frase “point on” (punto en).
Seleccionar un punto en donde se desee dibujar una tangente y presionar enter

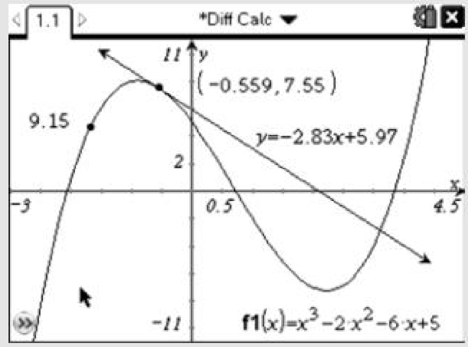


Con el *touchpad* se puede mover el punto al cual la tangente está sujeta.



▶ Continúa en la página siguiente.

Usar el *touchpad* para arrastrar las flechas que están al final de la recta tangente y así extenderla
Presionar ctrl menu con la recta tangente seleccionada, mover la flecha del final y buscar la palabra "line" (línea)
Elegir **7: Coordinates and Equations** (coordenadas y ecuaciones)
Hacer clic en la recta para visualizar la ecuación de la tangente: $y = -2{,}83x + 5{,}97$
Hacer clic en el punto para visualizar las coordenadas del punto: $(-0{,}559;\ 7{,}55)$

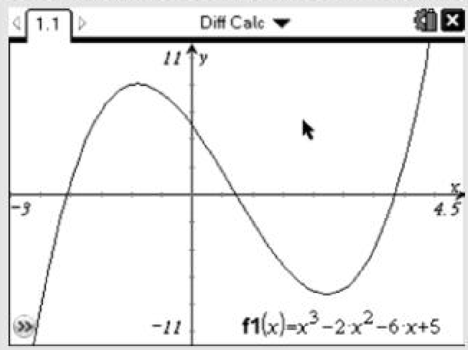


2.3 Puntos máximos y mínimos

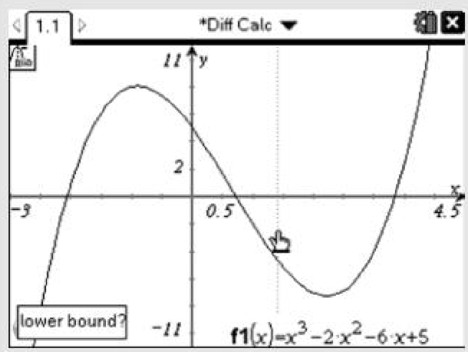
Ejemplo 23

Halle el punto máximo local y el punto mínimo local de la curva $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 5$.

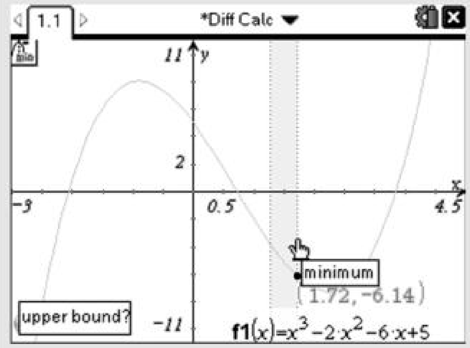
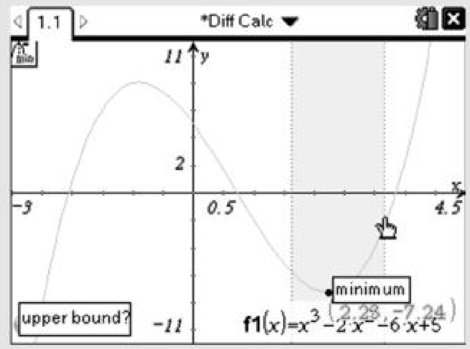
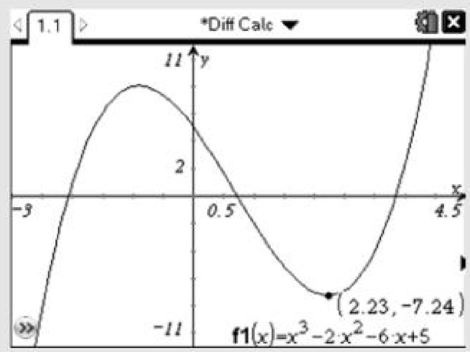
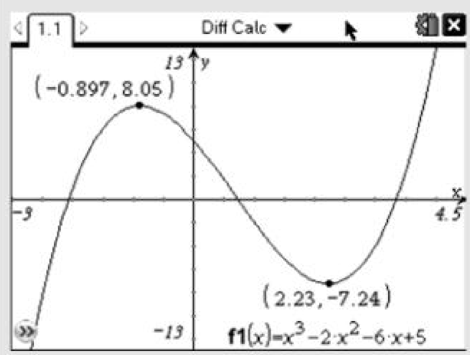
Primero dibujar el gráfico de $y = x^3 - 2x^2 - 6x + 5$
(véase el ejemplo 21)



Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) |
2: Minimum (mínimo)
Presionar enter
Para hallar el mínimo, es necesario marcar el límite inferior y el límite superior de una región de búsqueda que lo contenga.
La CPG muestra una línea punteada y pide un límite inferior ("lower bound?").
Mover la línea usando el *touchpad* y elegir una posición a la izquierda del mínimo
Hacer clic en el *touchpad*



▶ Continúa en la página siguiente.

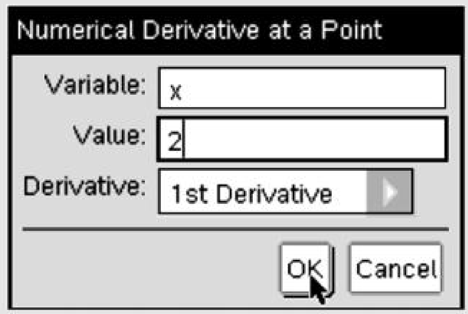
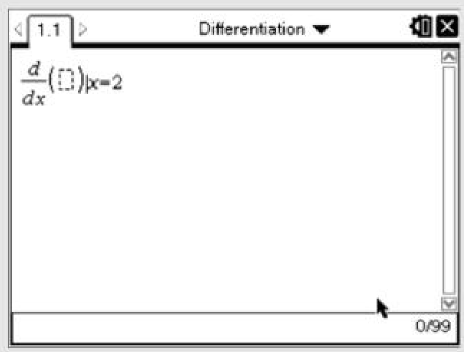
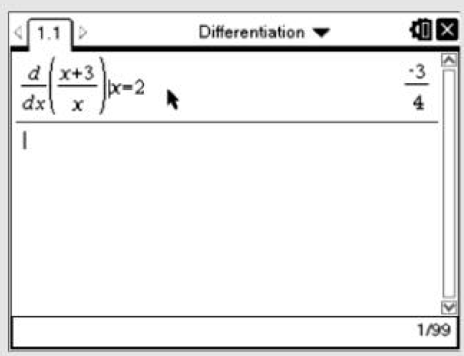
La CPG muestra otra línea y pide el límite superior (“upper bound?”). Utilizar el *touchpad* para mover la línea, de manera que la región entre el límite inferior y el superior contenga al mínimo. **Nota:** En cada región que se define, la CPG muestra el punto mínimo de esa región. En esta captura de pantalla, el punto que se muestra no es el mínimo local de la función. Hay que asegurarse de definir las líneas de manera tal que la región definida contenga al punto que se está buscando.	
Cuando la región contiene al mínimo, aparecerá una etiqueta con la palabra “minimum” (mínimo) y un punto que se encuentra entre el límite inferior y el superior. El punto que se muestra está claramente entre esos límites. Hacer clic en el *touchpad*	
La CPG muestra el punto mínimo de la curva en (2,23; −7,24).	
Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) | **3: Maximum** (máximo), para hallar el máximo local de la curva siguiendo el mismo procedimiento El punto máximo es (−0,897; 8,05).	

Derivadas

2.4 Cómo hallar una derivada numérica

La calculadora puede hallar el valor numérico de cualquier derivada para cualquier valor de x. Sin embargo, la calculadora no derivará una función de forma algebraica. Esto es equivalente a hallar la derivada en un punto en forma gráfica (véase el ejemplo 21 en la sección 2.1).

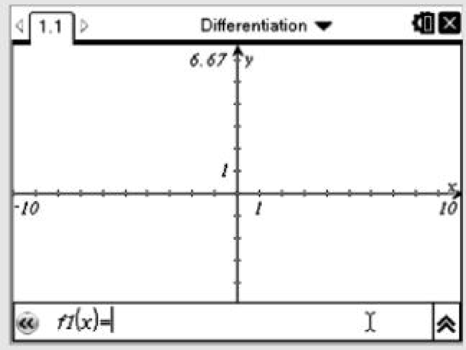
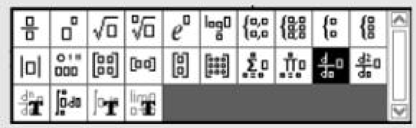
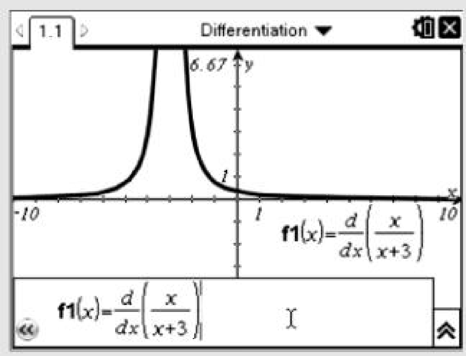
Ejemplo 24

Si $y = \dfrac{x+3}{x}$, evalúe $\dfrac{dy}{dx}\Big\|_{x=2}$.	
Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora) Presionar menu **4: Calculus** (cálculo) | **1: Numerical Derivative at a Point** (derivada numérica en un punto) En la opción "Variable" (variable) ingresar x, y en la opción "Derivative" (derivada) seleccionar **1st Derivative** (derivada primera). En la opción "Value" (valor) fijar el valor de x en que se quiere evaluar la derivada, en este caso es $x = 2$.	
Ingresar la función en la plantilla Presionar enter	
La calculadora muestra que el valor de la primera derivada de $y = \left(\dfrac{x+3}{x}\right)$ es $-\dfrac{3}{4}$ cuando $x = 2$.	

2.5 Gráficos de derivadas numéricas

A pesar de que la calculadora solo evalúa el valor numérico de la derivada en un punto, mostrará el gráfico de la función derivada para todos los valores de x.

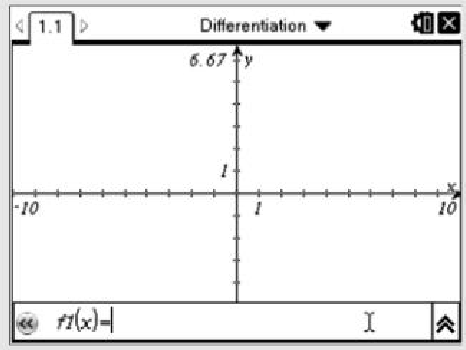
Ejemplo 25

Si $y = \dfrac{x+3}{x}$, obtenga el gráfico de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.	
Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Graphs** (gráficos) La línea de ingreso aparece al pie del área de trabajo. El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), por lo que veremos "*f1*(x)=". Los ejes predeterminados son $-10 \le x \le 10$ y $-6{,}67 \le y \le 6{,}67$.	
Presionar la tecla de plantillas identificada con y elegir la derivada numérica	
En la plantilla ingresar x y la función $\dfrac{x+3}{x}$ Presionar enter	
La calculadora muestra el gráfico de la derivada numérica de la función $y = \dfrac{x+3}{x}$.	

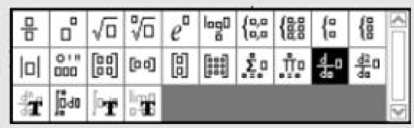
Ejemplo 26

Halle los valores de x de la curva $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 5x + 1$ en los cuales la derivada es 3.

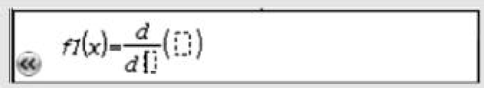
Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Graphs** (gráficos)
La línea de ingreso aparece al pie del área de trabajo.
El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), por lo que veremos "$f1(x)$ =".
Los ejes predeterminados son $-10 \leq x \leq 10$ y $-6{,}67 \leq y \leq 6{,}67$.



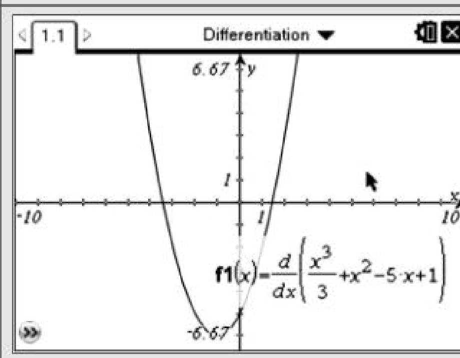
Seleccionar la opción y elegir la derivada numérica



En la plantilla ingresar x y la función $\frac{x^3}{3} + x^2 - 5x + 1$
Presionar enter



La calculadora muestra el gráfico de la función derivada numérica de $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 5x + 1$.

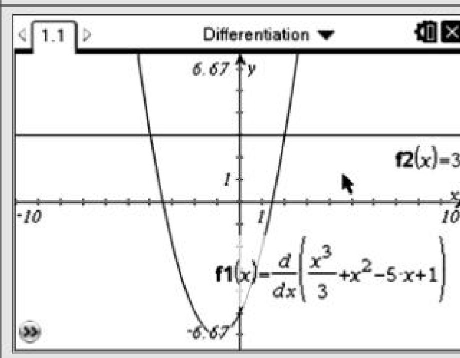


Usando el *touchpad*, hacer clic en para abrir la línea de ingreso al pie del área de trabajo

Ingresar la función $f\,2(x) = 3$

Presionar enter

La calculadora muestra ahora la curva y la recta $y = 3$.

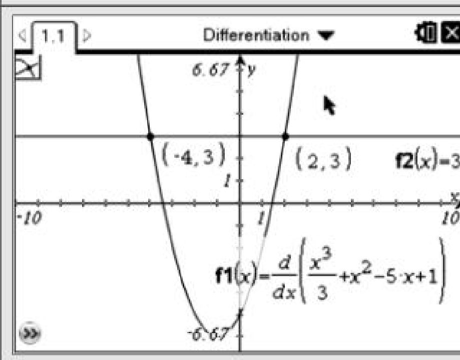


Presionar menu **7: Points and Lines** (puntos y líneas) | **3: Intersection Point(s)** (punto(s) de intersección)

Usar el *touchpad* y seleccionar el gráfico $f\,1$ y el gráfico $f\,2$

La calculadora muestra las coordenadas de los puntos de intersección de la función derivada y la recta $y = 3$.

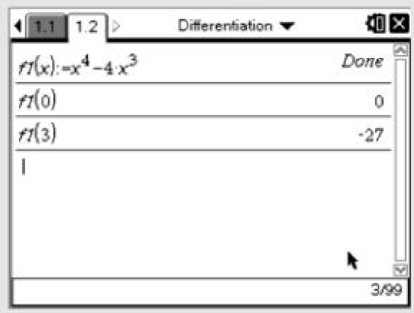
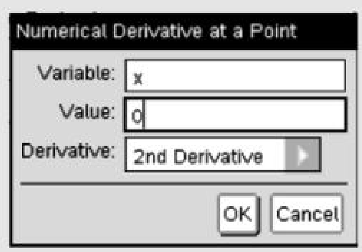
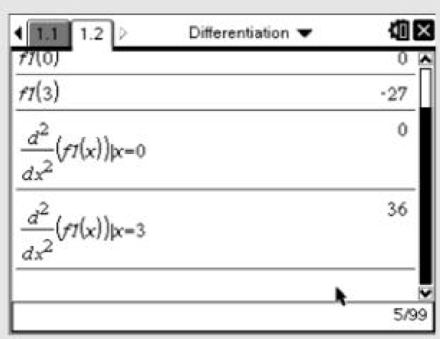
La curva tiene pendiente 3 cuando $x = -4$ y $x = 2$.



2.6 Uso de la derivada segunda

La calculadora puede hallar la primera y la segunda derivada. La segunda derivada puede usarse para determinar si un punto es máximo o mínimo.

Ejemplo 27

Halle los puntos estacionarios de la curva $f(x) = x^4 - 4x^3$ y determine qué tipo de puntos son.	
$f(x) = x^4 - 4x^3$ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ En los puntos estacionarios: $f'(x) = 0$ $4x^3 - 12x^2 = 0$ $4x^2 - (x - 3) = 0$ Entonces, $x = 0$ o $x = 3$.	
Usar la calculadora para hallar las coordenadas de los puntos y determinar qué tipo de puntos son Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora) Definir la función $f1(x)$ Presionar F 1 (X) ctrl := e ingresar la función Evaluar la función cuando $x = 0$ y $x = 3$ Los puntos estacionarios son (0, 0) y (3, –27).	
Presionar menu **4: Calculus** (cálculo) | **1: Numerical Derivative at a Point** (derivada numérica en un punto) Dejar la opción "Variable" (variable) en x y seleccionar **2nd Derivative** (derivada segunda). Cambiar la opción "Value" (valor) al valor de x en el cual se quiere evaluar la derivada, en este caso es $x = 0$ (y $x = 3$).	
Ingresar $f1(x)$ en la plantilla Repetir para la segunda derivada cuando $x = 3$ (Nota: se puede cortar y pegar la expresión y cambiar el 0 a 3.) En este caso no sabemos con certeza qué tipo de punto es el punto estacionario en (0, 0) pero el punto (3, –27) es un mínimo porque $f''(x) > 0$.	

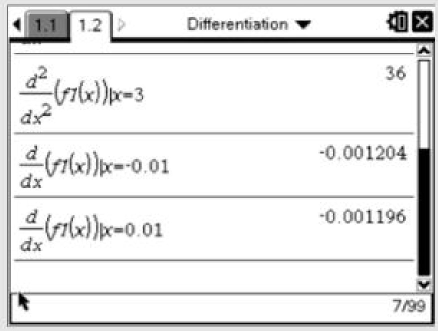
▶ Continúa en la página siguiente.

Evaluar $f'(x)$ a ambos lados de $x = 0$.

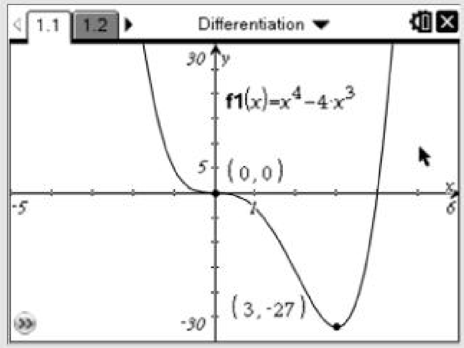
En este caso usar $x = -0{,}01$ y $x = 0{,}01$.

La pendiente es negativa a ambos lados de los puntos estacionarios.

En consecuencia, (0,0) es un punto de inflexión negativo.



El gráfico de la derecha muestra la curva, el punto mínimo en (3, –27) y el punto de inflexión en (0, 0).



3 Cálculo integral

La calculadora puede hallar los valores de integrales definidas tanto en una página de **Calculator** (calculadora) como gráficamente. El método de la página de calculadora es más rápido, pero el método gráfico resulta más claro dado que muestra las discontinuidades, áreas negativas y otras anomalías que puedan surgir.

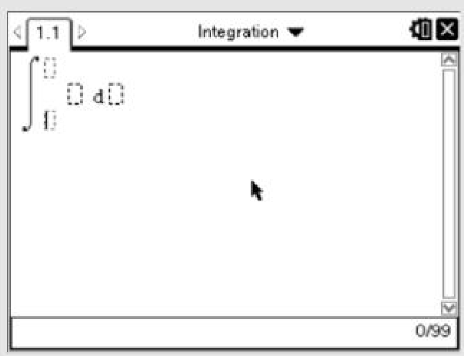
3.1 Cómo hallar el valor de una integral definida

Ejemplo 28

Evalúe $\int_2^8 \left(x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}x$.

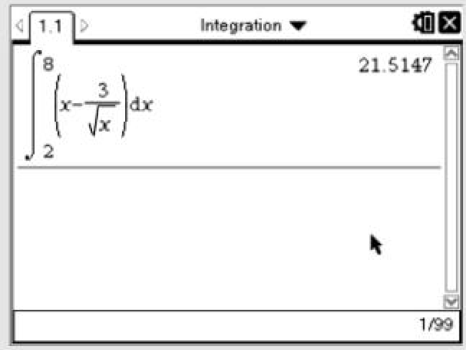
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Presionar menu **4: Calculus** (cálculo) | **1: Numerical Integral ...** (integral numérica...)

Ingresar los límites superior e inferior, la función y x en la plantilla
Usar las teclas ▼ ▲ ◀ ▶ para desplazarse dentro de la plantilla
En este ejemplo también usaremos las plantillas para ingresar la función racional y la raíz cuadrada.



▶ Continúa en la página siguiente.

El valor de la integral es 21,5 (3 cs).

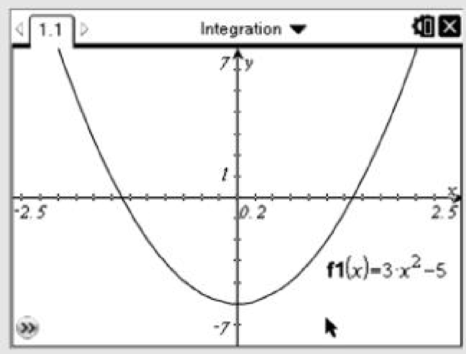


3.2 Cómo hallar el área bajo la curva

Ejemplo 29

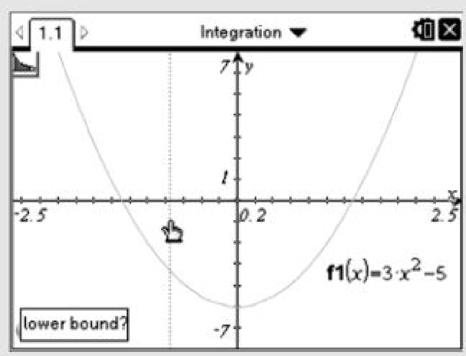
Halle el área delimitada por la curva $y = 3x^2 - 5$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
La línea de ingreso aparece al pie del área de trabajo.
El tipo de gráfico predeterminado es **Function** (función), por lo que veremos "$f1(x)$=".
Los ejes predeterminados son $-10 \le x \le 10$ y $-6{,}67 \le y \le 6{,}67$.
Ingresar la función $3x^2 - 5$
Presionar enter

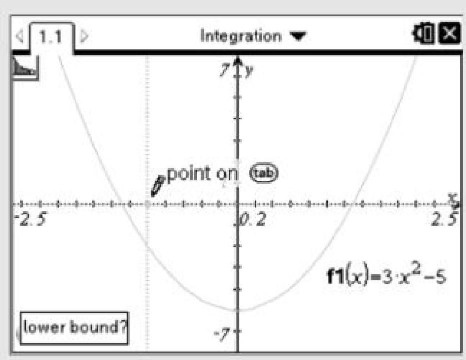


Presionar menu **6: Analyze Graph** (analizar gráfico) | **6: Integral** (integral)

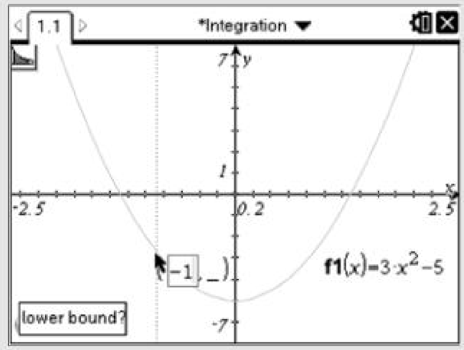
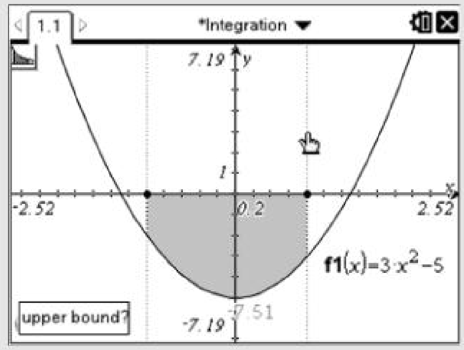
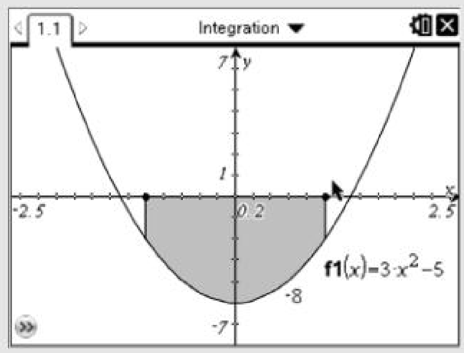
La calculadora nos pide que ingresemos el límite inferior de la integral. Podemos hacerlo de varias formas.
Podemos hacer clic de forma manual, sin embargo esto no resulta muy exacto. Será necesario agregar las coordenadas del punto ingresado y corregirlas para obtener un valor exacto.



Se pueden usar los puntos de los ejes.
En la figura que se muestra la escala fue configurada en 0,2, por lo que se puede seleccionar el punto (−1,0), como se indica en la captura de pantalla.



▶ Continúa en la página siguiente.

Podemos ingresar el punto utilizando el teclado. Ingresar el paréntesis izquierdo (y luego (-) 1 y presionar enter No es necesario completar las coordenadas.	
Repetir el paso anterior para el límite superior. La calculadora muestra el valor del área, que va cambiando. Utilizando uno de los métodos indicados previamente, seleccionar un punto donde el valor de x es 1	
El área hallada aparece sombreada y el valor de la integral (–8) aparece en la pantalla. Nota: dado que en este caso el área está por debajo del eje x, la integral es negativa. El área pedida es 8.	

4 Vectores

4.1 Cálculo del producto escalar

Ejemplo 30

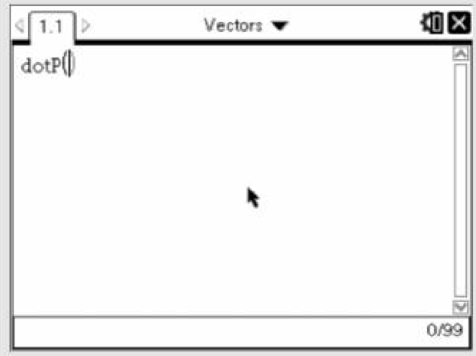
Evalúe los siguientes productos escalares:	
a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	

▶ Continúa en la página siguiente.

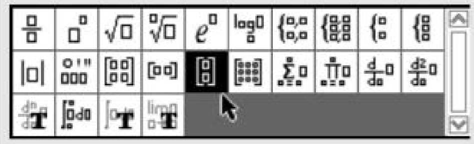
a Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora)

Presionar menu **7: Matrix & Vector** (matriz y vector) | **C: Vector** (vector) | **3: Dot Product** (producto escalar)

(o ingresar DOTP())



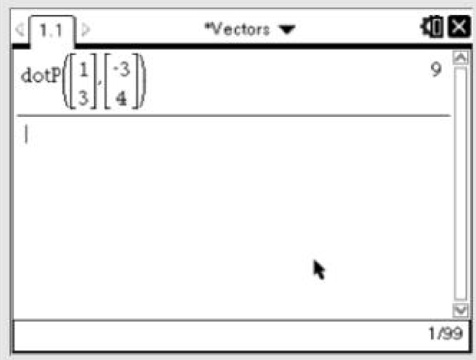
Presionar T y elegir la plantilla de vector columna de 2 × 1



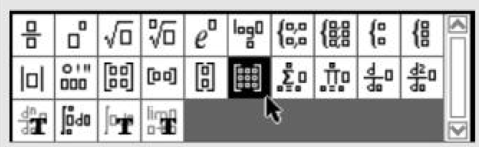
Ingresar el tipo de vector e ingresar el segundo vector

Presionar enter

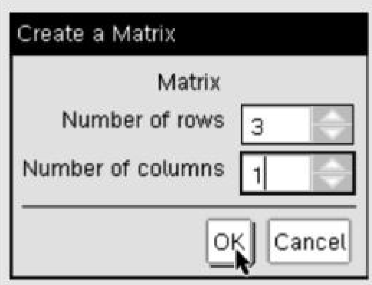
$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=9$$



b Presionar menu **7: Matrix & Vector** (matriz y vector) | **C: Vector** (vector) | **3: Dot Product** (producto escalar)
Presionar T y elegir la plantilla de matriz



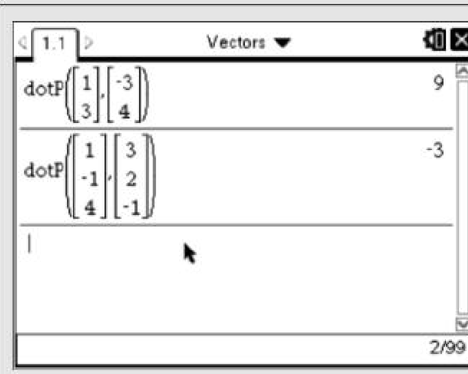
Elegir 3 filas y 1 columna y luego hacer clic en OK



Ingresar el tipo de vector e ingresar el segundo vector

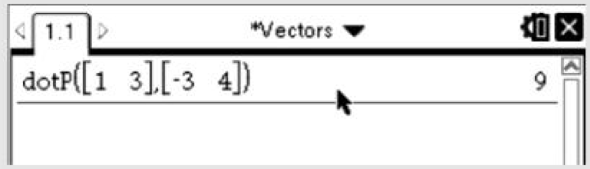
Presionar enter

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=-3$$

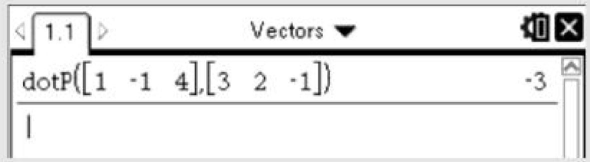


▶ Continúa en la página siguiente.

Como alternativa, podemos ingresar los vectores como filas directamente. Separar los valores con comas. Cuando presionamos enter, la CPG cambia la línea de ingreso y calcula el resultado.



Este método puede ser más rápido, especialmente con vectores de 3 × 1.



4.2 Cálculo del ángulo entre dos vectores

El ángulo θ entre dos vectores, **a** y **b**, se calcula mediante la fórmula:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right)$$

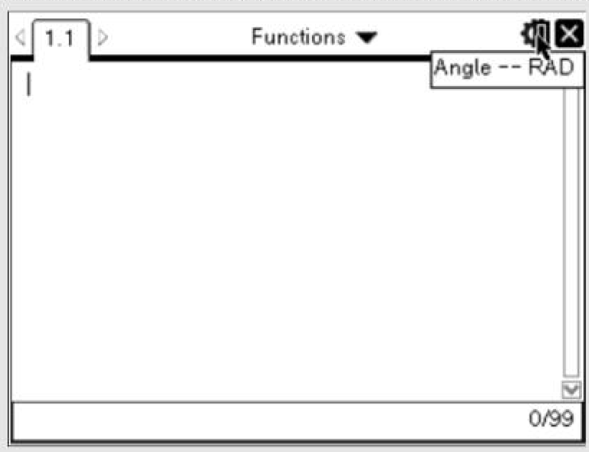
Ejemplo 31

Calcule el ángulo entre 2**i** + 3**j** y 3**i** − **j**.

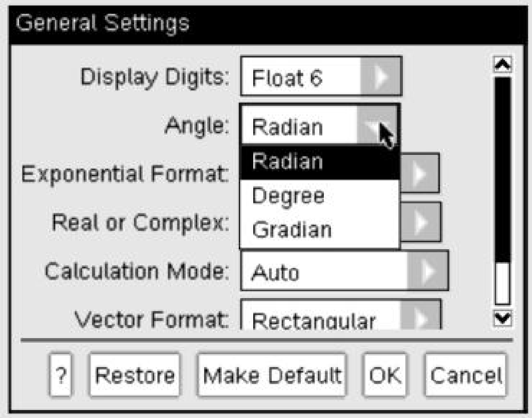
Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora)

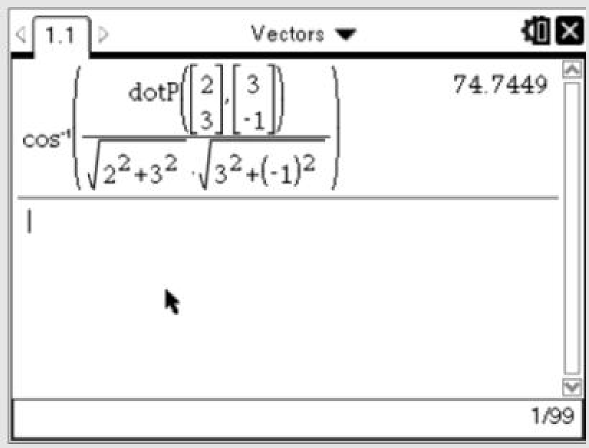
Mover el cursor hacia el símbolo en la parte superior derecha de la pantalla. Se visualizará el modo general para el ángulo: radianes o grados.

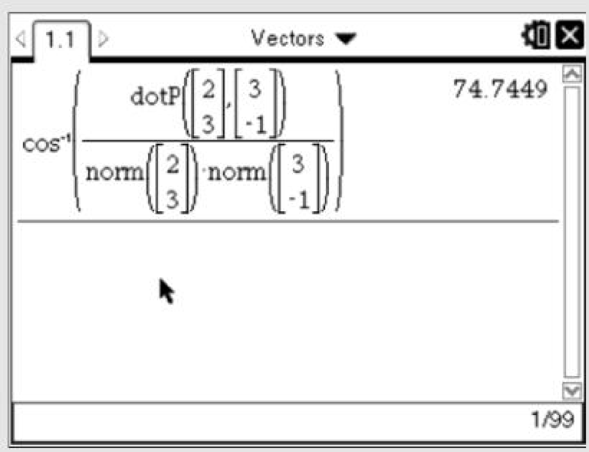
Hacer clic en el símbolo y elegir **2: Settings** (configuraciones) | **1: General** (general)



▶ Continúa en la página siguiente.

<table>
<tr>
<td>En el cuadro de diálogo, seleccionar la opción Radian (radián) o Degree (grado) (según las unidades requeridas en la respuesta) y luego hacer clic en OK</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Presionar μ y elegir $\cos^{-1}$ del menú</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ingresar los valores en la fórmula con la plantilla de fracciones y la plantilla de vector columna de 2 × 1

Para calcular las magnitudes de los vectores, usar la fórmula
$|a\mathbf{i}+b\mathbf{j}|=\sqrt{a^2+b^2}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Como método alternativo para calcular la magnitud del vector, se puede usar la función norm (norma).
Presionar menu 7: Matrix & Vector (matriz y vector) | 7: Norms (normas) | 1: Norm (norma) o simplemente ingresar norm(

En lugar de reingresar los vectores, podemos usar /C y /V para cortar y pegar.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

5 Estadística y probabilidad

Se puede usar la CPG tanto para dibujar gráficos que representen datos, como para calcular valores estadísticos básicos como medias, medianas, etc. Antes de poder hacerlo, es necesario ingresar los datos en una lista o en una hoja de cálculo. Esto se hace agregando una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo) al documento.

Ingreso de datos

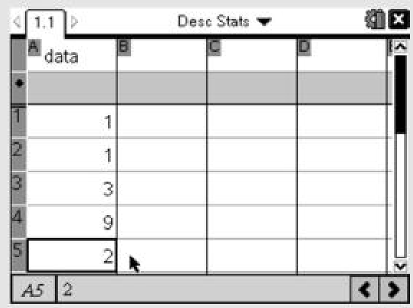
Existen dos formas de ingresar datos: en una lista o en una tabla de frecuencias.

5.1 Ingreso de listas de datos

Ejemplo 32

Ingrese los datos de la lista 1, 1, 3, 9, 2.

Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)
Ingresar la palabra "datos" en la primera celda
Ingresar los números de la lista en la primera columna
Presionar enter o ▼ después de cada número para pasar a la celda siguiente
Nota: La palabra "datos" es un rótulo que se usará más adelante para crear un gráfico o para hacer algunos cálculos con los datos. Se puede usar cualquier letra o nombre para rotular la lista.



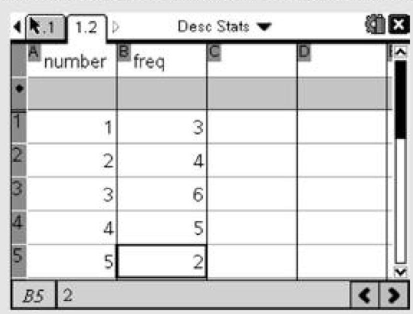
5.2 Ingreso de datos en una tabla de frecuencias

Ejemplo 33

Ingrese los datos en la tabla:

Número	1	2	3	4	5
Frecuencia	3	4	6	5	2

Agregar al documento una nueva página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)
Para rotular las columnas, escribir "número" en la primera celda y "frec" en la celda de su derecha
Ingresar los números en la primera columna y las frecuencias en la segunda
Usar ▼ ▲ ◀ ▶ para navegar por la hoja de cálculo

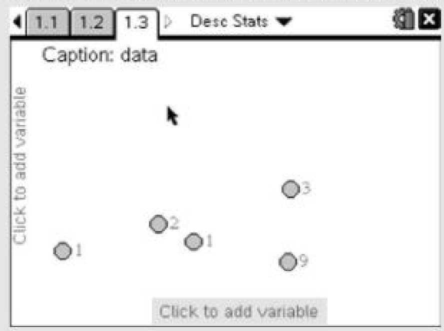
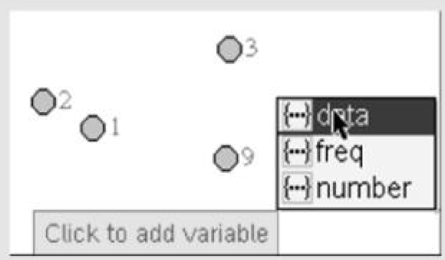
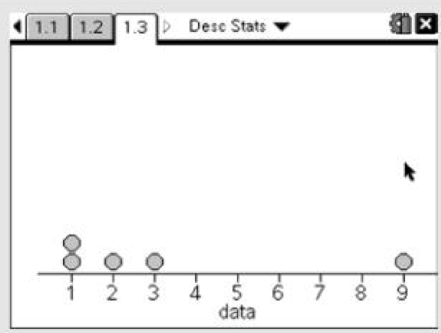
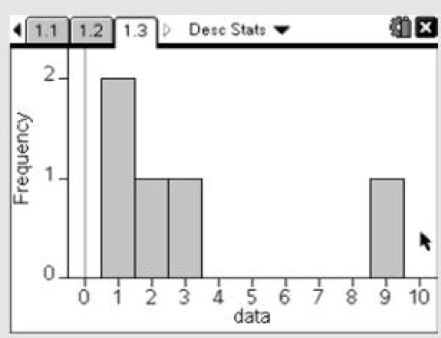


Diagramas estadísticos

Se pueden dibujar diagramas a partir de una lista o de una tabla de frecuencias.

5.3 Dibujo de un histograma de frecuencias a partir de una lista

Ejemplo 34

<table>
<tr><td colspan="2">Dibuje un histograma de frecuencias para los siguientes datos:
1, 1, 3, 9, 2</td></tr>
<tr><td>Ingresar los datos en una lista llamada “datos” (véase el ejemplo 32)
Agregar una nueva página de Data and Statistics (datos y estadística) al documento
Nota: No es necesario preocuparse por lo que muestra esta pantalla.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Hacer clic en la parte inferior de la pantalla, donde dice “Click to add variable” (hacer clic para ingresar la variable), seleccionar datos de la lista y presionar enter</td><td>
</td></tr>
<tr><td>El primer diagrama que aparece es un gráfico de puntos para los datos ingresados.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Presionar menu 1: Plot Type (tipo de diagrama) |
3: Histogram (histograma)
Presionar enter
Ahora se debería ver un histograma de frecuencias para los datos de la lista.</td><td>
</td></tr>
</table>

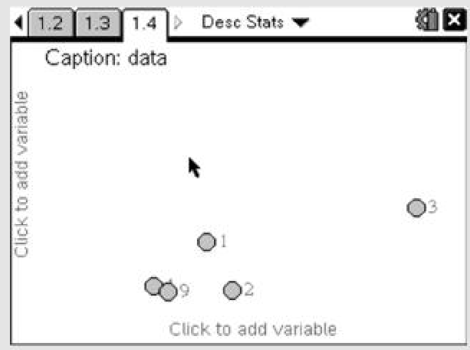
5.4 Dibujo de un histograma de frecuencias a partir de una tabla de frecuencias

Ejemplo 35

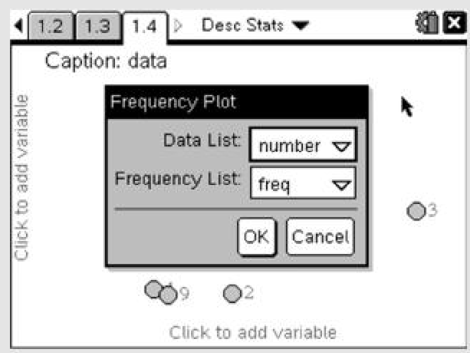
Dibuje un histograma de frecuencias para los siguientes datos:

Número	1	2	3	4	5
Frecuencia	3	4	6	5	2

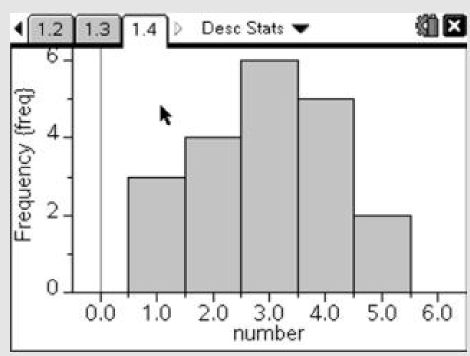
Ingresar los datos en listas llamadas “número” y “frec” (véase el ejemplo 33)
Agregar una nueva página de **Data and Statistics** (datos y estadística) al documento
Nota: No es necesario preocuparse por lo que muestra esta pantalla.



Presionar menu **2: Plot Properties** (propiedades del diagrama) | **5: Add *X* Variable with Frequency** (agregar variable *X* con frecuencia)
Presionar enter
Aparecerá este cuadro de diálogo.
Del menú desplegable, seleccionar **número** en la opción “Data List” (lista de datos) y **frec** en la opción “Frequency List” (lista de frecuencias)
Presionar enter

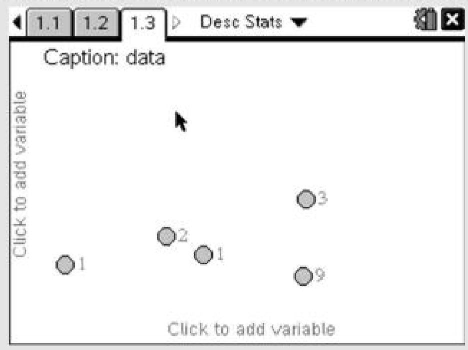
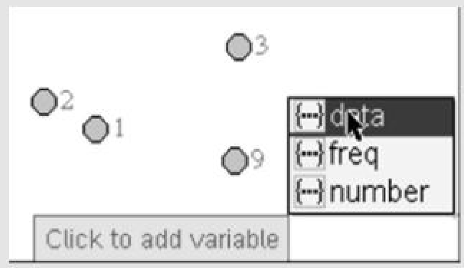
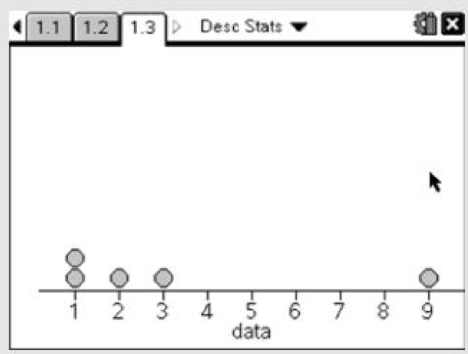
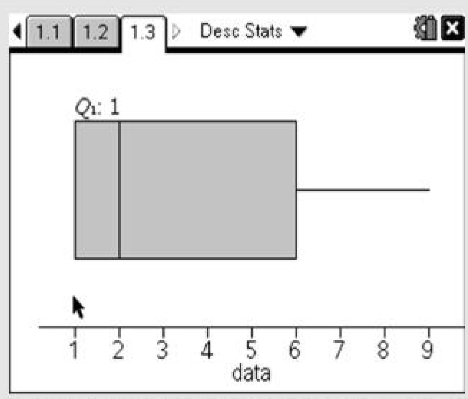


Ahora se debería ver un histograma de frecuencias para los datos de la tabla.



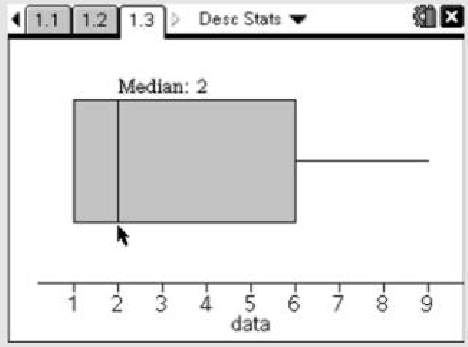
5.5 Dibujo de un diagrama de caja y bigotes a partir de una lista

Ejemplo 36

Dibuje un diagrama de caja y bigotes para los siguientes datos: 1, 1, 3, 9, 2	
Ingresar los datos en una lista llamada "datos" (véase el ejemplo 32) Agregar una nueva página de **Data and Statistics** (datos y estadística) al documento **Nota:** No es necesario preocuparse por lo que muestra esta pantalla.	
Hacer clic en la parte inferior de la pantalla, donde dice "Click to add variable" (hacer clic para ingresar la variable), seleccionar **datos** de la lista y presionar enter	
El primer diagrama que aparece es un gráfico de puntos para los datos ingresados.	
Presionar menu **1: Plot Type** (tipo de diagrama) | **3: Box Plot** (diagrama de cajas) Presionar enter Ahora se debería ver un diagrama de caja y bigotes para los datos de esta lista.	

▶ Continúa en la página siguiente.

Al mover el cursor por encima del diagrama, se verán los cuartiles, Q_1 y Q_3, la mediana, y los valores máximo y mínimo.



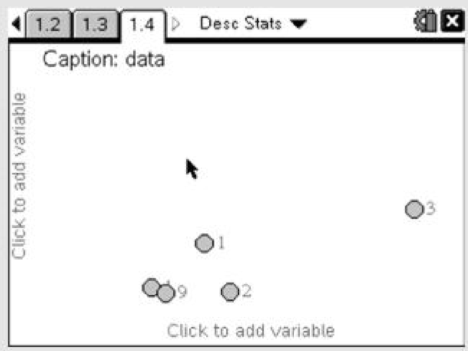
5.6 Dibujo de un diagrama de caja y bigotes a partir de una tabla de frecuencias

Ejemplo 37

Dibuje un diagrama de caja y bigotes para los siguientes datos:

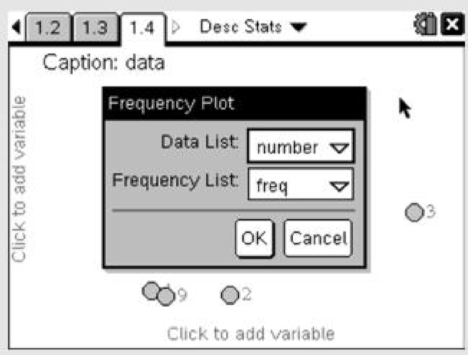
Número	1	2	3	4	5
Frecuencia	3	4	6	5	2

Ingresar los datos en listas llamadas “número” y “frec” (véase el ejemplo 33)
Agregar una nueva página de **Data and Statistics** (datos y estadística) al documento
Nota: No es necesario preocuparse por lo que muestra esta pantalla.

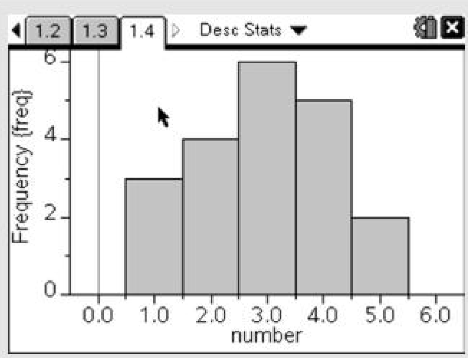


Presionar menu **2: Plot Properties** (propiedades del diagrama) | **5: Add *X* Variable with Frequency** (agregar variable *X* con frecuencia)
Presionar enter
Aparecerá este cuadro de diálogo.

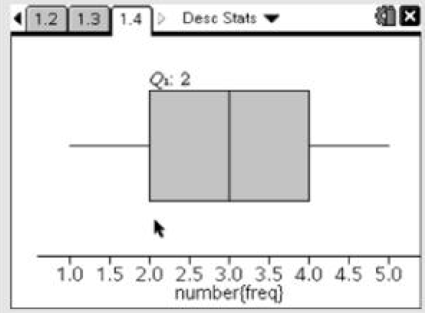
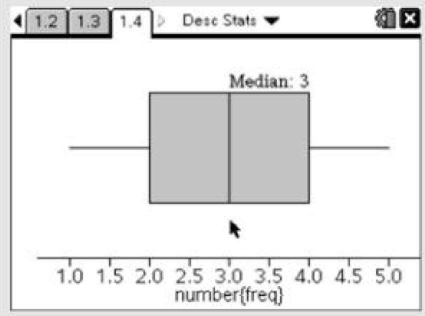
En el menú desplegable, seleccionar **número** en la opción “Data List” (lista de datos) y **frec** en la opción “Frequency List” (lista de frecuencias)
Presionar enter



Ahora se debería ver un histograma de frecuencias.



▶ Continúa en la página siguiente.

Presionar menu **1: Plot Type** (tipo de diagrama) | **2: Box Plot** (diagrama de cajas) Presionar enter Ahora se debería ver un diagrama de caja y bigotes para los datos de la tabla.	
Al mover el cursor por encima del diagrama, se verán los cuartiles, Q_1 y Q_3, la mediana, y los valores máximo y mínimo.	

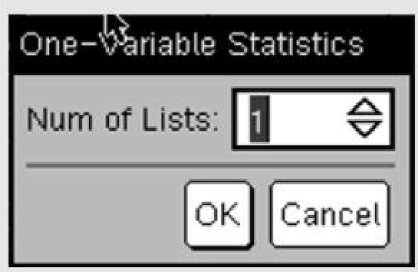
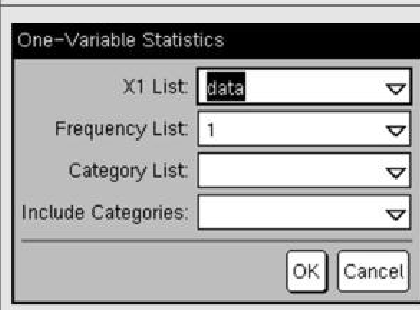
Cálculo de parámetros estadísticos

Se pueden calcular parámetros estadísticos como la media, la mediana, etc. a partir de una lista o de una tabla de frecuencias.

La media, la mediana, el rango, los cuartiles, la desviacion típica, etc., se denominan en conjunto **resumen estadístico**.

5.7 Cálculo de parámetros estadísticos a partir de una lista

Ejemplo 38

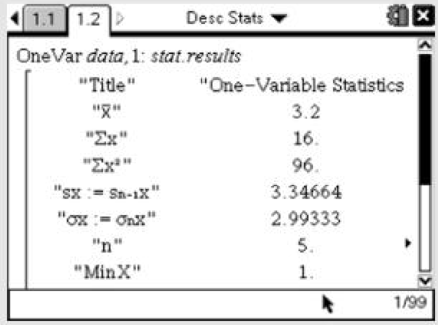
Calcule un resumen estadístico para los siguientes datos: 1, 1, 3, 9, 2	
Ingresar los datos en una lista llamada "datos" (véase el ejemplo 32) Agregar una página de **Calculator** (calculadora) al documento Presionar menu **6: Statistics** (estadística) | **1: Stat Calculations** (cálculos estadísticos) | **1: One-Variable Statistics** (estadísticas de una variable) Presionar enter Esto abre un cuadro de diálogo. Dejar la opción "Num of Lists" (número de listas) en 1 y presionar enter	
Se abrirá otro cuadro de diálogo. Seleccionar del menú desplegable **datos** en la opción "X1 List" (lista X1) y dejar "Frequency List" (lista de frecuencias) en 1 Presionar enter	

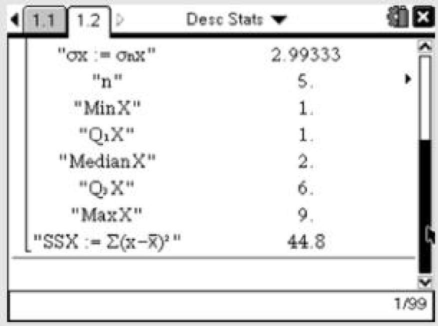
▶ Continúa en la página siguiente.

La información que se muestra no entra en una sola pantalla. Hay que desplazarse hacia arriba y hacia abajo para verla toda. Los valores estadísticos para estos datos son:

Media	$\bar{x}$
Suma	$\sum x$
Suma de cuadrados	$\sum x^2$
Desviación típica muestral	s_x
Desviación típica poblacional	σ_x
Número	n
Valor mínimo	Min$X$
Cuartil inferior	Q_1X
Mediana	Median$X$
Cuartil superior	Q_3X
Valor máximo	Max$X$
Suma de los cuadrados de las desviaciones desde la media	SSX

Nota: En Matemáticas NM siempre hay que usar la desviación típica poblacional (σ_x).





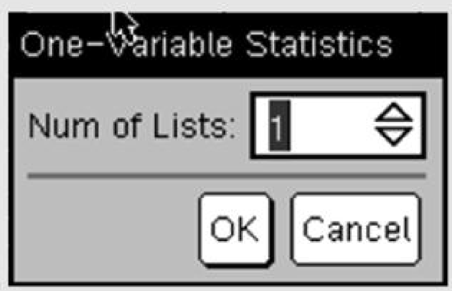
5.8 Cálculo de parámetros estadísticos a partir de una tabla de frecuencias

Ejemplo 39

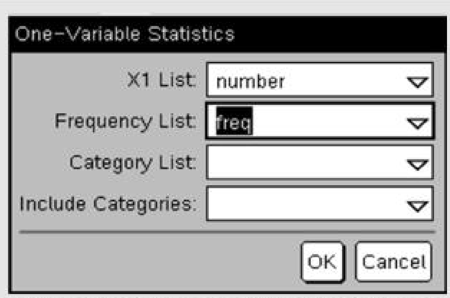
Calcule un resumen estadístico para los siguientes datos:

Número	1	2	3	4	5
Frecuencia	3	4	6	5	2

Ingresar los datos en listas llamadas "número" y "frec" (véase el ejemplo 33)
Agregar una página de **Calculator** (calculadora) al documento
Presionar menu **6: Statistics** (estadística) | **1: Stat Calculations** (cálculos estadísticos) | **1: One-Variable Statistics** (estadísticas de una variable)
Presionar enter
Esto abre un cuadro de diálogo.
Dejar la opción "Num of Lists" (número de listas) en 1 y presionar enter



Se abrirá otro cuadro de diálogo.
Seleccionar del menú desplegable **número** en la opción "X1 List" (lista X1) y **frec** en la opción "Frequency List" (lista de frecuencias)
Presionar enter



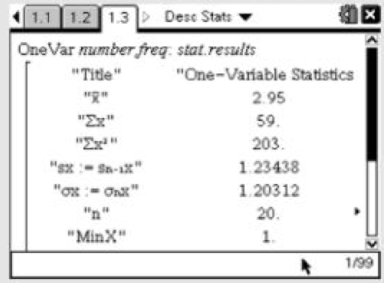
▶ Continúa en la página siguiente.

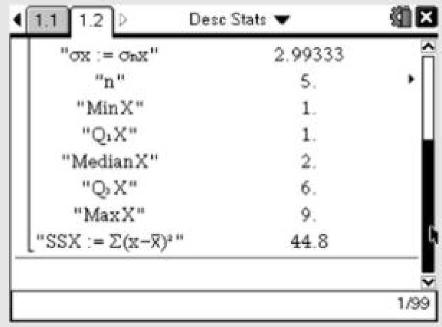
La información que se muestra no entrará en una sola pantalla. Puede desplazarse hacia arriba o hacia abajo para ver toda la información.

Los parámetros calculados son:

Media	$\bar{x}$
Suma de todos los valores	$\sum x$
Suma de los valores al cuadrado	$\sum x^2$
Desviación típica muestral	s_x
Número	n
Valor mínimo	Min$X$
Cuartil inferior	Q_1X
Mediana	Median$X$
Cuartil superior	Q_3X
Valor máximo	Max$X$
Suma de los cuadrados de las desviaciones desde la media	SSX

Nota: En este curso, usaremos siempre la desviación típica de la población (σ_x).





5.9 Cálculo del rango intercuartil

El rango intercuartil es la diferencia entre el cuartil superior y el cuartil inferior ($Q_3 - Q_1$).

Ejemplo 40

Calcule el rango intercuartil para los siguientes datos:

Número	1	2	3	4	5
Frecuencia	3	4	6	5	2

Primero calcular el resumen estadístico para estos datos (véase el ejemplo 39)

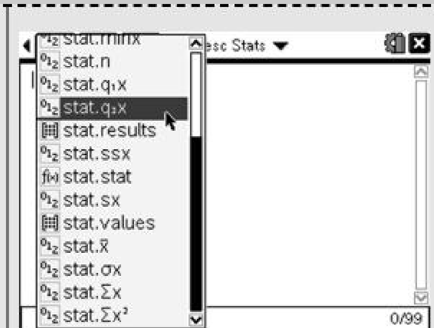
Agregar una página de **Calculator** (calculadora) al documento

Los valores del resumen estadístico se almacenan luego de haberlos calculado y permanecen almacenados hasta la próxima vez que se calculen.

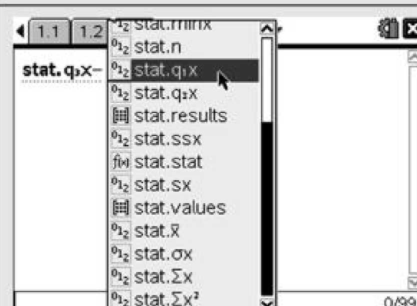
Presionar var

Se abrirá un cuadro de diálogo con los nombres de las variables estadísticas.

Desplazarse hacia abajo hasta **stat.q$_3$x**, usando el *touchpad* o las teclas ▼ ▲, y luego presionar enter

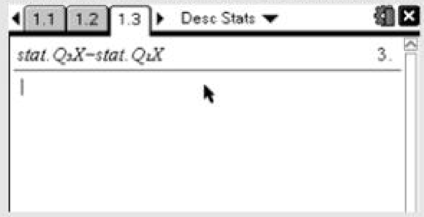


Ingresar (−) y presionar var nuevamente. Desplazarse hacia abajo hasta **stat.q$_1$x**, usando el *touchpad* o las teclas ▼ ▲, y luego presionar enter.



▶ Continúa en la página siguiente.

Presionar enter nuevamente
La calculadora ahora muestra el resultado:
Rango intercuartil = $Q_3 - Q_1 = 3$



5.10 Uso de los parámetros estadísticos

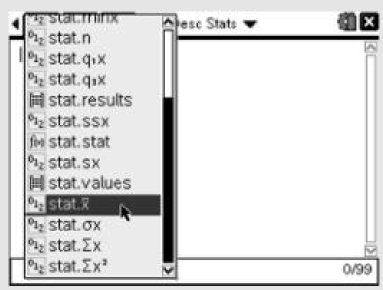
Ejemplo 41

Calcule $\bar{x} + \sigma_x$ para los siguientes datos:

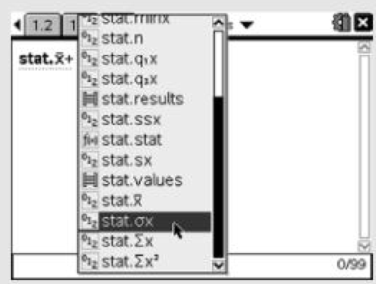
Número	1	2	3	4	5
Frecuencia	3	4	6	5	2

La calculadora almacena los valores de los estadísticos calculados, para que se pueda acceder a ellos en otras operaciones. Los valores permanecen almacenados hasta la próxima vez que se haga un cálculo utilizando la opción **One-Variable Statistics** (estadísticas de una variable).

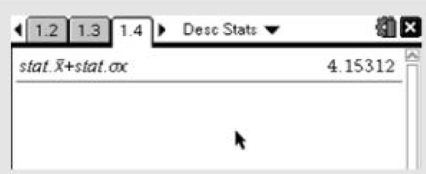
Primero calcular el resumen estadístico para estos datos (véase el ejemplo 39)
Agregar una nueva página de **Calculator** (calculadora) al documento
Presionar var
Se verá un cuadro de diálogo con los nombres de las variables estadísticas.
Desplazarse hacia abajo hasta **stat.x̄** usando el *touchpad* o las teclas, ▼ ▲, y luego presionar enter



Ingresar + y presionar var nuevamente
Desplazarse hacia abajo hasta **stat.σx**, usando el *touchpad* o las teclas ▼ ▲, y luego presionar enter



Presionar enter nuevamente
La calculadora ahora muestra el resultado:
$\bar{x} + \sigma_x = 4{,}15$ (3 cs)



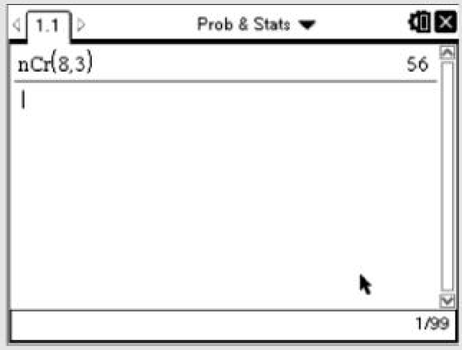
Cálculo de probabilidades binomiales

5.11 Cómo usar $_nC_r$

Ejemplo 42

Halle el valor de $\binom{8}{3}$ (o $_8C_3$).

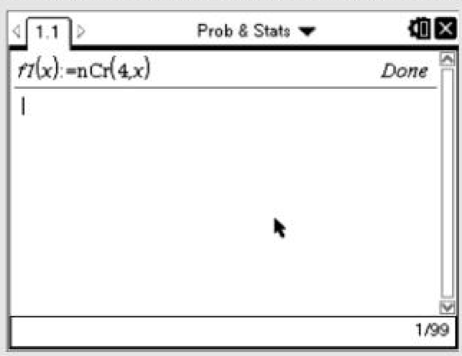
Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Presionar menu **5: Probability** (probabilidad) | **3: Combinations** (combinaciones)
Como método alternativo, podemos ingresar N C R (.
No hay que preocuparse por las mayúsculas y minúsculas: la calculadora reconoce la secuencia y la traduce en consecuencia.
Ingresar 8,3
Presionar enter



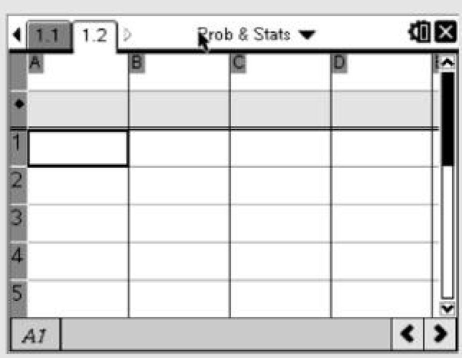
Ejemplo 43

Enumere los valores de $\binom{4}{r}$ para $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Ingresar F 1 (X) ctrl :=
Presionar menu **5: Probability** (probabilidad) | **3: Combinations** (combinaciones)
Como método alternativo, podemos ingresar N C R (.
No hay que preocuparse por las mayúsculas y minúsculas: la calculadora reconoce la secuencia y la traduce en consecuencia.
Ingresar 4, *x*
Presionar enter



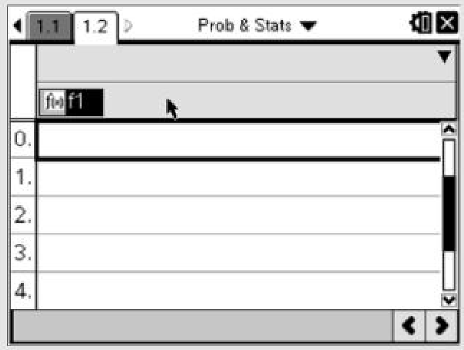
Presionar On y agregar una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo) al documento



▶ Continúa en la página siguiente.

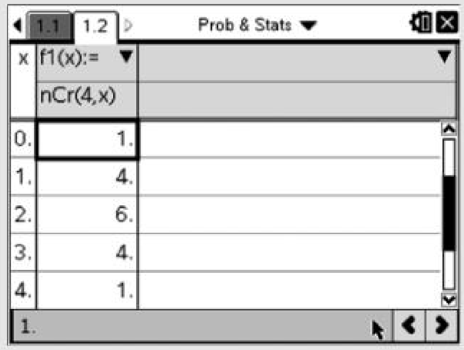
Presionar ctrl T para pasar de hoja de cálculo a tabla

Presionar enter para mostrar la función $f1(x)$



La tabla muestra que:

$\binom{4}{0}=1, \binom{4}{0}=1, \binom{4}{1}=4, \binom{4}{2}=6, \binom{4}{3}=4$ y $\binom{4}{4}=1$



5.12 Cálculo de probabilidades binomiales

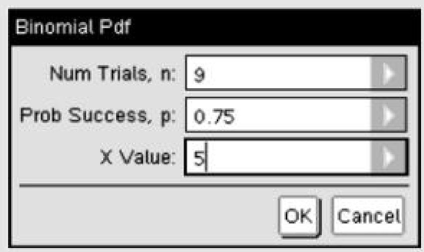
Ejemplo 44

Sea X una variable aleatoria discreta y $X \sim B(9; 0{,}75)$.
Calcule $P(X = 5)$.

$$P(X=5)=\binom{9}{5}0{,}75^5\ 0{,}25^4$$

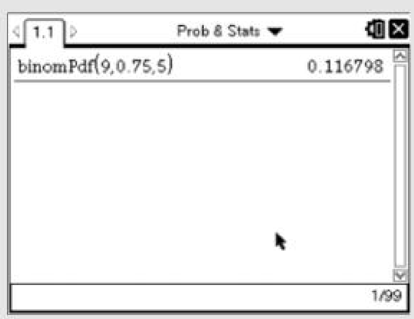
La calculadora puede hallar este valor directamente.
Abrir un documento y agregar una página de **Calculator** (calculadora)

Presione menu **5: Probability** (probabilidad) | **3: Probability** (probabilidad) | **5: Distributions** (distribuciones) | **D: Binomial Pdf** (dpPbinomial)
Ingresar el número de experimentos, la probabilidad de éxito y el valor que toma la variable X
Hacer clic en OK



La calculadora muestra que
$P(X = 5) = 0{,}117$ (3 cs)

También podemos ingresar la función en forma directa, sin usar el cuadro de diálogo.

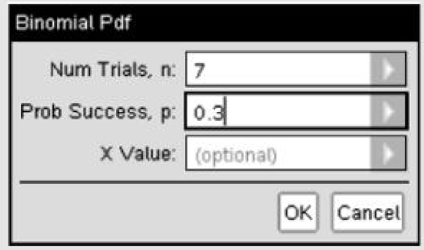


Ejemplo 45

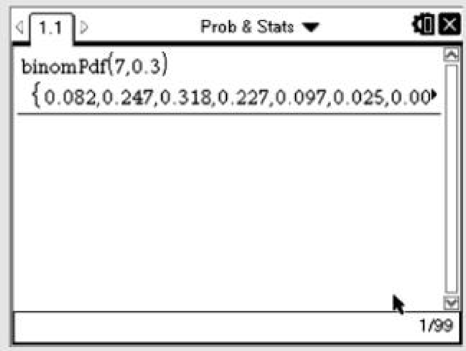
X es una variable aleatoria discreta y $X \sim B(7; 0{,}3)$.
Calcule las probabilidades de que la variable tome los valores $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora).

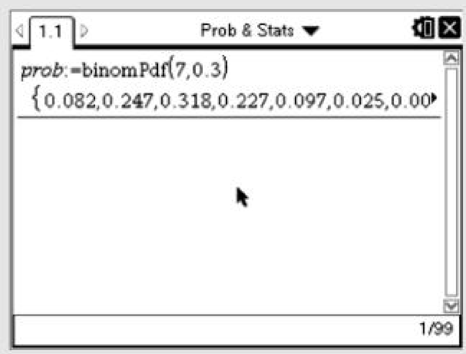
Presionar menu **5: Probability** (probabilidad) | **3: Probability** (probabilidad) | **5: Distributions** (distribuciones) | **D: Binomial Pdf** (dpPbinomial)
Ingrese el número de experimentos, la probabilidad de éxito y dejar en blanco el valor de *X*
Hacer clic en OK



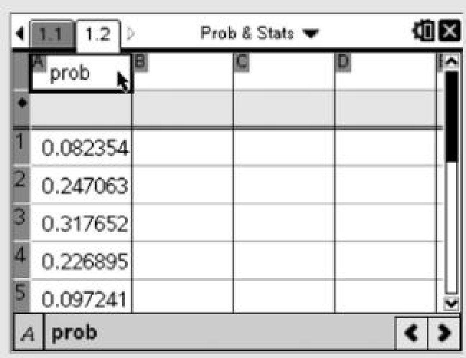
La calculadora mostrará cada una de las probabilidades. Para ver el resto de los valores, desplazar la pantalla hacia la derecha. Podemos también transferir esta lista a una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo).



Para almacenar la lista en una variable cuyo nombre sea **"prob"** ingresar:
prob:=binomPdf(7; 0,3)
o usar el cuadro de diálogo como se hizo anteriormente
Usar ctrl := para introducir :=



Presionar On y agregar una nueva página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)
Arriba de todo, en la primera columna, ingresar **"prob"**.
Presionar enter
Las probabilidades binomiales se muestran ahora en la primera columna.

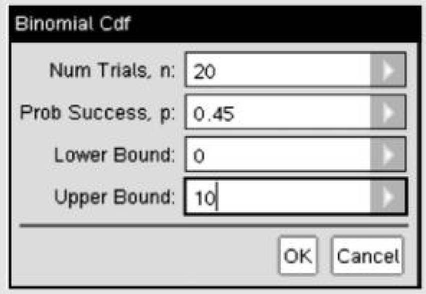


Ejemplo 46

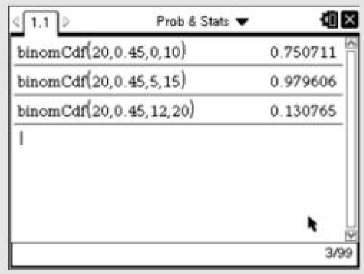
X es una variable aleatoria discreta y $X \sim$ B(20; 0,45).
Calcule:

a La probabilidad de que *X* sea menor o igual a 10
b La probabilidad de *X* se encuentre entre 5 y 15 inclusive
c La probabilidad de que *X* sea mayor que 11

Abrir un documento nuevo y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Presionar menu **5: Probability** (probabilidad) | **3: Probability** (probabilidad) | **5: Distributions** (distribuciones) | **E: Binomial Cdf** (dpAbinomial)
Ingresar el número de experimentos y la probabilidad de éxito
El límite inferior en este caso es 0 y el límite superior es 10.
Hacer clic en OK



a $P(X \leq 10) = 0{,}751$ (3 cs)
b $P(5 \leq X \leq 15) = 0{,}980$ (3 cs)
c $P(X > 11) = 0{,}131$ (3 cs)
Nota: el límite inferior aquí es 12.



Cálculo de probabilidades de la distribución normal

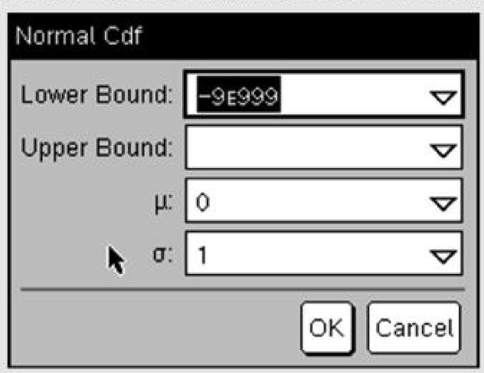
5.13 Cálculo de probabilidades conociendo los valores de *X*

Ejemplo 47

Una variable aleatoria *X* tiene distribución normal con media 195 y desviación típica 20, es decir $X \sim N(195, 20^2)$. Calcule:

a La probabilidad de que *X* sea menor que 190
b La probabilidad de *X* sea mayor que 194
c La probabilidad de que *X* se encuentre entre 187 y 196

Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Presionar menu **5: Probability** (probabilidad) | **5: Distributions** (distribuciones) | **2: Normal Cdf** (dpA normal)
Presionar enter
Se deben ingresar, en el cuadro de diálogo, los valores de "Lower Bound" (límite inferior), "Upper Bound" (límite superior), μ y σ.
Para el límite inferior, ingresar -9×10^{999} en la forma -9E999. Este es el menor valor que se puede ingresar en la CPG, y se usa en lugar de $-\infty$. Para ingresar E, hay que presionar la tecla EE.

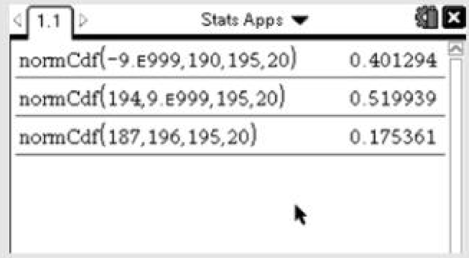


▶ Continúa en la página siguiente.

a P(X < 190)
Dejar el límite inferior en −9E999
Cambiar el límite superior a 190
Cambiar μ a 195 y σ a 20
P(X < 190) = 0,401 (3 cs)

b P(X > 194)
Cambiar el límite inferior a 194
Para el límite superior, ingresar 9×10^{999} en la forma 9E999. Este es el valor más grande que se puede ingresar en la CPG, y se usa en lugar de +∞. Dejar μ en 195 y σ en 20.
P(X > 194) = 0,520 (3 cs)

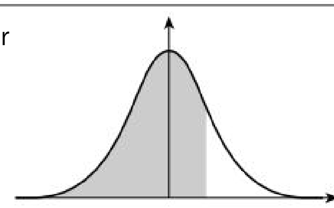
c P(187 < X < 196)
Cambiar el límite inferior a 187 y el límite superior a 196. Dejar μ en 195 y σ en 20.
P(187 < X < 196) = 0,175 (3 cs)



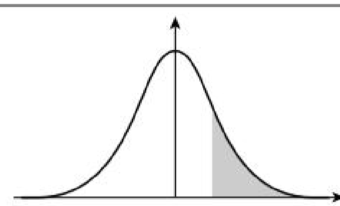
Puede ser más rápido ingresar la función directamente en la calculadora, sin usar los menús y las aplicaciones, pero hay muchos parámetros que recordar en la función **Normal Cdf** (dpA normal).
En el caso de hacerlo, es importante recordar que la función a escribir es “Normal Cdf” (y no “dpA normal”).

5.14 Cálculo de valores de *X* conociendo las probabilidades

Al usar la función **InvNorm** (normal inversa), hay que asegurarse de hallar la probabilidad del lado correcto de la curva normal. El área que se ingresará como dato será siempre la que esté a la izquierda del valor de X, es decir, será de la forma P(X < x) (véase el ejemplo 48).



Si se da el área que está a la derecha del valor de X, P(X > x), hay que calcular la diferencia entre esta probabilidad y 1, antes de usar la normal inversa (véase el ejemplo 49).

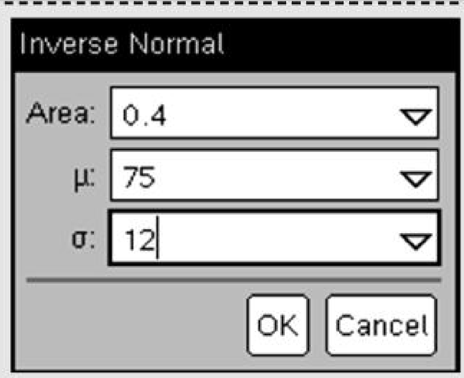


Ejemplo 48

Una variable aleatoria X tiene distribución normal con media 75 y desviación típica 12, es decir $X \sim N(75,12^2)$.
Si P(X < x) = 0,4, halle el valor de x.

En este caso se da la probabilidad a la **izquierda** del valor de x, así que se puede utilizar P(X < x) directamente.

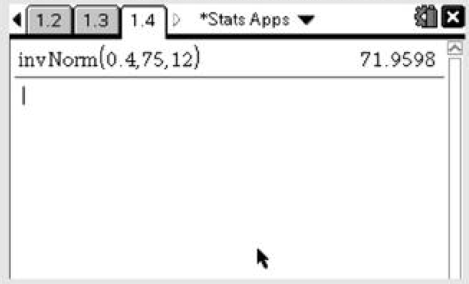
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Presionar menu **5: Probability** (probabilidad) | **5: Distributions** (distribuciones) | **3: Inverse Normal** (normal inversa)
Presionar enter
Ingresar, en el cuadro de diálogo, la probabilidad (“Area” = 0.4), la media (μ = 75) y la desviación típica (σ = 12)



▶ Continúa en la página siguiente.

Así que, si $P(X < x) = 0{,}4$, entonces $x = 72{,}0$ (3 cs).

Puede ser más rápido ingresar directamente la función en la calculadora, sin usar los menús y las aplicaciones, pero hay muchos parámetros que recordar en la función invNorm.

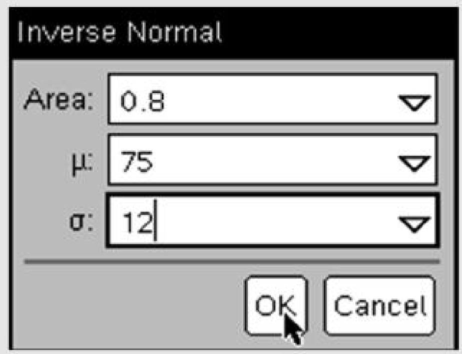


Ejemplo 49

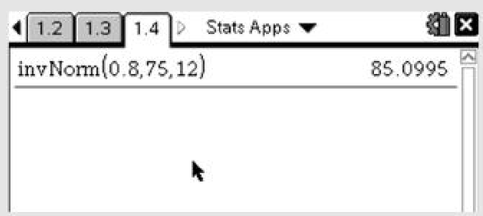
Una variable aleatoria X tiene distribución normal con una media de 75 y una desviación típica de 12, es decir $X \sim N(75,12^2)$.
Si $P(X > x) = 0{,}2$, halle el valor de x.

En este caso se da la probabilidad a la **derecha** del valor de x, así que primero hay que hallar $P(X < x) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Luego se puede usar invNorm como en el ejemplo anterior.

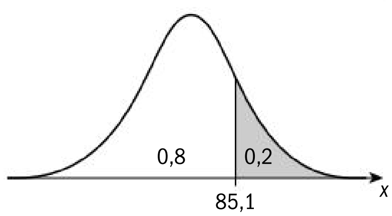
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Calculator** (calculadora)
Presionar menu **5: Probability** (probabilidad) | **5: Distributions** (distribuciones) | **3: Inverse Normal** (normal inversa)
Presionar enter
Ingresar, en el cuadro de diálogo, la probabilidad ("Area" = 0.8), la media ($\mu = 75$) y la desviación típica ($\sigma = 12$)



Así que, si $P(X > x) = 0{,}2$, entonces $x = 85{,}1$ (3 cs).



Este gráfico aproximado, que representa una curva de distribución normal, muestra el valor de x y las probabilidades del ejemplo 49.



Diagramas de dispersión, regresión lineal y coeficiente de correlación

5.15 Diagramas de dispersión usando una página de datos y estadística

Una forma rápida de dibujar diagramas de dispersión y hallar la ecuación de la recta de regresión es usar una página de **Data and Statistics** (datos y estadística).

Para ver cómo calcular el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson, véase la sección 5.16 de este capítulo.

Ejemplo 50

Estos datos están conectados de forma aproximada por una función lineal.

x	1,0	2,1	2,4	3,7	5,0
y	4,0	5,6	9,8	10,6	14,7

Halle la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x.
Use la ecuación para predecir el valor de y cuando $x = 3,0$.

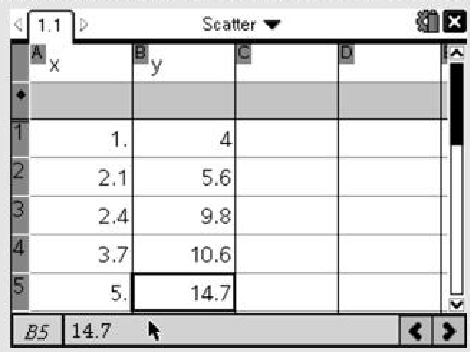
Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)

Ingresar los datos en dos listas:

Escribir "x" en la primera celda e "y" en la celda de su derecha

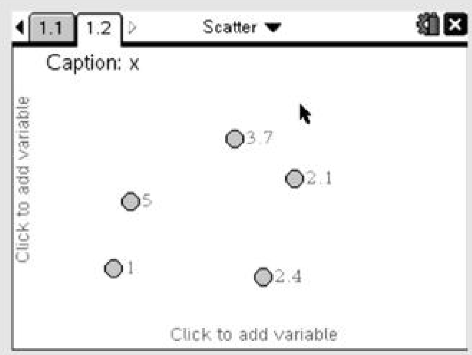
Ingresar los valores de x en la primera columna y los de y en la segunda

Usar las teclas ▼ ▲ ◀▶ para navegar por la hoja de cálculo

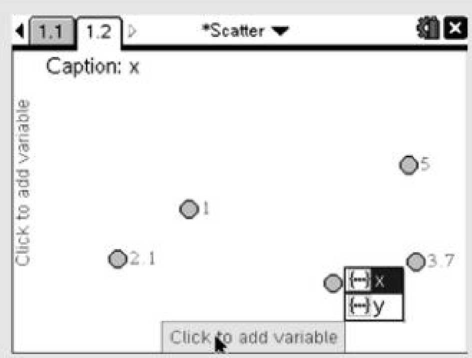


Presionar On y agregar una nueva página de **Data and Statistics** (datos y estadística)

Nota: No es necesario preocuparse por lo que muestra esta pantalla.

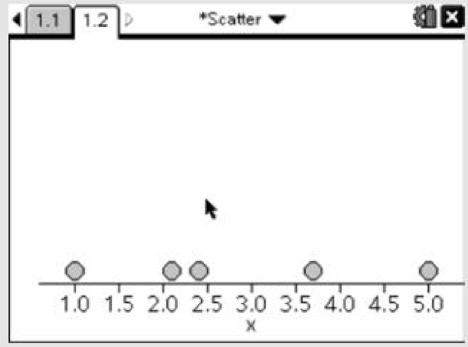


Hacer clic en la parte inferior de la pantalla, donde dice "Click to add variable" (hacer clic para ingresar la variable), seleccionar "x" de la lista y presionar enter

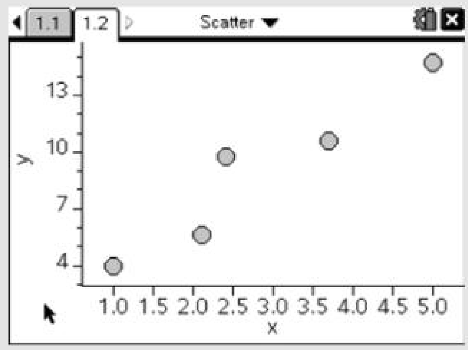


▶ Continúa en la página siguiente.

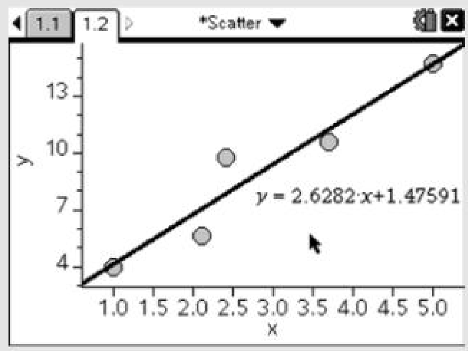
Ahora se ve un diagrama de puntos para los valores de *x*. Mover el cursor cerca del costado izquierdo de la pantalla Aparecerá nuevamente el mensaje “Click to add variable” (hacer clic para ingresar la variable). Hacer clic en el mensaje, seleccionar “*y*” de la lista y presionar enter.



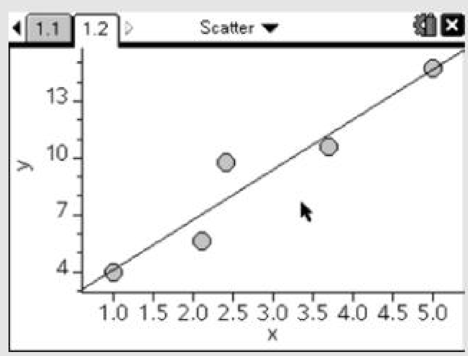
Ahora se ve un diagrama de dispersión de *y* sobre *x*.



Presionar menu **4: Analyze** (analizar) | **6: Regression** (regresión) | **1: Show Linear** (mostrar lineal) ($mx + b$)
Presionar enter
Se verá la recta de regresión de mínimos cuadrados de *y* sobre *x* y la ecuación, que es:
$y = 2{,}6282x + 1{,}47591$

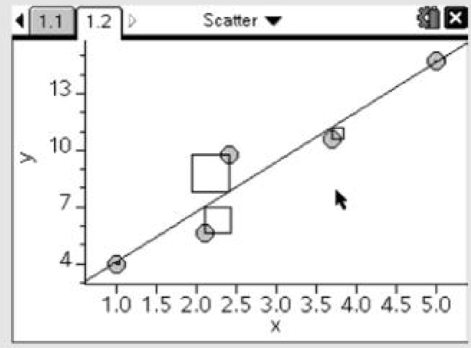


Al hacer clic con el cursor lejos de la recta, se deseleccionará y la ecuación desaparecerá.

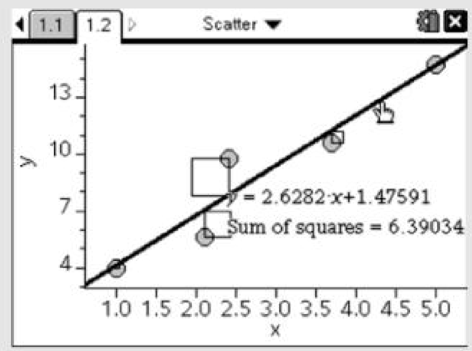


▶ Continúa en la página siguiente.

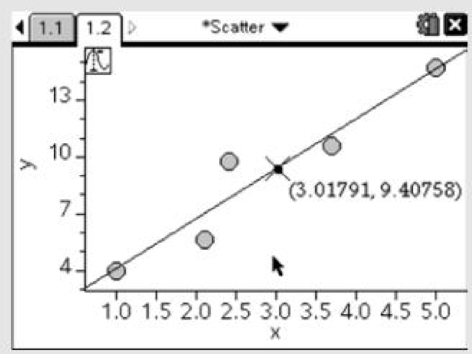
Presionar menu **4: Analyze** (analizar) | **7: Residuals** (residuos) | **1: Show Residual Squares** (mostrar cuadrados de residuos)
Presionar enter
Los cuadrados que se ven en la pantalla representan los cuadrados de las desviaciones de los valores de y (de los datos) respecto de la recta de regresión.



Mover el cursor hacia la recta de regresión. Cuando se convierte en , hacer clic en el *touchpad*.
Ahora se ve la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x y la suma de los cuadrados.
La suma de los cuadrados se relaciona con el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson.
Presionar menu **4: Analyze** (analizar) | **7: Residuals** (residuos) | **1: Hide Residual Squares** (ocultar cuadrados de residuos)
Presione enter



Presionar menu **4: Analyze** (analizar) | **A: Graph Trace** (trazado de gráfico)
Presionar enter
Usar las teclas ◀▶ para mover el cursor de trazado a lo largo de la recta
No es posible posicionar el cursor de trazado sobre un valor exacto, así que hay que acercarse tanto como se pueda a $x = 3$.
Del gráfico, $y \approx 9{,}4$ cuando $x = 3{,}0$.



5.16 Diagramas de dispersión usando una página de gráficos

Usar una página de **Graphs** (gráficos) lleva un poco más de tiempo que usar una de **Data and Statistics** (datos y estadística), pero se puede obtener información más detallada de los datos, como por ejemplo, el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson.

Ejemplo 51

Estos datos están conectados de forma aproximada por una función lineal.

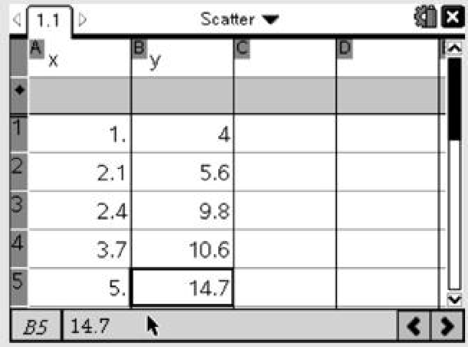
x	1,0	2,1	2,4	3,7	5,0
y	4,0	5,6	9,8	10,6	14,7

Estos son los mismos datos que los usados en el ejemplo 50.

a Halle la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x.
b Halle el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson.
c Prediga el valor de y cuando $x = 3{,}0$.

▶ Continúa en la página siguiente.

Abrir un nuevo documento y agregar una página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)
Ingresar los datos en dos listas:
Escribir “*x*” en la primera celda e “*y*” en la celda de su derecha
Ingresar los valores de *x* en la primera columna y los de *y* en la segunda
Usar las teclas ▼ ▲ ◀ ▶ para navegar por la hoja de cálculo

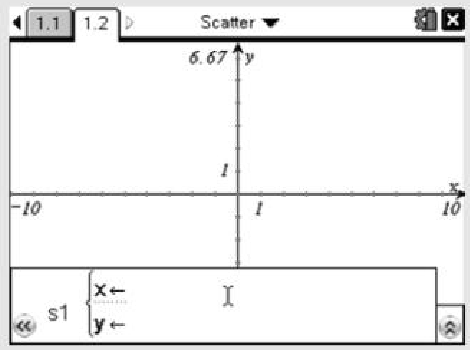


Presionar On y agregar una nueva página de **Graphs** (gráficos) al documento

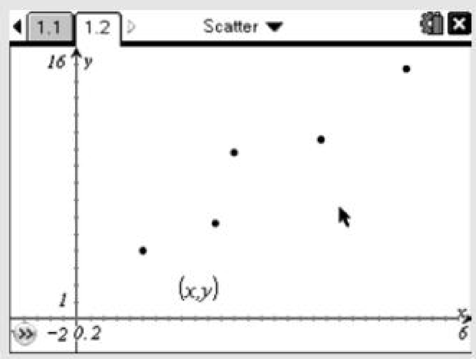
Presionar menu **3: Graph Type** (tipo de gráfico) | **4: Scatter Plot** (diagrama de dispersión)

Presionar enter
La línea de ingreso aparece en la parte inferior del área de trabajo.
Se visualiza el formato de diagrama de dispersión.
Ingresar los nombres de las listas, *x* e *y*, en la función del diagrama de dispersión
Usar tab para moverse de *x* a *y*

Presionar enter

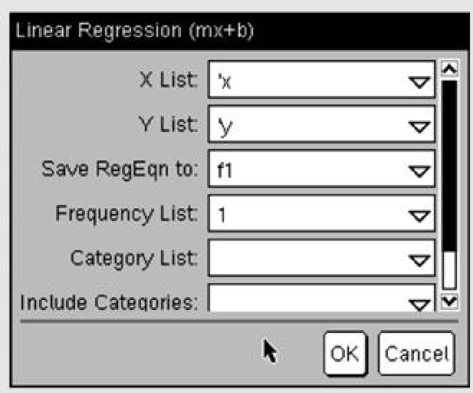


Modificar la configuración de la ventana para mostrar los datos y los ejes *x* e *y*
Se muestra un diagrama de dispersión de *y* sobre *x*.



Presionar ctrl ◀ para volver a la página de **Lists and Spreadsheet** (listas y hoja de cálculo)

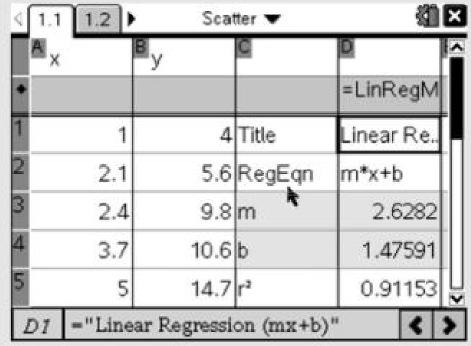
Presionar menu **4: Statistics** (estadística) | **1: Stat Calculations** (cálculos estadísticos) | **3: Linear Regression** (regresión lineal) ($mx + b$)
Presionar enter
Del menú desplegable, elegir “*x*” para “X List” (lista X) e “*y*” para “Y List” (lista Y). Usar tab para moverse entre los campos.
Presionar enter



▶ Continúa en la página siguiente.

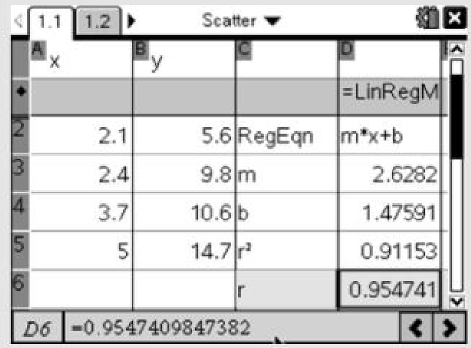
En la pantalla, se verá el resultado de la regresión lineal en las listas que están a la derecha de las listas de *x* e *y*.
Los valores de *m* (2,6282) y de *b* (1,47591) se muestran por separado.

a La ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados de *y* sobre *x* es $y = 2{,}6282x + 1{,}47591$.

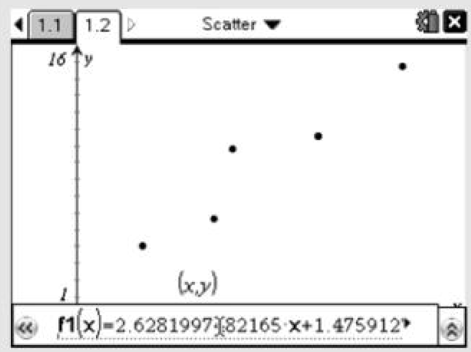


Desplazarse hacia abajo en la tabla para ver el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson, dado como *r*

b El coeficiente de correlación momento-producto de Pearson, $r = 0{,}954741\ldots$

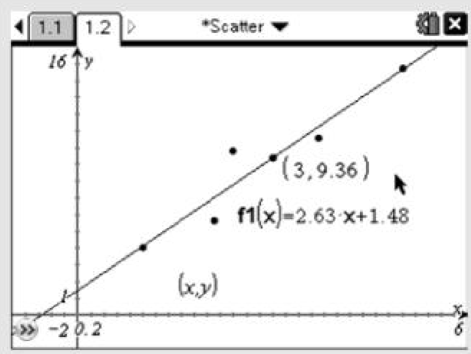


Presionar ctrl ▶ para volver a la página de **Graphs** (gráficos)
Usando el *touchpad*, hacer clic sobre « para abrir la línea de ingreso en la parte inferior del área de trabajo
Se verá que la ecuación de la recta de regresión ha sido pegada en *f1*(*x*).



Presionar enter
Ahora la recta de regresión se muestra en el gráfico.
Usar la función de trazado menu **5: Trace** (trazado) | **1: Graph Trace** (trazado de gráfico) para hallar el punto donde $x = 3$
Usando las teclas ▶ ◀, acercar el cursor de trazado, editar la coordenada *x*, cambiándola a exactamente 3,0

c Cuando $x = 3$, $y = 9{,}36$.



18 Conocimientos previos

Para poder responder las preguntas de los exámenes de Matemáticas NM del IB es necesario tener un buen conocimiento de los temas cubiertos en este capítulo, y haberlos estudiado sin olvidar ninguno.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

Este capítulo presenta una serie de temas que se deberían saber antes de comenzar el curso. No es necesario repasar el capítulo completo todo de una vez. Más bien, se recomienda repasar los conocimientos previos de álgebra, por ejemplo, cuando se esté estudiando la parte de álgebra del curso.

Contenidos del capítulo

1 Número

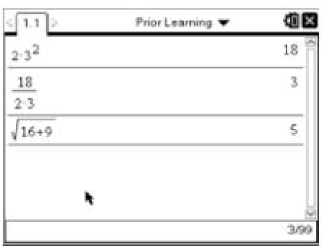
1.1 Operaciones

Las siguientes son las reglas relativas al orden en que se deben realizar las operaciones:

- Primero se calculan los paréntesis (o corchetes).
- A continuación, se calculan los exponentes (potencias, raíces).
- Después se calculan las multiplicaciones y las divisiones, de izquierda a derecha.
- Por último, se calculan las sumas (adiciones) y las restas (sustracciones), de izquierda a derecha.

Se puede usar la siguiente regla nemotécnica: **PEMDAS**
Paréntesis
Exponentes
MD multiplicación y división (de izquierda a derecha)
AS adición y sustracción (de izquierda a derecha)

La calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG) sigue estas reglas, así que si se ingresa una operación correctamente, se debería obtener la respuesta correcta.



La CPG muestra las divisiones como fracciones y esto aclara el orden de las operaciones.

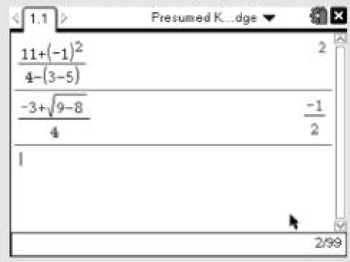
Las calculadoras simples, como las que hay en los teléfonos, no siempre siguen las reglas de las operaciones.

Ejemplo 1

a Evalúe $\frac{11+(-1)^2}{4-(3-5)}$	
$=\frac{11+1}{4-(-2)}$	*Primero los paréntesis*
$=\frac{12}{6}$	*Simplificar el numerador y el denominador*
$=2$	
b Evalúe $\frac{-3+\sqrt{9-8}}{4}$	
$=\frac{-3+\sqrt{1}}{4}$	*Simplificar los términos que están dentro de la raíz cuadrada*
$=\frac{-3+1}{4}$	*Evaluar la raíz*
$=\frac{-2}{4}$	*Simplificar el numerador y el denominador*
$=-\frac{1}{2}$	

▶ Continúa en la página siguiente.

En la CPG, para las fracciones y las raíces se pueden usar tanto plantillas como paréntesis.



Ejercitación 1A

Realice primero los cálculos a mano, luego verifique sus respuestas con la CPG.

1 Calcule:

a $12 - 5 + 4$ **b** $6 \div 3 \times 5$ **c** $4 + 2 \times 3 - 2$

d $8 - 6 \div 3 \times 2$ **e** $4 + (3 - 2)$ **f** $(7 + 2) \div 3$

g $(1 + 4) \times (8 - 4)$ **h** $1 - 3 + 5 \times (2 - 1)$

2 Halle:

a $\dfrac{6+9}{4-1}$ **b** $\dfrac{2\times 9}{3\times 4}$ **c** $\dfrac{2-(3+4)}{4\times(2-3)}$ **d** $\dfrac{6\times 5\times 4}{3\times 2-1}$

3 Determine:

a $3 \times (-2)^2$ **b** $2^2 \times 3^3 \times 5$ **c** $4 \times (5 - 3)^2$ **d** $(-3)^2 - 2^2$

4 Calcule:

a $\sqrt{3^2 + 4^2}$ **b** $\left(\sqrt{4}\right)^3$ **c** $\sqrt{4^3}$ **d** $\sqrt{2 + \sqrt{2+2}}$

5 Halle:

a $\sqrt{\dfrac{13^2 - \left(3^2 + 4^2\right)}{2\times 18}}$ **b** $2\sqrt{\dfrac{3+5^2}{7}}$ **c** $2(3^2 - 4(-2)) - (2 - \sqrt{7-3})$

1.2 Simplificación de expresiones que contienen raíces

$\sqrt{2}$, $2-\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ son **números irracionales** que contienen raíces cuadradas.

Se denominan **radicales**.

En las operaciones se pueden usar aproximaciones decimales para este tipo de números irracionales, pero los resultados más exactos se obtendrán usando los radicales.

Los **radicales** se encuentran en su forma más **simplificada** cuando:

- No hay radicales en el denominador.
- El número que figura dentro del radical $\sqrt{\ }$ es el menor valor entero posible.

Si una pregunta pide valores exactos significa que se debe dejar la respuesta en forma de radical.

De acuerdo con algunos historiadores, Pitágoras estaba tan perturbado con el hecho de que $\sqrt{2}$ fuera irracional que finalmente lo condujo a la muerte.

→ Reglas de radicales

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad \sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b} \qquad \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Ejemplo 2

Simplifique:

a $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ **b** $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

Respuestas

a $\dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ *Multiplicar numerador y denominador por* $\sqrt{5}$

$= \dfrac{4\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}$

$= \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

b $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ *Multiplicar numerador y denominador por* $\sqrt{3}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{3}$ *Simplificar*

$= \sqrt{3}$

Ejemplo 3

Simplifique:

a $\sqrt{20}$ **b** $\sqrt{8}-\sqrt{18}$

Respuestas

a $\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

b $\sqrt{8}-\sqrt{18} = \sqrt{4 \times 2} - \sqrt{9 \times 2}$

$= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

$= -\sqrt{2}$

Buscar cuadrados perfectos que dividan a 8 y 18. Usarlos para factorizar 8 y 18.
Usar $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Ejemplo 4

Desarrolle los paréntesis y simplifique $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$.

Respuesta

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) = 1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^2$

$= 1-2$

$= -1$

(a + b)(c + d)
= ac + ad + bc + bd

Ejemplo 5

Escriba la fracción $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)}$ sin radicales en el denominador.

Respuesta

$\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)} \times \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)}$ $= \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-3} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{-2}$	*Multiplicar numerador y denominador por* $1-\sqrt{3}$

Ejercitación 1B

1 Simplifique:

a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b** $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ **c** $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ **d** $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ **e** $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

2 Simplifique:

a $\sqrt{12}$ **b** $\sqrt{75}$ **c** $\sqrt{72}$

d $3\sqrt{8}$ **e** $5\sqrt{27}$

3 Simplifique:

a $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ **b** $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$ **c** $\sqrt{24}\times\sqrt{32}$

d $2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}$ **e** $3\sqrt{5}\times 5\sqrt{75}$

4 Simplifique:

a $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$ **b** $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ **c** $2\sqrt{3}+\sqrt{12}$

d $\sqrt{2}-\sqrt{8}$ **e** $\sqrt{12}-2\sqrt{3}$

5 Desarrolle los paréntesis y simplifique:

a $\left(3+\sqrt{2}\right)^2$ **b** $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ **c** $\left(3+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$

d $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$ **e** $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

6 Simplifique:

a $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ **b** $\dfrac{1}{1-2\sqrt{3}}$ **c** $\dfrac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ **d** $\dfrac{4+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

7 Escriba estas expresiones sin radicales en el denominador. Simplifique tanto como sea posible.

a $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+3\sqrt{3}$ **b** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ **c** $\sqrt{20}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

1.3 Números primos, divisores y múltiplos

Un número **primo** es un entero, mayor que 1, que solo es múltiplo de 1 y de sí mismo.

Ejemplo 6

Enumere todos los divisores de 42.	
Respuesta $42 = 1 \times 42$, $42 = 2 \times 21$ $42 = 3 \times 14$, $42 = 6 \times 7$ Los divisores de 42 son 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42.	*Escribir 42 como producto de números, de todas las formas posibles*

En 2009, el mayor número primo conocido tenía 12 978 189 dígitos. Los números primos se han convertido en un importante tema de estudio, ya que son utilizados en criptografía.

Ejemplo 7

Escriba el número 24 como producto de divisores primos.	
Respuesta $24 \div 2$ $\quad 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $12 \div 2$ $\quad = 2^3 \times 3$ $6 \div 2$ $3 \div 3$ 1	*Comenzar dividiendo por el número primo más pequeño. Repetir hasta que el resultado de la división sea 1.*

Ejemplo 8

Halle el **mínimo común múltiplo** (mcm) de 12 y 15.	
Respuesta Los múltiplos de 12 son 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**, 132, 144,... Los múltiplos de 15 son 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**, 135,... Los múltiplos comunes son 60, 120,... El mcm es 60.	*Enumerar los múltiplos de cada número hasta encontrar algunos que estén en ambas listas. El mcm es el menor de los números que están en ambas listas.*

Ejemplo 9

Halle el **máximo común divisor** (mcd) de 36 y 54.

Respuesta

$36 \div 2$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$	$54 \div 2$	$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$
$18 \div 2$		$27 \div 3$	
$9 \div 3$		$9 \div 3$	
$3 \div 3$		$3 \div 3$	
1		1	

El mcd de 36 y 54 es $2 \times 3 \times 3 = 18$.

Escribir cada número como producto de divisores primos. Hallar el producto de todos los divisores que son comunes a ambos números.

Ejercitación 1C

1 Enumere todos los divisores de:
a 18 **b** 27 **c** 30 **d** 28 **e** 78

2 Escriba como producto de divisores primos:
a 36 **b** 60 **c** 54 **d** 32 **e** 112

3 Halle el mcm de:
a 8 y 20 **b** 6, 10 y 16

4 Halle el mcd de:
a 56 y 48 **b** 36, 54 y 90

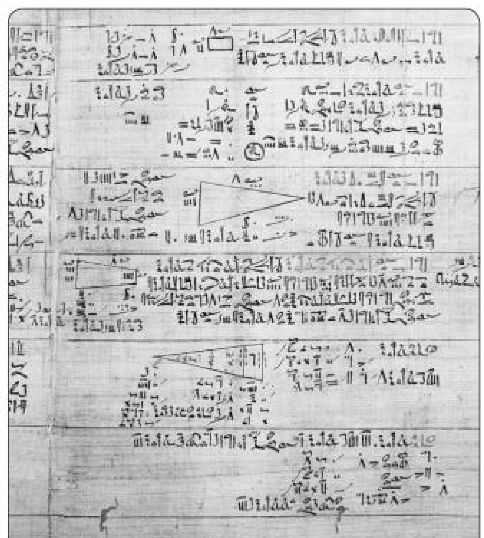
1.4 Fracciones y decimales

Hay dos tipos de fracciones:

- Fracciones **comunes** (llamadas simplemente "fracciones"), como $\frac{4}{5}$ $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$
- Fracciones **decimales** (llamadas simplemente "decimales"), como 0,125

Las fracciones pueden ser:

- **Propias**, como $\frac{2}{3}$, en las que el numerador es menor que el denominador
- **Impropias**, como $\frac{4}{3}$, en las que el numerador es mayor que el denominador
- **Mixtas**, como $6\frac{7}{8}$



El papiro de Rhind del antiguo Egipto, alrededor del 1600 a. c., muestra operaciones con fracciones. Los egipcios usaban las fracciones **unitarias** en sus cálculos. Así que, por ejemplo, en lugar de $\frac{4}{5}$, escribían $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$. Esta no es considerada, en general, una forma útil de escribir fracciones.

Las fracciones en las que el numerador y el denominador no tienen divisores comunes están reducidas a su **mínima expresión**. $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{12}$ son fracciones **equivalentes**.

0,675 es un decimal **finito**.

0,32... o $0,\overline{32}$ o $0,\dot{3}\dot{2}$ son distintas formas de escribir el decimal **periódico** 0,3232323232...

Los decimales que no son finitos y que tampoco son periódicos son números **irracionales**, como π o $\sqrt{2}$.

En una CPG podemos ingresar una fracción usando la plantilla $\frac{\square}{\square}$ o usando la tecla de división ÷. En algunos casos habrá que tener cuidado, ya que será necesario utilizar paréntesis.

$\pi \approx$ 3,14159265358979323846264 33832795028841971693993 75...
$\sqrt{2} \approx$ 1,41421356237309504880168 87242096980785696718753 7...
Estos números no son decimales finitos y no tienen patrones que se repitan (períodos) en sus dígitos.

Ejemplo 10

a Evalúe:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}$$

× antes de +

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{4}{6}$$

Simplificar

$$=\frac{2}{3}$$

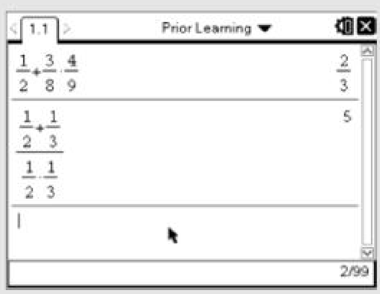
b Evalúe:

Calcular primero el numerador y el denominador

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$$

$$=5$$



Ejemplo 11

a Convierta a decimal la fracción $\frac{7}{16}$.

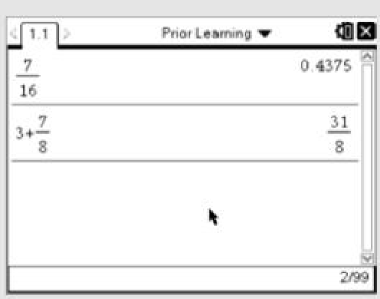
b Escriba $3\frac{7}{8}$ como fracción impropia.

Respuestas

a $\frac{7}{16}=0{,}4375$

b $3\frac{7}{8}=\frac{24}{8}+\frac{7}{8}$

$$=\frac{31}{8}$$



Ejercitación 1D

1 Calcule:

a $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}$ **b** $\frac{2}{3}\div\frac{5}{6}\times 1\frac{1}{3}$

c $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}$ **d** $\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}}$

2 Escriba las siguientes fracciones reducidas a su mínima expresión:

a $\frac{16}{36}$ **b** $\frac{35}{100}$ **c** $\frac{34}{51}$ **d** $\frac{125}{200}$

3 Escriba estas fracciones mixtas como fracciones impropias:

a $3\frac{3}{5}$ **b** $3\frac{1}{7}$ **c** $23\frac{1}{4}$ **d** $2\frac{23}{72}$

4 Escriba estas fracciones impropias como fracciones mixtas:

a $\frac{32}{7}$ **b** $\frac{100}{3}$ **c** $\frac{17}{4}$ **d** $\frac{162}{11}$

5 Convierta a decimales:

a $\frac{8}{25}$ **b** $\frac{5}{7}$ **c** $3\frac{4}{5}$ **d** $\frac{45}{17}$

La CPG tiene herramientas útiles para operar con fracciones. Véase menu **2: Number** (número).

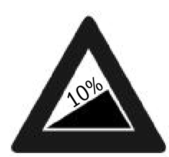
Para convertir una fracción a número decimal, dividimos el numerador por el denominador. Si presionamos ctrl ≈, veremos el resultado como decimal en lugar de como fracción.

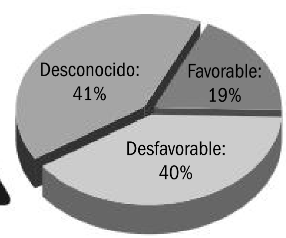
1.5 Porcentajes

Un porcentaje es una forma de expresar una fracción o una razón como una parte de 100. Por ejemplo, 25% significa 25 partes de 100.

Como fracción, $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Como decimal, 25% = 0,25.





Ejemplo 12

La calificación de Lara en su prueba de matemáticas fue 25 sobre 40. ¿Cuál fue su nota, expresada como porcentaje?	
Respuesta $\frac{25}{40}\times 100 = 62{,}5\%$	*Escribir la nota como fracción* *Multiplicar por 100* *Usar la CPG*

Ejemplo 13

Hay 80 alumnos que cursan el Programa del Diploma del IB en un colegio. El 15% estudian Matemáticas NM. ¿Cuántos son estos alumnos?

Respuesta **Método 1** $\frac{15}{100} \times 80 = 12$	*Escribir el porcentaje como fracción con denominador 100 y luego multiplicar por 80*
Método 2 $15\% = 0{,}15$ $0{,}15 \times 80 = 12$	*Escribir el porcentaje como decimal* *Multiplicar por 80*

Divisas internacionales

Las preguntas en los exámenes de Matemáticas NM podrían usar divisas internacionales. Por ejemplo: franco suizo (CHF), dólar estadounidense (USD), libra esterlina (GBP), euro (EUR), yen japonés (JPY) y dólar australiano (AUD).

Ejercitación 1E

1 Escriba como porcentajes:

a 13 alumnos de una clase de 25

b 14 puntos sobre un total de 20

2 Halle el valor de:

a 7% de CHF32 **b** $4\frac{1}{2}$% de GBP12,00

c 25% de EUR750,28 **d** 130% de JPY8000

7% = 0,07

Aumentos y disminuciones porcentuales

Consideremos un aumento de 35%.
El nuevo valor después del aumento será 135% del valor original.
Así que, para aumentar un monto un 35%, hay que hallar 135% de ese monto. Multiplicamos por $\frac{135}{100}$ o 1,35.

Ahora consideremos una disminución de 15%.
Después de una disminución de 15%, el nuevo valor será 85% del valor original. Así que, para disminuir un monto un 15%, hay que hallar 85% de ese monto. Multiplicamos por $\frac{85}{100}$ o por 0,85.

Ejemplo 14

a El gerente de un negocio aumenta 12% los precios de los CD. Un CD costaba originalmente CHF11,60. ¿Cuánto costará después del aumento?
b El costo de un boleto de avión disminuye 8%. El precio original era GBP880. ¿Cuál es el nuevo precio?
c El alquiler de un apartamento ha aumentado de EUR2700 a EUR3645 por mes. ¿Qué porcentaje ha aumentado?

Respuestas

a $11{,}60 \times 1{,}12 = 12{,}99$ francos (al centésimo de CHF más cercano)

b $880 \times 0{,}92 = 809{,}60$ libras

c **Método 1**

El aumento es $3645 - 2700 = 945$ euros. — *Hallar el aumento*

El porcentaje de aumento es $\frac{945}{2700} \times 100 = 35\%$. — *Calcular el aumento como porcentaje del monto original*

Método 2

$\frac{3645}{2700} = 1{,}35 = 135\%$ — *Calcular el precio nuevo como porcentaje del precio viejo*

El porcentaje de aumento es 35%.

Después de un aumento de 12%, el monto será 112% del valor original.

Después de una disminución de 8%, el monto será 92% del valor original.

Porcentaje de aumento
$= \frac{\text{aumento real}}{\text{valor original}} \times 100\%$

Ejemplo 15

En un negocio, el precio de un producto se muestra como AUD44, **incluido** el impuesto.
La tasa de impuesto es 10%.
¿Cuál era el precio sin el impuesto?

Respuesta

Llamemos al precio original x

Después de haber agregado el impuesto, el precio será $1{,}10x$. — *110% = 1,10*

Por lo tanto: $1{,}10x = 44$ — *Hallar x*

$x = 44 \div 1{,}10$ — *Dividir ambos miembros por 1,10*

$= 40$

El precio sin impuesto es AUD40.

Ejercitación 1F

1 En el Reino Unido, los precios de algunos bienes incluyen un impuesto del gobierno llamado VAT (IVA), que es del 20%. Un televisor cuesta GBP480 antes de aplicarle el VAT. ¿Cuánto costará después de aplicar el VAT?

2 En una liquidación en un negocio de Tokio, a un vestido que valía JPY17 000 se lo redujo un 12,5%. ¿Cuál es el precio de liquidación?

3 El costo de un boleto de tren semanal aumenta de GBP120 a GBP128,40. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

4 Entre 2004 y 2005, la producción de petróleo en Australia cayó de 731 000 a 537 500 barriles por día. ¿En qué porcentaje disminuyó la producción?

5 Entre 2005 y 2009, la población de Venezuela aumentó un 7%. La población era 28 400 000 en 2009. ¿Cuál era la población en 2005 (redondeada al 100 000 más cercano)?

6 Un producto aparece en una oferta marcado con un 15% de descuento y con una etiqueta de precio de USD27,20. ¿Cuál era el precio original antes del descuento?

7 El impuesto a bienes y servicios que se cobra en los productos vendidos en negocios se incrementó de 17% a 20%. ¿Cuánto aumentaría el precio de un producto que cuesta GBP20 antes de aplicar el impuesto?

8 Por error, un camarero agrega una tasa de servicio de 10% al costo de una comida que fue de AUD50. Luego reduce el precio 10%. ¿Es ahora el precio igual al precio original? Si no lo fuera, ¿cuál es el cambio porcentual respecto del precio original?

1.6 Razón y proporción

La **razón** entre dos números r y s es r:s, y es equivalente a la fracción $\frac{r}{s}$. Como ocurre con una fracción, una razón puede reducirse a su mínima expresión. Por ejemplo: 6:12 es equivalente a 1:2 (dividiendo ambos números de la razón por 6).

Cuando se escribe una razón reducida a su mínima expresión, ambos números de la razón deben ser enteros positivos.

En una **razón unitaria**, uno de los dos números es 1.

Por ejemplo 1:4,5 o 25:1.

Cuando se escribe una razón unitaria, se pueden usar decimales.

Si dos cantidades a y b son **proporcionales**, entonces la razón a:b es constante.

También se escribe $a \propto b$ (a es proporcional a b).

Ejemplo 16

Se vendieron 200 entradas para el baile del colegio. Los niños compraron 75 y las niñas compraron el resto. Escriba la razón de niños a niñas en el baile. Dé la respuesta reducida a su mínima expresión.

Respuesta

El número de niñas es $200 - 75 = 125$.
La razón de niños a niñas es 75:125 = 3:5.

Hay que dar siempre la razón reducida a su expresión mínima.

Las escalas de los mapas se escriben generalmente como una razón. Una escala de 1:50 000 significa que 1 cm en el mapa representa 50 000 cm (0,5 km) en la tierra.

Ejemplo 17

Un viejo mapa inglés fue hecho con una escala de 1 pulgada a 1 milla. Escriba esta escala en forma de razón.

Respuesta	
1 milla = 1760 × 3 × 12 = 63 360 pulgadas La razón utilizada en el mapa es 1:63 360.	*Siempre hay que asegurarse de que las unidades usadas en las razones sean las mismas.*

12 pulgadas = 1 pie
3 pies = 1 yarda
1760 yardas = 1 milla

Ejemplo 18

Tres niños de edades 8, 12 y 15 ganaron un premio de USD140. Decidieron compartir el dinero del premio según la razón de sus edades. ¿Cuánto recibe cada uno?

Respuesta	
USD140 se divide según la razón 8:12:15. Esto es un total de 8 + 12 + 15 = 35 partes. 140 ÷ 35 = 4 dólares 8 × 4 = 32, 12 × 4 = 48 y 15 × 4 = 60 Los niños reciben USD32, USD48 y USD60.	*Dividir el dinero en 35 partes. Una parte es USD4.*

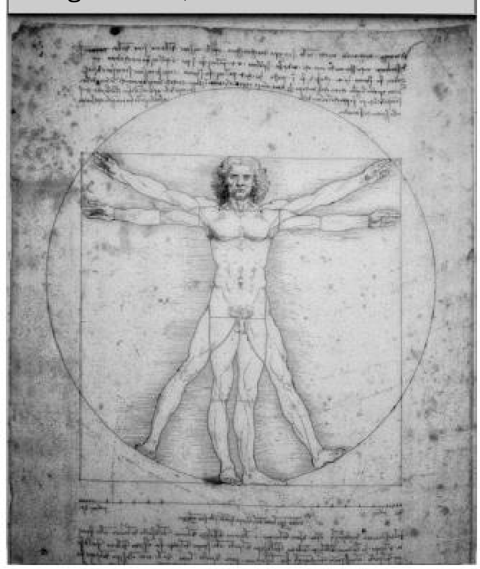
Ejercitación 1G

1 La relación de aspecto (o razón de aspecto) es la razón del ancho de una imagen a su altura. Una fotografía mide 17,5 cm de ancho y 14 cm de altura. ¿Cuál es la relación de aspecto, reducida a su expresión mínima?

2 La razón de sexo se expresa como la razón de hombres a mujeres, en la forma n:100. Según los datos, en el año 2008, la razón de sexo del mundo era 102:100. En el mismo año, en Japón, había 62 millones de hombres y 65,2 millones de mujeres. ¿Cuál era entonces la razón de sexo en Japón?

3 Raquel faltó al colegio un total de 21 días durante un año escolar de 32 semanas. ¿Cuál es la razón del número de días que faltó al número de días que pudo haber asistido al colegio, reducida a su mínima expresión? (Una semana escolar tiene cinco días.)

Leonardo Da Vinci dibujó el famoso *Hombre de Vitruvio* alrededor de 1487. El dibujo está basado en las proporciones humanas ideales descritas por el arquitecto de la antigua Roma, Vitruvio.



4 Un modelo de un avión tiene una envergadura de 15,6 cm. El modelo se construye con una escala de 1:72. ¿Cuál es la envergadura, en metros, de un avión en tamaño real?

5 En un mapa, una ruta mide 1,5 cm. La ruta real mide 3 km. ¿Cuál es la escala del mapa? ¿Cuál sería, en el mapa, la longitud de un camino de 800 m?

6 Se realiza una recaudación conjunta para dos organizaciones de beneficencia, una para animales y otra para niños enfermos, y se acuerda que las ganancias deben ser divididas según la razón 5:3. Se recaudan USD72. ¿Cuánto dinero se dona a cada una de las dos organizaciones?

7 Para una feria de tortas, un grupo de alumnos decide hacer *brownies*, galletas de chocolate y galletas de avena, según la razón 5:3:2. Planean hacer 150 unidades en total. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben hacer?

1.7 El método de reducción a la unidad

En el método de reducción a la unidad, se comienza por hallar el valor de **una** parte o un elemento.

Ejemplo 19

Una carretilla está llena de concreto, que se forma mezclando 6 palas de grava, 4 palas de arena, 2 palas de cemento y el agua necesaria. Cuando quedan solamente 3 palas de arena, ¿cuánto de cada uno de los demás ingredientes hará falta para formar el concreto?

Respuesta

La razón grava:arena:cemento

es 6:4:2

O bien $\frac{6}{4}:\frac{4}{4}:\frac{2}{4}$

$=\frac{3}{2}:1:\frac{1}{2}=\frac{9}{2}:3:\frac{3}{2}$

Por lo tanto, la mezcla requiere $4\frac{1}{2}$ palas de grava, 3 palas de arena y $1\frac{1}{2}$ palas de cemento.

Dado que el valor que necesitamos cambiar es el de la arena, hay que dividir por 4 para convertir dicho valor en 1. Luego, multiplicar todos los valores por 3, para que la cantidad de arena sea igual a 3.

Ejercitación 1H

1 Nicolás, Julián y Rosana invirtieron USD5000, USD7000 y USD4000 para poner en marcha una compañía. Durante el primer año, tienen una ganancia de USD24 000, que comparten según la razón del dinero que invirtieron. ¿Cuánto dinero recibe cada uno?

2 Claudia está haciendo una prueba de Matemáticas. Se da cuenta de que hay 3 preguntas que valen 12, 18 y 20 puntos. La prueba dura 1 hora con 15 minutos. Decide dividir el tiempo entre las tres preguntas según la razón que forman los puntos asignados. ¿Cuánto tiempo utiliza en cada pregunta?

1.8 Conjuntos de números

A lo largo de todo el curso estaremos trabajando con **números reales**. Hay dos tipos de números reales: los números racionales y los números irracionales.

> ➔ Los **números racionales** son números que pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son ambos enteros, y $b \neq 0$.

$\frac{2}{5}$; $-\frac{17}{8}$; 0,41; $1,\dot{3}$; y 9 son números racionales.

$\frac{2}{5}$ y $-\frac{17}{8}$ están escritos en la forma $\frac{a}{b}$.

0,41 puede escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, porque $0,41 = \frac{41}{100}$.

$1,\dot{3}$ puede escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, porque $1,\dot{3} = \frac{4}{3}$.

9 puede escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, porque $9 = \frac{9}{1}$.

> Los decimales exactos o periódicos pueden escribirse como fracción, por lo tanto, son números racionales.

Dentro del conjunto de los números racionales está el conjunto de los llamados **números naturales** (0, 1, 2, 3, ...) y el de los **números enteros** (–4, –3, –1, 0, 1, 2, 3, ...).

$\mathbb{R}$ representa el conjunto de los números reales, $\mathbb{Q}$ los números racionales, $\mathbb{N}$ los números naturales, y $\mathbb{Z}$ los números enteros.

> ➔ Los **números irracionales** son números reales que pueden escribirse como decimales que nunca terminan ni se repiten.

$\sqrt{3}$, π, e, y $\sqrt{117}$ son números irracionales.

$\sqrt{3} = 1,7320508...$ $\qquad$ $\pi = 3,14159265...$

$e = 2,7182818...$ $\qquad$ $\sqrt{117} = 10,8166538...$

Ejemplo 20

Clasifique cada uno de estos números reales en racional o irracional.

$0,75;\ -2;\ \sqrt{37};\ \sqrt{25};\ 0;\ \dfrac{2\pi}{3}$

Respuesta	
0,75 es un número racional. –2 es un número racional.	*0,75 puede escribirse en la forma $\frac{3}{4}$, y –2 puede escribirse como $-\frac{2}{1}$.*
$\sqrt{37}$ es un número irracional.	*$\sqrt{37}$ = 6,08276… Este decimal no se repite ni termina.*
$\sqrt{25}$ es un número racional. 0 es un número racional.	*$\sqrt{25}$ es un número racional, dado que es igual a 5.*
$\frac{2\pi}{3}$ es un número irracional.	*Aunque esté escrito en forma de fracción, $\frac{2\pi}{3}$ no es un número racional. Los múltiplos de π son irracionales.*

Ejemplo 21

Escriba el número racional $0,8\dot{3}$ en la forma $\dfrac{a}{b}$.

Respuesta	
Sea $x = 0,8\dot{3}$. $100x = 83,\dot{3}$; y $10x = 8,\dot{3}$.	*Multiplicar por potencias de 10 para cambiar la posición del punto decimal*
$100x - 10x = 83,\dot{3} - 8,\dot{3}$ $90x = 75$ $x = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$	*Restando estos valores se cancela el período 3.*

Ejercitación 1I

1 Clasifique cada uno de estos números reales en racional o irracional

a 83 **b** $\frac{4}{9}$ **c** $\frac{2\pi}{3}$ **d** –0,96

e $-0,\dot{4}\dot{5}$ **f** e^5 **g** $-4\sqrt{81}$ **h** $\frac{\sqrt{5}}{7}$

i $1,24\dot{7}$ **j** $\sqrt{18}$

2 Indique los números de la pregunta 1 que son:

a Números enteros

b Números naturales

3 Escriba cada número racional de la pregunta 1 en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

Propiedades de los números reales

En la aritmética de los números reales se usan tres propiedades importantes.

Propiedad conmutativa

➔ Cuando se suman o se multiplican dos o más números, el orden no importa.

Por ejemplo:

- $a + b = b + a$
- $15 + 7 = 7 + 15$
- $xy = yx$
- $3(8) = 8(3)$

Propiedad asociativa

➔ Cuando se suman o se multiplican tres o más números, se los puede agrupar de distintas formas para los cálculos, sin cambiar el orden.

Por ejemplo:

- $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$
- $5+9+16=(5+9)+16=5+(9+16)$
- $xyz=(xy)z=x(yz)$
- $6 \times 4 \times 10=(6 \times 4) \times 10=6 \times (4 \times 10)$

Propiedad distributiva

➔ $a(b+c)=ab+ac$ y $a(b-c)=ab-ac$.

1.9 Redondeo y estimación

Para redondear a un número dado de **cifras decimales**:

- Observar la siguiente cifra decimal
- Si esta cifra es menor que 5, redondear hacia abajo
- Si esta cifra es 5 o más, redondear hacia arriba

Estas propiedades parecen responder al sentido común, pero es importante reflexionar sobre cuándo se las puede aplicar y cuándo no.

La adición y la multiplicación son conmutativas. La sustracción y la división no lo son.

La propiedad conmutativa y la asociativa no son válidas para la sustracción.

- $20 - 7 \neq 7 - 20$
- $(18 - 9) - 3 \neq 18 - (9 - 3)$

Use PEMDAS: calcule primero el valor dentro del paréntesis.

La usamos cuando desarrollamos paréntesis en álgebra o cuando simplificamos multiplicaciones. Por ejemplo, $5 \times 32 = (5 \times 30) + (5 \times 2)$

En las preguntas de examen se puede pedir que se dé la respuesta con una aproximación de dos cifras decimales, por ejemplo.

Para redondear a un número dado de **cifras significativas**:

- Leer el número, de izquierda a derecha, sin considerar el punto decimal.
- La primera cifra significativa es el primer dígito distinto de 0, la segunda cifra significativa es el siguiente dígito (que puede o no ser 0), y así sucesivamente.

3	5	,	2	7	1
1.ª cs	2.ª cs		3.ª cs	4.ª cs	5.ª cs

0	,	5	3	9
		1.ª cs	2.ª cs	3.ª cs

En los exámenes del IB, a menos que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.

Ejemplo 22

Escriba el número 8,0426579 con una aproximación de:

a 2 cifras decimales **b** 1 cifra significativa **c** 1 cifra decimal
d 4 cifras decimales **e** 6 cifras significativas

Respuestas	
a 8,04	*8,04**2** el siguiente dígito es menor que 5 por lo tanto redondear hacia abajo*
b 8	*8,**0** el siguiente dígito es menor que 5 por lo tanto redondear hacia abajo*
c 8,0	*8,0**4** el siguiente dígito es menor que 5 por lo tanto redondear hacia abajo*
d 8,0427	*8,0426**5** el siguiente dígito es 5 por lo tanto redondear hacia arriba*
e 8,04266	*8,04265**7** el siguiente dígito es mayor que 5 por lo tanto redondear hacia arriba*

Cuando una pregunta pide determinado número de cifras decimales, se debe escribir esa cantidad de cifras incluso si algunos de los valores son cero.

Ejemplo 23

Escriba el número 42536 con una aproximación de 3 cifras significativas.

Respuestas	
42500	*425**3**6 el siguiente dígito (3) es menor que 5 por lo tanto redondear hacia abajo Reemplazar todos los dígitos antes de la coma decimal por ceros.*

Estimación

Para **estimar** el resultado de un cálculo, se deben escribir todos los números con una aproximación de una cifra significativa.

Por ejemplo, para estimar el valor de $197{,}2 \div 3{,}97$, se calcula $200 \div 4 = 50$.

Estimar una respuesta antes de resolverla con cálculos puede dar una idea de la respuesta que se podrá obtener. Si el resultado de la CPG es diferente de la estimación, entonces se puede verificar si se han ingresado los valores correctamente.

Ejercitación 1J

1 Escriba cada número a la unidad indicada entre paréntesis más cercana.

a 2177 (decena) **b** 439 (centena) **c** 3532 (millar)
d 20,73 (unidad) **e** 12,58 (unidad)

2 Escriba cada número con una aproximación del número de cifras decimales indicado entre paréntesis.

a 0,6942 (2) **b** 28,75 (1) **c** 0,9999(2)

d 77,984561 (3) **e** 0,05876 (2)

3 Escriba cada número de la pregunta 1 con una aproximación de dos cifras significativas.

4 Escriba cada número de la pregunta 2 con una aproximación de tres cifras significativas.

5 Escriba cada fracción como un decimal con una aproximación de tres cifras significativas.

a $\frac{2}{3}$ **b** $\frac{3}{46}$ **c** $\frac{5}{13}$

Se puede utilizar la CPG para convertir cada fracción a decimal.

6 Escriba una estimación para el valor de los siguientes cálculos:

a $54{,}04 \div 9{,}89$ **b** $\frac{2{,}8 \times 3{,}79}{1{,}84}$ **c** $\frac{7{,}08 - 0{,}7556}{(8{,}67)^2}$

7 Use su CPG para evaluar cada apartado de la pregunta 6 con una aproximación de tres cifras significativas.

1.10 Notación científica

Los números muy grandes y los muy pequeños pueden escribirse en notación científica como:

$A \times 10^n$ donde n es un entero y $1 \leq A < 10$

- Primero se escribe el número con la coma decimal corrida de lugar, de modo tal de obtener un número comprendido entre 1 y 10.
- Luego se calcula el valor del exponente, n, el número de posiciones que se han movido los dígitos.

Por ejemplo, 37300 es $3{,}73 \times 10^4$ en notación científica.

Ejemplo 24

Escriba en notación científica: **a** 89 445 **b** 0,000 000 065

Respuestas	
a $89\,445 = 8{,}9445 \times 10^4$	*Escribir 89 445 como $8{,}9445 \times 10^n$* *Los dígitos se movieron 4 lugares a la derecha, por lo tanto $n = 4$.*
b $0{,}000\,000\,065 = 6{,}5 \times 10^{-8}$	*Escribir $6{,}5 \times 10^n$* *Los dígitos se movieron 8 lugares hacia la izquierda, por lo tanto $n = -8$.*

Ejercitación 1K

1 Escriba estos números en notación científica:

a 1475 **b** 231000

c 2,8 billones **d** $0{,}35 \times 10^6$

e $73{,}5 \times 10^5$

1 billón = 1 millón de millones

2 Escriba estos números en la forma usual:

a $6{,}25 \times 10^4$ **b** $4{,}2 \times 10^8$

c $3{,}554 \times 10^2$

3 Escriba en notación científica:

a 0,0001232 **b** 0,00004515

c 0,617 **d** $0{,}75 \times 10^{-5}$

e $34{,}9 \times 10^{-5}$

4 Escriba estos números en la forma usual:

a $3{,}5 \times 10^{-7}$ **b** $8{,}9 \times 10^{-8}$

c $1{,}253 \times 10^{-2}$

5 La luz recorre aproximadamente 3×10^5 metros por segundo. Halle el tiempo que le lleva recorrer 1 metro. Dé su respuesta en notación científica.

1.11 Conjuntos

Un **conjunto** es un grupo de objetos. Generalmente usamos una letra mayúscula para nombrar un conjunto, y las llaves{ } para encerrar los elementos del conjunto. Por ejemplo, si P es el conjunto de todos los números primos menores que 20, entonces
P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}.
Cada objeto del conjunto se llama **elemento** del conjunto.

- El símbolo $\in$ significa "es un elemento de". Por ejemplo, $3 \in$ P significa "3 es un elemento del conjunto P" o "3 pertenece al conjunto P".
- El símbolo $\notin$ significa "no es un elemento de". Por ejemplo, $8 \notin$ P significa "8 no es un elemento del conjunto P" u "8 no pertenece al conjunto P".

Usamos una letra cursiva minúscula *n* para denotar el número de elementos de un conjunto. El conjunto P tiene 8 elementos, por lo tanto *n*(P) = 8.

Si el número de elementos de un conjunto es cero, el conjunto es el **conjunto vacío**, o *conjunto nulo*. Representamos al conjunto vacío con llaves vacías, { }, o con el símbolo $\varnothing$.

Un conjunto que contiene todos los elementos pertinentes se llama **conjunto universal**, y se lo denota con la letra U. En algunos casos, el conjunto universal se da por conocido. Por ejemplo, un conjunto universal muy común es "todos los números reales".

El conjunto universal puede considerarse también como el *conjunto referencial*.

Definición de conjuntos por comprensión

Para caracterizar completamente a un conjunto, se puede usar esta notación:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 10 < x < 15\}$$

A es el conjunto de todos los valores de *x*

tales que *x* es un entero

mayor que 10 y menor que 15.

Los elementos de este conjunto son $A = \{11, 12, 13, 14\}$.

Ejemplo 25

Escriba los elementos de cada conjunto y dé el número de elementos de cada uno.

a B, el conjunto de todos los múltiplos de 5 menores que 30

b $T = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \geq 7\}$

Respuestas

a $B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

$n(B) = 5$

b $T = \{7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$

Este conjunto es ***infinito****, lo que significa que continúa indefinidamente. No podemos contar el número de elementos del conjunto.*

Podemos usar puntos suspensivos para indicar que los elementos continúan.

Ejercitación 1L

1 Enumere todos los elementos en cada conjunto.

a A, el conjunto de todos los divisores de 72

b B, el conjunto de todos los divisores primos de 72

c C, el conjunto de todos los números primos pares

d D, el conjunto de todos los números pares múltiplos de 7

e $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 4\}$

f $F = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \geq 20\}$

g G, el conjunto de todos los números primos que son múltiplos de 4

2 Indique el número de elementos de cada uno de los conjuntos de la pregunta 1.

Subconjuntos, intersecciones y uniones

➔ Decimos que un conjunto B es un **subconjunto** del conjunto A si todos los elementos del conjunto B son también elementos del conjunto A.

El símbolo $\subseteq$ significa "es un subconjunto de".

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$.

Dado que B es un subconjunto de A, escribimos $B \subseteq A$.

Hay muchos otros subconjuntos de A, tales como $\{1, 3, 5, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{4\}$, e incluso el conjunto vacío $\{\}$, además del conjunto mismo, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, dado que todos los números enteros pertenecen al conjunto de los números reales.

➔ Un conjunto C es un **subconjunto propio** del conjunto A si C es un subconjunto de A pero tiene menos elementos que A.

Por ejemplo, $C = \{2, 5\}$ es un subconjunto propio del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Escribimos esto $C \subset A$.

El símbolo $\subset$ significa "es un subconjunto propio de".

➔ Dos conjuntos que comparten elementos tienen una **intersección**. Usamos el símbolo $\cap$ para representar la intersección entre dos conjuntos.

Por ejemplo, sean $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ambos conjuntos contienen los elementos 2 y 4, por lo tanto $D \cap E = \{2, 4\}$.

2 y 4 son los únicos elementos que tienen en común.

➔ La **unión** de dos conjuntos es el conjunto de todos los elementos de ambos conjuntos. Usamos el símbolo $\cup$ para representar la unión de dos conjuntos.

Por ejemplo, si $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la unión de estos conjuntos es $D \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

Los números que aparecen en ambos conjuntos se deben incluir solo una vez.

Ejemplo 26

Sean A = {los números impares menores que 16} y $B = \{x \mid x \text{ es un divisor de } 15\}$.

a Enumere los elementos de cada conjunto.
b ¿Es B un subconjunto de A? Explique.
c Dé la intersección y la unión de los conjuntos A y B.

Respuestas

a $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ $B = \{1, 3, 5, 15\}$	*Se podría escribir $B \subseteq A$.*
b Sí, B es un subconjunto de A. Todos los elementos de B son elementos de A. Se podría escribir $B \subseteq A$.	*B es también un subconjunto propio de A.* *Se podría escribir $B \subset A$.*
c $A \cap B = \{1, 3, 5, 15\}$	*Estos números pertenecen a ambos conjuntos.*
$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$	*Este conjunto incluye todos los elementos de A y todos los elementos de B, solo una vez.*

Hay dos tipos de conjuntos que no tienen intersección.

➔ Los conjuntos **disjuntos** no tienen elementos en común.

Por ejemplo, si $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$, A y B son conjuntos disjuntos. Escribimos $A \cap B = \{\}$ o $A \cap B = \varnothing$.

➔ Los conjuntos son **complementarios** si no tienen elementos en común, y entre los dos contienen todos los elementos de U.

Por ejemplo, sean U = {todos los números enteros positivos} y A = { 2, 4, 6, 8, 10, ...}.

El complemento de A es el conjunto {1, 3, 5, 7, 9, ...}.

Escribimos A′ = {1, 3, 5, 7, 9, ...}. Juntos, A y A′ contienen todos los números enteros positivos, pero no tienen elementos en común.

El complemento del conjunto A se escribe A′, que se lee "A prima".

Ejemplo 27

Sean U = {múltiplos de 5} y M = {10, 20, 30, ...}.
¿Cuál es el complemento de M?

Respuesta M′ = { 5, 15, 25, ...}	*Dado que M contiene todos los números pares múltiplos de 5, M′ debe contener todos los múltiplos impares de 5. Juntos, $M \cup M' = U$.*

Ejercitación 1M

1 Sean A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y sea B = {4, 5}.
- **a** ¿Es B un subconjunto de A? Explique
- **b** ¿Son los conjuntos A y B disjuntos? Explique.
- **c** Enumere los elementos de la intersección de los conjuntos A y B.
- **d** Enumere los elementos de la unión de los conjuntos A y B.

2 Sean A = {x | x es divisor de 36} y B = {x | x es divisor de 15}.
- **a** Enumere los elementos de cada conjunto.
- **b** ¿Es B un subconjunto de A? Explique.
- **c** ¿Son los conjuntos A y B disjuntos? Explique.
- **d** Enumere los elementos de la intersección de los conjuntos A y B.
- **e** Enumere los elementos de la unión de los conjuntos A y B.

3 Sean A = {x | $x \in \mathbb{Z}$, $x > 16$} y B = {x | x es múltiplo de 20}.
- **a** Enumere los elementos de cada conjunto.
- **b** ¿Es B un subconjunto de A? Explique.
- **c** ¿Son los conjuntos A y B disjuntos? Explique.
- **d** Enumere los elementos de la intersección de los conjuntos A y B.
- **e** Enumere los elementos de la unión de los conjuntos A y B.

4 Sean U = {números enteros positivos} y D = { x | x es un múltiplo de 3}. Enumere los elementos del complemento de D.

5 Sean U = {múltiplos de 10} y B = {10, 20, 30}. Enumere los elementos de B′.

6 Dé dos conjuntos A y B tales que:

a $A \cap B = \{\}$

b $A \cap B = \{4, 7, 10\}$

c $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

d $n(A \cap B) = 2$

e $n(A \cup B) = 8$

f $n(A \cup B) = 7$ y $n(A \cap B) = 3$

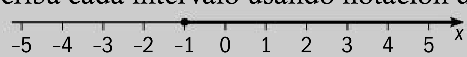
g $B \subseteq A$ y $n(A \cap B) = 3$

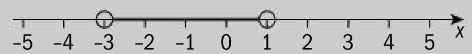
Conjuntos relacionados con rectas numéricas e inecuaciones

Los subconjuntos del conjunto de los números reales se pueden representar como intervalos en una **recta numérica**. Estos intervalos pueden también expresarse usando notación de conjuntos e inecuaciones.

Ejemplo 28

Escriba cada intervalo usando notación de conjuntos e inecuaciones.

a 

b 

a $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$

Los números mayores que −1 están resaltados en la recta numérica. El punto lleno en −1 nos dice que −1 pertenece al conjunto.

b $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x < 1\}$

Los números entre −3 y 1 están resaltados en la recta numérica. Los puntos huecos en −3 y 1 nos dicen que −3 y 1 no pertenecen al conjunto.

Ejemplo 29

Resalte la recta numérica para indicar el intervalo de números reales definido por el conjunto.

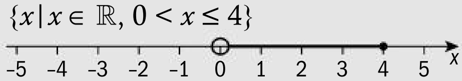
a $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 2\}$ **b** $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 4\}$

Respuestas

a $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 2\}$

2 no pertenece al conjunto, por lo tanto usamos un punto hueco.

b $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 4\}$

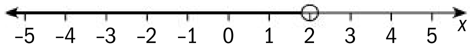


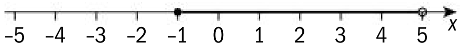
Dibujar un segmento entre 0 y 4. 0 no pertenece al conjunto, por lo tanto usamos un punto hueco.

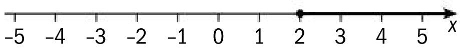
4 pertenece al conjunto, por lo tanto usamos un punto lleno.

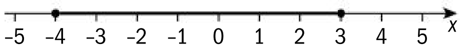
Ejercitación 1N

1 Escriba cada intervalo usando inecuaciones:

a 

b 

c 

d 

2 Resalte la recta numérica para indicar el intervalo de números reales definido por el conjunto.

a $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ **b** $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 2\}$

c $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -1\}$ **d** $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -5 < x < 1\}$

Correspondencias

Las **relaciones** matemáticas entre dos conjuntos pueden mostrarse de maneras diferentes.

Ejemplo 30

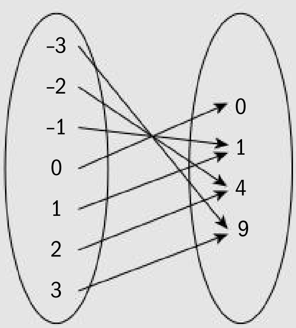
A cada elemento de $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x < 4\}$ se le hace corresponder su cuadrado. Exprese esta relación como:

a Un diagrama de la aplicación **b** Una tabla

c Un conjunto de pares ordenados **d** Un gráfico

Respuestas

a Partida Llegada



Escribir los números enteros –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3 en el conjunto de partida. Escribir los cuadrados de estos valores, 0, 1, 4 y 9, en el conjunto de llegada.

Trazar flechas entre los valores del conjunto de partida y los valores del conjunto de llegada

b

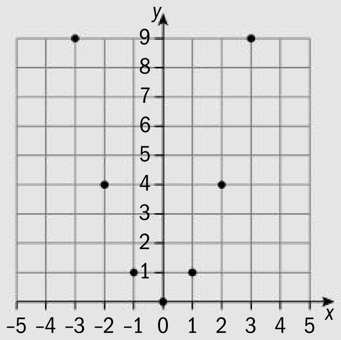
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Usar la variable x para el conjunto de partida y la variable y para el conjunto de llegada

c $\{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

Escribir cada elemento del conjunto de partida como primera componente del par ordenado y el valor correspondiente del conjunto de llegada como segunda componente del par

▶ Continúa en la página siguiente.

d 	*Representar cada valor del conjunto de partida en el eje x y cada valor del conjunto de llegada en el eje y*

Ejercitación 10

Exprese cada relación como:

- **a** Un diagrama de la aplicación
- **b** Una tabla
- **c** Un conjunto de pares ordenados
- **d** Un gráfico

1 A cada elemento de $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ se le asigna su duplo.

2 A cada elemento de $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x < 4\}$ se le asigna el valor absoluto del número.

2 Álgebra

2.1 Desarrollo de paréntesis y factorización

La **propiedad distributiva** se usa para desarrollar expresiones y factorizar expresiones.

$$a(b + c) = ab + ac$$

La palabra "álgebra" proviene de un libro escrito por Muhammad Al-Khwarizmi en Bagdad, alrededor del 800 d. C, cuyo título en árabe se transcribe: al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wal-muqābala.

Otras dos propiedades que se usan en álgebra son la **propiedad conmutativa** $ab = ba$ y la **propiedad asociativa** $abc = a(bc)$.

Ejemplo 31

Desarrolle $2y(3x + 5y - z)$.

Respuesta

$$2y(3x + 5y - z) = 2y(3x) + 2y(5y) + 2y(-z)$$
$$= 6xy + 10y^2 - 2yz$$

Ejemplo 32

Factorice $6x^2y - 9xy + 12xz^2$.

Respuesta

$6x^2y - 9xy + 12xz^2 = 3x(2xy - 3y + 4z^2)$

Busque un factor común. Escríbalo fuera de los paréntesis. Halle los términos dentro de los paréntesis, dividiendo cada término por el factor común.

Ejercitación 2A

1 Desarrolle:

a $3x(x - 2)$ **b** $\frac{x}{y}(x^2y - y^2 + x)$ **c** $a(b - 2c) + b(2a + b)$

2 Factorice:

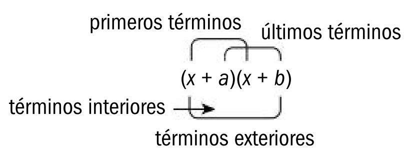
a $3pq - 6p^2q^3r$ **b** $12ac^2 + 15bc - 3c^2$ **c** $2a^2bc + 3ab^2c - 5abc^2$

Productos que dan lugar a expresiones cuadráticas

El producto de dos **binomios**, tales como $x + a$ y $x + b$, da lugar a una **expresión cuadrática**.

$(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$

He aquí un método más corto para hallar el producto de dos binomios.



=términos **p**rimeros + términos **e**xteriores + términos **i**nteriores + términos **ú**ltimos

$= x^2 +$ $bx +$ $ax +$ ab

$= x^2 + (a + b)x + ab$

Podemos crear nuestra propia regla nemotécnica para memorizar el método.

Ejemplo 33

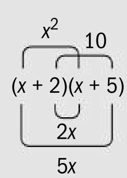
Halle cada producto.

a $(x + 2)(x + 5)$ **b** $(x + 6)(x - 4)$

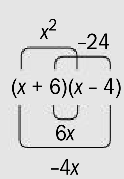
c $(2x - 3)(3x + 1)$

Respuestas

a $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10$
$= x^2 + 7x + 10$

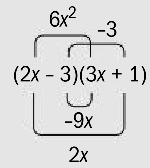


b $(x + 6)(x - 4) = x^2 - 4x + 6x - 24$
$= x^2 + 2x - 24$



▶ Continúa en la página siguiente.

c $(2x-3)(3x+1) = 6x^2 + 2x - 9x - 3$
$= 6x^2 - 7x - 3$



Ejercitación 2B

Halle cada producto y simplifique su respuesta.

1 $(x+7)(x-4)$ **2** $(x-3)(x-2)$ **3** $(3x-4)(x+2)$

4 $(2x-5)(3x+2)$ **5** $(3x+2)(3x+1)$

➔ Considere los siguientes productos especiales.

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x-a)^2 = (x-a)(x-a) = x^2 - ax - ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$
$$(x+a)(x-a) = x^2 - ax + ax + a^2 = x^2 - a^2$$

Al último de estos productos se le llama **diferencia de dos cuadrados**.

Ejemplo 34

Halle cada producto.

a $(x+4)^2$ **b** $(3x-2)^2$

c $(2x+3)(2x-3)$

Respuestas	
a $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$	*Elevar al cuadrado el primer término: $(x)^2 = x^2$. Duplicar el producto de los dos términos: $2(4x) = 8x$. Elevar al cuadrado el segundo término: $(4)^2 = 16$*
b $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$	*Elevar al cuadrado el primer término:$(3x)^2 = 9x^2$ Duplicar el producto de los dos términos: $2(-6x) = -12x$ Elevar al cuadrado el segundo término: $(-2)^2 = 4$*
c $(2x+3)(2x-3) = 4x^2 - 9$	*Elevar al cuadrado el primer término:$(2x)^2 = 4x^2$. Multiplicar los últimos términos: $(+3)(-3) = -9$. Sumar los productos: $4x^2 - 9$*

Ejercitación 2C

Halle cada producto y simplifique su respuesta.

1 $(x+5)^2$ **2** $(x-4)^2$ **3** $(x+2)(x-2)$

4 $(3x-4)^2$ **5** $(2x+5)^2$ **6** $(2x+7)(2x-7)$

Factorización de expresiones cuadráticas

El proceso inverso también es posible: expresar una función cuadrática como el producto de dos expresiones lineales.

$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$

$(x + 6)(x - 4) = x^2 + 2x - 24$

Para factorizar cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c$, donde el coeficiente de x^2 es 1, busque pares de divisores de c cuya suma sea b.

10 es el producto de 2 y 5, y 7 es la suma de 2 y 5.

−24 es el producto de 6 y −4, y 2 es la suma de 6 y −4.

Ejemplo 35

Factorice:

a $x^2 - 15x + 14$
b $x^2 + 5x + 6$
c $x^2 - 5x - 24$

a $x^2 - 15x + 14 = (x - 1)(x - 14)$

Divisores de 14	*Suma de divisores*
1 y 14	15
−1 y −14	−15 ←
2 y 7	9
−2 y −7	−9

b $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

Divisores de 6	*Suma de divisores*
1 y 6	7
−1 y −6	−7
2 y 3	5 ←
−2 y −3	−5

c $x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8)$

Divisores de −24	*Suma de divisores*
1 y −24	−23
−1 y 24	23
2 y −12	−10
−2 y 12	10
3 y −8	−5 ←
−3 y 8	5
4 y −6	−2
−4 y 6	2

Factorización de expresiones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 1$

Para hallar el par de valores correctos, primero podemos probar con factores que den el producto correcto para el primer y el último término, hasta encontrar los que den la suma correcta para el término central.

Ejemplo 36

<table>
<tr><td colspan="2">Factorice:
a $2x^2 + 5x + 3$
b $6x^2 + x - 15$</td></tr>
<tr><td>**Respuestas**
a $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$</td><td>*Factores de $2x^2$: $2x$, x*
Divisores de 3:1, 3; –1, –3
Posibles factores — Términos lineales
$(2x + 1)(x + 3)$ — $6x + 1x = 7x$
$(2x - 1)(x - 3)$ — $-6x - 1x = -7x$
$(2x + 3)(x + 1)$ — $2x + 3x = 5x \leftarrow$
$(2x - 3)(x - 1)$ — $-2x - 3x = -5x$</td></tr>
<tr><td>**b** $6x^2 + x - 15 = (2x - 3)(3x + 5)$</td><td>*Factores de $6x^2$: $6x$, x; $2x$, $3x$*
Divisores de –15: 1, –15; –1, 15; 3, –5; –3, 5
Posibles factores — Términos lineales
$(6x + 1)(x - 15)$ — $-90x + 1x = -89x$
$(6x - 1)(x + 15)$ — $90x - 1x = 89x$
$(6x + 3)(x - 5)$ — $-30x + 3x = -27x$
$(6x - 3)(x + 5)$ — $30x - 3x = 27x$
$(2x + 1)(3x - 15)$ — $-30x + 3x = -27x$
$(2x - 1)(3x + 15)$ — $30x - 3x = 27x$
$(2x + 3)(3x - 5)$ — $-10x + 9x = -x$
$(2x - 3)(3x + 5)$ — $10x - 9x = x \leftarrow$</td></tr>
</table>

Factorización de la diferencia de dos cuadrados

Recordemos que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Ejemplo 37

<table>
<tr><td colspan="2">Factorice:
a $x^2 - 16$
b $9x^2 - 25y^2$</td></tr>
<tr><td>**Respuestas**
a $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$</td><td>*$a^2 = x^2$ por lo tanto $a = x$*
$b^2 = 16$ por lo tanto $b = 4$
Reemplazar los valores en $(a + b)(a - b)$</td></tr>
<tr><td>**b** $9x^2 - 25y^2 = (3x + 5y)(3x - 5y)$</td><td>*$a^2 = 9x^2$ por lo tanto $a = 3x$*
$b^2 = 25y^2$ por lo tanto $b = 5y$
Reemplazar los valores en $(a + b)(a - b)$</td></tr>
</table>

Ejercitación 2D

1 Factorice estas expresiones cuadráticas:

a $x^2 + 11x + 28$ **b** $x^2 - 14x + 13$ **c** $x^2 - x - 20$

d $x^2 + 2x - 8$ **e** $x^2 + 13x + 36$ **f** $x^2 - 7x - 18$

2 Factorice estas expresiones cuadráticas:

a $2x^2 - 9x + 9$ **b** $3x^2 + 7x + 2$ **c** $5x^2 - 17x + 6$

d $4x^2 - x - 3$ **e** $3x^2 - 7x - 6$ **f** $14x^2 - 17x + 5$

3 Factorice estas expresiones cuadráticas:

a $x^2 - 9$ **b** $x^2 - 100$ **c** $4x^2 - 81$

d $25x^2 - 1$ **e** $m^2 - n^2$ **f** $16x^2 - 49y^2$

2.2 Fórmulas

Transformación de fórmulas en otras equivalentes

Ejemplo 38

La fórmula para el área del círculo es $A = \pi r^2$, donde A es el área y r es el radio.
En esta fórmula la variable que está **despejada** es A.
Transforme la expresión en otra equivalente en que esté despejada r.

Respuesta

$A = \pi r^2$	
$r^2 = \frac{A}{\pi}$	*Usar las mismas técnicas que para resolver ecuaciones. Todo lo que se hace en un miembro de la fórmula se debe hacer en el otro.* *Dividir ambos miembros por* π
$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$	*Aplicar raíz cuadrada en ambos miembros*

Se dice que la variable está despejada cuando está sola de un lado del signo =.

Se puede usar esta fórmula para calcular el radio de un círculo cuando se conoce el área.

Ejemplo 39

a La teoría de la relatividad de Einstein da la fórmula $E = mc^2$, donde m es la masa, c es la velocidad de la luz, y E es la energía equivalente de la masa. Transforme la fórmula para despejar m.

b La fórmula para el margen de utilidad bruta es:

$$\text{Margen de utilidad bruta} = \frac{\text{Beneficio bruto}}{\text{Ingresos por ventas}} \times 100.$$

Transforme la fórmula para despejar los ingresos por ventas.

▶ Continúa en la página siguiente.

Respuestas

a $E = mc^2$

$$m = \frac{E}{c^2}$$

b $$\text{Margen de utilidad bruta} = \frac{\text{Beneficio bruto}}{\text{Ingresos por ventas}} \times 100$$

$$\frac{\text{Margen de utilidad bruta}}{100} = \frac{\text{Beneficio bruto}}{\text{Ingresos por ventas}}$$

$$\text{Ingresos por ventas} \times \text{Margen de utilidad bruta} = \text{Beneficio bruto} \times 100$$

$$\text{Ingresos por ventas} = \frac{\text{Beneficio bruto}}{\text{Margen de utilidad bruta}} \times 100$$

Ejercitación 2E

Reescriba las siguientes fórmulas para despejar la variable que se indica con la letra entre paréntesis.

1 $v = u - gt \quad (t)$ **2** $a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad (c)$ **3** $c = 2\pi r \quad (r)$

4 $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \quad (b)$ **5** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (\cos A)$

6 Para cambiar la temperatura de grados Fahrenheit, F, a grados Celsius, C, puede usar la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Reescriba la fórmula para despejar *F*.

7 La razón de liquidez (o "prueba ácida") mide la capacidad inmediata de una empresa de usar sus activos corrientes para cancelar sus pasivos corrientes.
La fórmula está dada por:

$$\text{Razón de liquidez} = \frac{\text{Activos corrientes} - \text{Existencias}}{\text{Pasivos corrientes}}.$$

Reescriba la fórmula para despejar *Existencias*.

Valor numérico de una expresión por sustitución

Cuando usamos la CPG para trabajar con fórmulas, la calculadora puede hacer los cálculos por nosotros. De todas maneras, siempre hay que mostrar el procedimiento.

1. Hallar la fórmula que se va a usar (del cuadernillo de fórmulas, de la pregunta o de la memoria) y escribirla.
2. Identificar los valores que se sustituirán en la fórmula.
3. Escribir la fórmula con las variables ya sustituidas por sus valores correspondientes.
4. Ingresar la fórmula en la calculadora. Usar plantillas para que la fórmula luzca igual en la CPG que como se ve en el papel.
5. Si fuera necesario, usar paréntesis. Siempre es mejor que haya paréntesis de más que de menos.
6. Escribir, con unidades si fuera necesario, el resultado que nos da la calculadora (con el grado de aproximación requerido).

Ejemplo 40

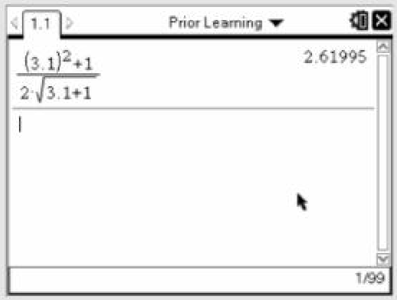
x e y están relacionadas por la fórmula $y = \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x+1}}$.
Halle el valor de y cuando x es 3,1.

Respuesta

$$y = \frac{3{,}1^2+1}{2\sqrt{3{,}1+1}}$$

Escriba la fórmula con 3,1 en lugar de x.

$y = 2{,}62$



Ejercitación 2F

Dé las respuestas a todas las preguntas con una aproximación de tres cifras decimales.

1 Si $a = 2{,}3$; $b = 4{,}1$ y $c = 1{,}7$; halle el valor d donde

$$d = \frac{3a^2+2\sqrt{b}}{ac+b}$$

2 Si $b = 8{,}2$; $c = 7{,}5$ y $A = 27°$, halle el valor a donde

$$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$$

3 Si $u_1 = 10{,}2$; $r = 0{,}75$ y $n = 14$, halle el valor el valor de S, donde

$$S = u_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

2.3 Resolución de ecuaciones lineales

"Resolver una ecuación" significa "hallar el valor de la incógnita" (representada con una letra).

Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente, de manera que la incógnita, por ejemplo x, esté despejada. Al hacerlo, hay que mantener la ecuación "equilibrada", es decir, siempre hay que hacer lo mismo en ambos miembros de la igualdad.

Ejemplo 41

Resuelva la ecuación $3x + 5 = 17$.

Respuesta

$3x + 5 = 17$	
$3x + 5 - 5 = 17 - 5$	*Restar 5*
$3x = 12$	
$\dfrac{3x}{3} = \dfrac{12}{3}$	*Dividir por 3*
$x = 4$	

Sume, reste, multiplique o divida en ambos miembros de la ecuación, hasta que x esté sola, en uno de los dos miembros (el derecho o el izquierdo).

Ejemplo 42

Resuelva la ecuación $4(x - 5) = 8$.	
Respuesta	
$4(x-5) = 8$	
$\frac{4(x-5)}{4} = \frac{8}{4}$	*Dividir por 4*
$x - 5 = 2$	
$x - 5 + 5 = 2 + 5$	*Sumar 5*
$x = 7$	

Siempre hay que ser cuidadoso con el signo "–".

Ejemplo 43

Resuelva la ecuación $7 - 3x = 1$.	
Respuesta	
$7 - 3x = 1$	
$7 - 3x - 7 = 1 - 7$	*Restar 7*
$-3x = -6$	
$\frac{-3x}{-3} = \frac{-6}{-3}$	*Dividir por −3*
$x = 2$	

Un método alternativo para esta ecuación sería comenzar **sumando** 3*x*. De esta forma, *x* tendría un coeficiente positivo, pero en el miembro derecho de la ecuación.

Ejemplo 44

Resuelva la ecuación $3(2 + 3x) = 5(4 - x)$.	
Respuesta	
$3(2 + 3x) = 5(4 - x)$	
$6 + 9x = 20 - 5x$	
$6 + 9x + 5x = 20 - 5x + 5x$	*Sumar 5x*
$6 + 14x = 20$	
$6 + 14x - 6 = 20 - 6$	*Restar 6*
$14x = 14$	
$\frac{14x}{14} = \frac{14}{14}$	*Dividir por 14*
$x = 1$	

Comparar este método con el usado en el ejemplo 42. Algunas veces puede ser más directo comenzar **dividiendo**, en lugar de desarrollar los paréntesis.

Ejercitación 2G

Resuelva estas ecuaciones:

1 $3x - 10 = 2$

2 $\frac{x}{2} + 5 = 7$

3 $5x + 4 = -11$

4 $3(x + 3) = 18$

5 $4(2x - 5) = 20$

6 $\frac{2}{5}(3x - 7) = 8$

7 $21 - 6x = 9$

8 $12 = 2 - 5x$

9 $2(11 - 3x) = 4$

10 $4(3 + x) = 3(9 - 2x)$

11 $2(10 - 2x) = 4(3x + 1)$

12 $\frac{5x+2}{3} = \frac{3x+10}{4}$

2.4 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Hay dos métodos que se pueden usar para resolver **sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas**, llamados "de sustitución" y "de eliminación". Algunas veces también se pueden resolver gráficamente.

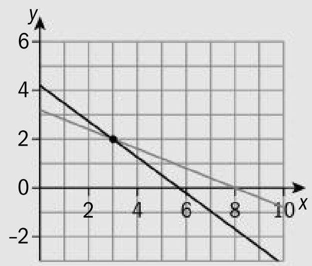
Ejemplo 45

Resuelva el sistema de ecuaciones $3x + 4y = 17$ y $2x + 5y = 16$.

Respuesta

Método gráfico

Desde el punto de vista geométrico, se puede considerar a estas dos ecuaciones lineales como las ecuaciones de dos rectas. Hallar la solución del sistema es equivalente a hallar el punto de intersección de ambas rectas. Las coordenadas del punto nos darán los valores de x y de y.



La solución es $x = 3$, $y = 2$.

Método de sustitución

$3x + 4y = 17$

$2x + 5y = 16$

$5y = 16 - 2x$

$y = \frac{16}{5} - \frac{2}{5}x$

Transformar una de las ecuaciones para despejar y

$3x + 4\left(\frac{16}{5} - \frac{2}{5}x\right) = 17$

Sustituir en la otra ecuación la expresión hallada para y

$3x + \frac{64}{5} - \frac{8}{5}x = 17$

$15x + 64 - 8x = 85$

Resolver la ecuación en x

$15x - 8x = 85 - 64$

$7x = 21$

$x = 3$

$3(3) + 4y = 17$

$9 + 4y = 17$

$4y = 8$

$y = 2$

Sustituir el valor hallado para x en una de las ecuaciones originales y hallar el valor de y

La solución es $x = 3$, $y = 2$.

Método de eliminación

$3x + 4y = 17$ (1)

$2x + 5y = 16$ (2)

Multiplicar la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por 3.

Esto se hace para que los coeficientes de x sean iguales.

$6x + 8y = 34$ (3)

$6x + 15y = 48$ (4)

Restar las ecuaciones. [(4) − (3)]

Al restar se elimina a la variable x de la ecuación.

$7y = 14$

$y = 2$

▶ Continúa en la página siguiente.

$3x + 4(2) = 17$ $3x + 8 = 17$ $3x = 17 - 8$ $3x = 9$ $x = 3$ La solución es $x = 3$, $y = 2$.	*Sustituir el valor hallado para y en una de las ecuaciones originales y resolver en x*

Ejercitación 2H

1 Resuelva estos sistemas de ecuaciones lineales usando el método de sustitución:

a $y = 3x - 2;\ 2x + 3y = 5$ **b** $4x - 3y = 10;\ 2y + 5 = x$
c $2x + 5y = 14;\ 3x + 4y = 7$

2 Resuelva estos sistemas de ecuaciones lineales usando el método de eliminación:

a $2x - 3y = 15;\ 2x + 5y = 7$ **b** $3x + y = 5;\ 4x - y = 9$
c $x + 4y = 6;\ 3x + 2y = -2$ **d** $3x + 2y = 8;\ 2x + 3y = 7$
e $4x - 5y = 17;\ 3x + 2y = 7$

2.5 Expresiones exponenciales

Una multiplicación en la que los factores son iguales se puede escribir como una expresión **exponencial**. Por ejemplo, el cuadrado de un número:

$3 \times 3 = 3^2$ o $5{,}42 \times 5{,}42 = 5{,}42^2$

Si se multiplica un número por sí mismo tres veces, entonces la expresión exponencial es un cubo. Por ejemplo:

$4{,}6 \times 4{,}6 \times 4{,}6 = 4{,}6^3$

Podemos además usar expresiones exponenciales cuando el exponente es un entero más grande. Por ejemplo:

$3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

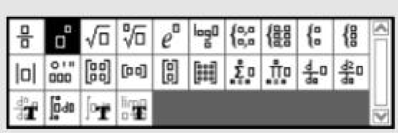
Cuando el exponente no es un entero positivo, se aplican las siguientes reglas:

$a^0 = 1,\ a \neq 0$ $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Otro nombre posible para **exponente** es **índice**.

Usamos cuadrados en el teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, o en la fórmula del área de un círculo, $A = \pi r^2$. Usamos un cubo en la fórmula del volumen de una esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejemplo 46

Escriba los valores de 10^2, 10^3, 10^1, 10^0, 10^{-2}, 10^{-3}.	
Respuesta $10^2 = 10 \times 10 = 100$ $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ $10^1 = 10$ $10^0 = 1$ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$	*Para evaluar una expresión exponencial con la CPG, usar la tecla ^ o la tecla de plantillas y la plantilla de exponente* 

Ejercitación 2I

Realice los siguientes cálculos:

1 **a** $2^3 + 3^2$ **b** $4^2 \times 3^2$ **c** 2^6

2 **a** 5^0 **b** 3^{-2} **c** 2^{-4}

3 **a** $3{,}5^5$ **b** $0{,}495^{-2}$ **c** $2\dfrac{(1-0{,}02)^{10}}{1-0{,}02}$

2.6 Resolución de inecuaciones

Las inecuaciones se pueden resolver en una forma similar a la usada para resolver ecuaciones.

Ejemplo 47

Resuelva las inecuaciones: **a** $2x + 5 < 7$ **b** $3(x - 2) \geq 4$	
Respuestas **a** $2x + 5 < 7$ **b** $3(x - 2) \geq 4$ $2x < 2$ $x - 2 \geq 1\frac{1}{3}$ $x < 1$ $x \geq 3\frac{1}{3}$	*Sumar, restar, multiplicar o dividir en ambos miembros de la inecuación, hasta que x esté sola en uno de los dos miembros*

Debemos tener especial cuidado con los símbolos + y –.

Ejemplo 48

Resuelva la inecuación $7 - 2x \leq 5$.	
Respuesta $7 - 2x \leq 5$ $-2x \leq -2$ $x \geq 1$	 *Restar 7* *Dividir por −2* *Cambiar ≤ por ≥*

Si multiplica o divide una inecuación por un número negativo, el signo en ambos miembros de la inecuación cambiará. La inecuación asimismo se revertirá.

Ejemplo 49

Resuelva la inecuación $19 - 2x > 3 + 6x$.	
Respuesta $19 - 2x > 3 + 6x$ $19 > 3 + 8x$ $16 > 8x$ $2 > x$ $x < 2$	 *Invertir el sentido de la inecuación*

Algunas veces la incógnita, *x*, termina en el lado derecho de la inecuación. En este caso se puede invertir la inecuación, como se muestra en el ejemplo.

Ejercitación 2J

1 Resuelva la inecuación y represente el conjunto solución en la recta numérica.

a $3x + 4 \leq 13$ **b** $5(x - 5) > 15$ **c** $2x + 3 < x + 5$

2 Resuelva en x:

a $2(x - 2) \geq 3(x - 3)$ **b** $4 < 2x + 7$ **c** $7 - 4x \leq 11$

Propiedades de las inecuaciones

➔ Cuando se suma o resta un número real en ambos miembros de una inecuación, el sentido de la inecuación no cambia.

Por ejemplo:

- $4 > 6 \Rightarrow 4 + 2 > 6 + 2$
- $15 \leq 20 \Rightarrow 15 - 6 \leq 20 - 6$
- $x - 7 \geq 8 \Rightarrow x - 7 + 7 \geq 8 + 7$
- $x + 5 < 12 \Rightarrow x + 5 - 5 < 12 - 5$

➔ Cuando se multiplican o dividen ambos miembros de una inecuación por un número real positivo, el sentido de la inecuación no cambia. Cuando se multiplican o dividen ambos miembros de una inecuación por un número real negativo, el sentido de la inecuación se invierte.

Por ejemplo:

- $4 < 5 \Rightarrow 2(4) < 2(5)$
- $6 \leq 10 \Rightarrow -2(6) \geq -2(10)$
- $10 \leq 30 \Rightarrow \frac{10}{5} \leq \frac{30}{5}$
- $18 < 24 \Rightarrow \frac{18}{-3} > \frac{24}{-3}$
- $-12 > -20 \Rightarrow \frac{-12}{4} > \frac{-20}{4}$

2.7 Valor absoluto

El valor absoluto (o módulo) de un número, $|x|$, es la parte numérica del número sin el signo. Puede escribirse como:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 50

Escriba $|a|$, donde $a = -4{,}5$ y $a = 2{,}6$.

Respuesta

Si $a = -4{,}5$, entonces $|a| = 4{,}5$.
Si $a = 2{,}6$, entonces $|a| = 2{,}6$.

Ejemplo 51

Escriba el valor de $|p - q|$, donde $p = 3$ y $q = 6$.

Respuesta

$|p - q| = |3 - 6| = |-3| = 3$

Ejercitación 2K

1 Escriba el valor de $|a|$ cuando a es:

a 3,25 **b** −6,18 **c** 0

2 Escriba el valor de $|5 - x|$, cuando $x = 3$ y cuando $x = 8$.

3 Si $x = 6$ e $y = 4$, escriba los valores de:

a $|x - y|$ **b** $|x - 2y|$ **c** $|y - x|$

2.8 Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones, primero debemos escribirlas con un común denominador.

Ejemplo 52

Combine las siguientes fracciones y simplifique la respuesta.

a $\dfrac{x}{2x+1} + \dfrac{5x+3}{2x+1}$ **b** $\dfrac{2x-3}{4x-5} - \dfrac{6x-2}{4x-5}$

c $\dfrac{3x}{3x-1} + \dfrac{3x+1}{2x+5}$ **d** $\dfrac{5x}{x+3} - \dfrac{2x+1}{2x-1}$

Respuestas

a

$$\frac{x}{2x+1} + \frac{5x+3}{2x+1} = \frac{x+(5x+3)}{2x+1}$$

Mantener los denominadores comunes y sumar los numeradores

$$= \frac{6x+3}{2x+1}$$

Agrupar términos semejantes

$$= \frac{3(2x+1)}{2x+1}$$

Factorizar y simplificar cuando sea posible

$$= 3$$

▶ Continúa en la página siguiente.

b $\dfrac{2x-3}{4x-5}-\dfrac{6x-2}{4x-5}=\dfrac{(2x-3)-(6x-2)}{4x-5}$	*Mantener el denominador común y restar los numeradores*
$=\dfrac{2x-3-6x+2}{4x-5}$	*Asegurarse de distribuir el signo negativo*
$=\dfrac{-4x-1}{4x-5}$	*Agrupar términos semejantes*
c $\dfrac{3x}{3x-1}+\dfrac{3x+1}{2x+5}=\dfrac{3x}{3x-1}\cdot\dfrac{2x+5}{2x+5}+\dfrac{3x+1}{2x+5}\cdot\dfrac{3x-1}{3x-1}$	*Multiplicar cada fracción por 1 para obtener un denominador común*
$=\dfrac{3x(2x+5)}{(3x-1)(2x+5)}+\dfrac{(3x+1)(3x-1)}{(2x+5)(3x-1)}$	
$=\dfrac{(6x^2+15x)}{(3x-1)(2x+5)}+\dfrac{(9x^2-1)}{(3x-1)(2x+5)}$	*Desarrollar los paréntesis*
$=\dfrac{15x^2+15x-1}{(3x-1)(2x+5)}$	*Agrupar términos semejantes*
d $\dfrac{5x}{x+3}-\dfrac{2x+1}{2x-1}=\dfrac{5x}{x+3}\cdot\dfrac{2x-1}{2x-1}-\dfrac{2x+1}{2x-1}\cdot\dfrac{x+3}{x+3}$	*Multiplicar cada fracción por 1 para obtener un denominador común*
$=\dfrac{5x(2x-1)}{(x+3)(2x-1)}-\dfrac{(2x+1)(x+3)}{(2x-1)(x+3)}$	
$=\dfrac{(10x^2-5x)-(2x^2+7x+3)}{(x+3)(2x-1)}$	
$=\dfrac{10x^2-5x-2x^2-7x-3}{(x+3)(2x-1)}$	*Prestar atención a los signos negativos*
$=\dfrac{8x^2-12x-3}{(x+3)(2x-1)}$	*Agrupar términos semejantes*

Ejercitación 2L

Combine las siguientes fracciones y simplifique la respuesta.

1 $\dfrac{2}{x+7}+\dfrac{3x-1}{x+7}$ **2** $\dfrac{4x}{2x+2}-\dfrac{3x-1}{2x+2}$ **3** $\dfrac{3x+9}{3x+4}+\dfrac{3x-1}{3x+4}$ **4** $\dfrac{2x}{x+5}+\dfrac{x+1}{2x-1}$

5 $\dfrac{4}{x}+\dfrac{2x+1}{x+2}$ **6** $\dfrac{2x-1}{x-2}-\dfrac{3x}{4x+3}$ **7** $\dfrac{x+1}{5x+1}+\dfrac{2x}{2x-5}$ **8** $\dfrac{x+5}{x-4}-\dfrac{x-2}{x+2}$

Resolución de ecuaciones con coeficientes racionales

Para resolver ecuaciones con coeficientes racionales, multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

Ejemplo 53

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a $\frac{x}{6}=\frac{5}{4}-\frac{x}{2}$

b $\frac{1}{15}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$

Respuestas

a $\frac{x}{6}=\frac{5}{4}-\frac{x}{2}$

$12\left(\frac{x}{6}\right)=12\left(\frac{5}{4}-\frac{x}{2}\right)$ — *El mcm de 6, 4 y 2 es 12.*

$2x=15-6x$

$8x=15$

$x=\frac{15}{8}$

b $\frac{1}{15}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$

$30x\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{x}\right)=30x\left(\frac{1}{6}\right)$ — *El mcm de 15 y 6 es 30.*

$2x+30=5x$

$-3x=-30$

$x=10$

Ejercitación 2M

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1 $\frac{x}{3}+\frac{1}{6}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$

2 $\frac{1}{k}+\frac{1}{4}=\frac{9}{4k}$

3 $\frac{1}{6}=\frac{5}{6}-\frac{1}{x}$

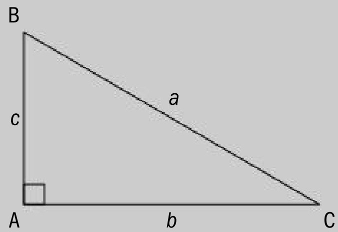
4 $\frac{3}{5}-\frac{2x}{4}=\frac{x-1}{2}$

5 $\frac{3x}{4}+\frac{x+2}{3}=\frac{x-1}{8}$

3 Geometría

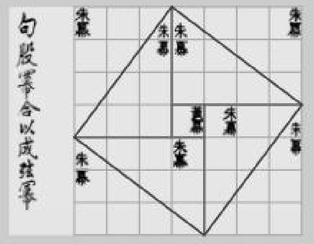
3.1 El teorema de Pitágoras

➔ En un triángulo rectángulo ABC con lados *a*, *b* y *c*, siendo *a* la *hipotenusa*, se verifica:



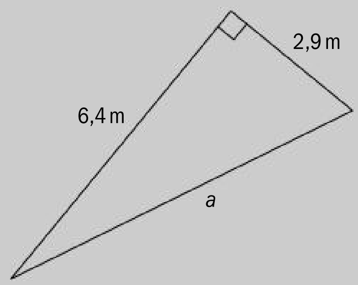
$$a^2 = c^2 + b^2$$

Aunque el teorema lleva el nombre del matemático griego Pitágoras, era conocido cientos de años antes en India, donde figura en los textos Sulba Sutras, y miles de años antes en China, como el teorema de Gougu.



Ejemplo 54

Halle la longitud del lado rotulado *a*.



Respuesta

$a^2 = 6{,}4^2 + 2{,}9^2$

$a = \sqrt{6{,}4^2 + 2{,}9^2}$

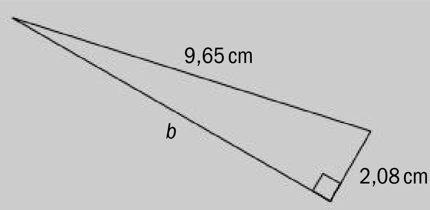
$a = 7{,}03$ cm (3 cs)

El teorema de Pitágoras se puede usar para calcular la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, si se conocen las longitudes de los otros dos lados.

En algunos casos es necesario hallar uno de los catetos.

Ejemplo 55

Halle la longitud del lado rotulado *b*.



Respuesta

$9{,}65^2 = b^2 + 2{,}08^2$

$b^2 = 9{,}65^2 - 2{,}08^2$

$b = \sqrt{9{,}65^2 - 2{,}08^2}$

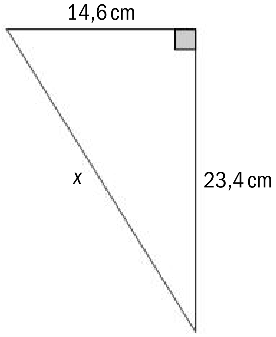
$b = 9{,}42$ cm (3 cs)

Verifique la respuesta, asegurándose de que la hipotenusa sea el lado más largo del triángulo.

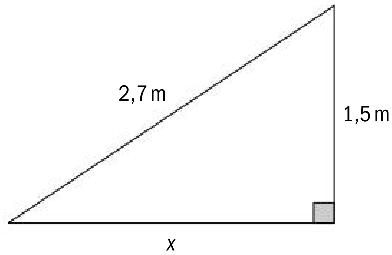
Ejercitación 3A

En cada diagrama, halle la longitud del lado indicado con una *x*.
Dé su respuesta redondeada a tres cifras significativas.

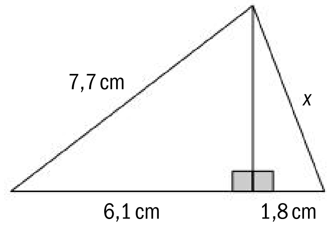
1



2



3



3.2 Transformaciones geométricas

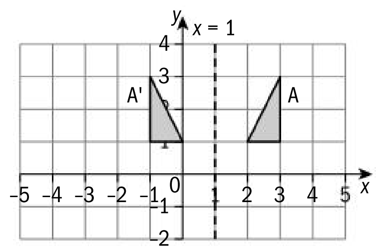
Una transformación puede cambiar tanto la posición como el tamaño de un objeto.

Una transformación determina una aplicación entre un objeto y su imagen. Existen cuatro tipos de transformaciones principales:

- Simetría
- Rotación
- Traslación
- Homotecia

Simetría

Cuando se aplica una simetría respecto de un eje, el objeto y su imagen son **simétricos** respecto del eje de simetría. Cada punto de la imagen está a la misma distancia del eje de simetría que el punto correspondiente en el objeto. Para describir una simetría, debemos indicar la ecuación del eje de simetría.

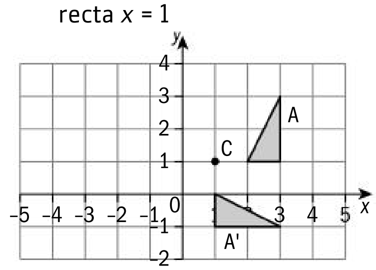


▲ Simetría respecto de la recta $x = 1$

Rotación

Una **rotación** hace que un objeto gire un cierto ángulo alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación, en un sentido determinado.

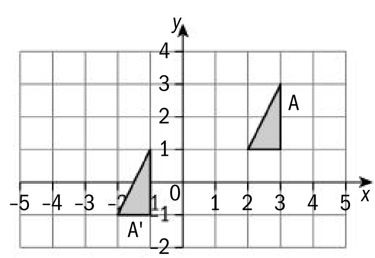
Para describir una rotación, damos las coordenadas del centro de rotación, el sentido y el ángulo de giro.



▲ Rotación de 90° en sentido horario con centro (1, 1)

Traslación

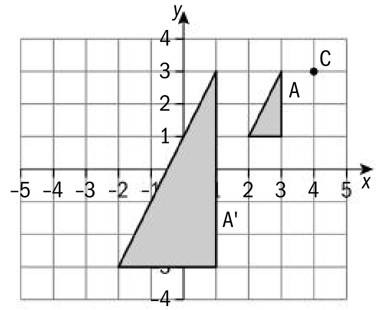
Una **traslación** mueve cada punto una distancia fija, en la misma dirección. Para describir una traslación escribimos el vector columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde x representa el desplazamiento en la dirección del eje x e y el desplazamiento en la dirección del eje y.



▲ Traslación por el vector $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Homotecia

Una homotecia aumenta o disminuye el tamaño de un objeto aplicando una razón determinada.
Para describir una homotecia, damos las coordenadas del centro de la homotecia y la razón.
La imagen después de la homotecia es matemáticamente **semejante** al objeto original.



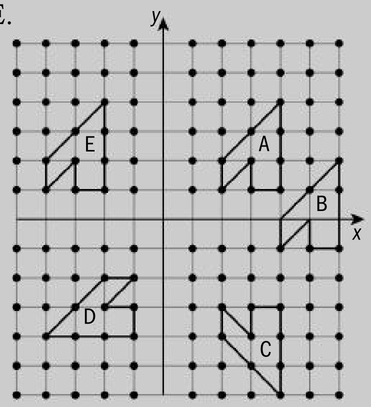
▲ Homotecia de razón 3 con centro (4, 3)

Ejemplo 56

Para mayor información sobre semejanza, véase la página 678.

La grilla contiene cinco figuras de la A a la E.
Describa la transformación única que transforma a:

a A en B
b A en C
c A en D
d A en E
e C en D



Respuestas

a A $\longrightarrow$ B: Traslación; vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b A $\longrightarrow$ C: Simetría; recta $y = -1$

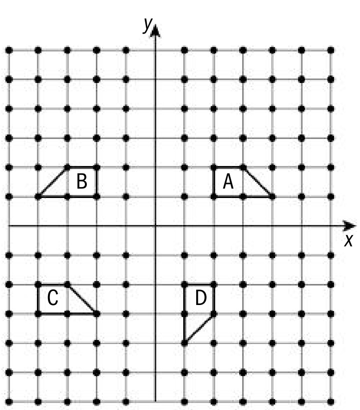
c A $\longrightarrow$ D: Simetría; recta $y = -x$

d A $\longrightarrow$ E: Traslación; vector $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

e C $\longrightarrow$ D: Rotación; centro (1, –1), 90° en sentido horario.

Ejercitación 3B

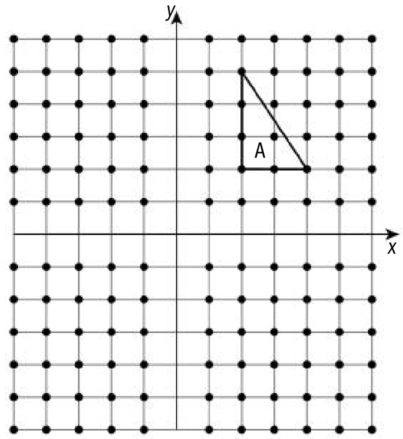
1 La grilla contiene 4 figuras de la A a la D.



Describa la transformación única que transforma a:

a A en B   **b** A en C
c A en D   **d** B en D

2 Copie este diagrama en papel cuadriculado.



a Aplique una simetría a la figura A respecto de la recta $y = -x$. Rotule B a la imagen.

b Aplique una simetría a la figura B respecto del eje x. Rotule C a la imagen.

c Describa completamente la transformación única que transforma a A en C.

3 Dibuje un sistema de ejes coordenados desde –10 hasta 10 en ambos ejes, x e y.

a Dibuje un triángulo con vértices en (2, 1) (4, 1) (4, 4). Rotúlelo A.

b Aplique una simetría a la figura A respecto del eje x. Rotule B a la imagen.

c Aplique una homotecia de razón 2 a la figura B, con centro en (0, 0). Rotule C a la imagen.

d Rote la figura C 180° con centro en (0, 0). Rotule D a la imagen.

e Aplique una simetría a la figura D respecto del eje x. Rotule E a la imagen.

f Rote la figura E 180° con centro (0, 0). Rotule F a la imagen.

Describa la transformación única que transforma a:

g $C \longrightarrow F$ **h** $A \longrightarrow F$

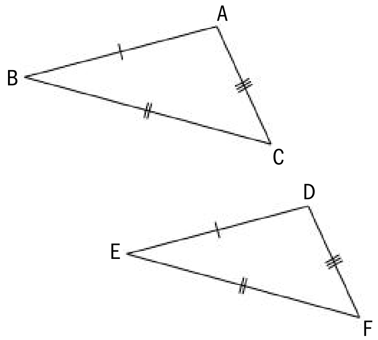
i $E \longrightarrow A$ **j** $C \longrightarrow E$

3.3 Congruencia

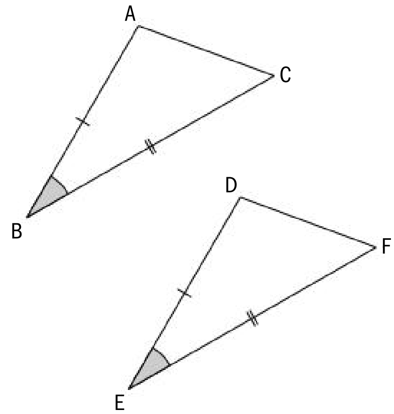
→ Dos figuras que tienen exactamente la misma forma y tamaño son **congruentes**.
En las figuras congruentes:
- Los lados que se corresponden son iguales.
- Los ángulos que se corresponden son iguales.

Las imágenes que resultan después de aplicar rotaciones, simetrías o traslaciones a objetos son congruentes con dichos objetos.
Para demostrar que dos triángulos son congruentes, necesitamos mostrar que satisfacen una de estas cuatro condiciones.

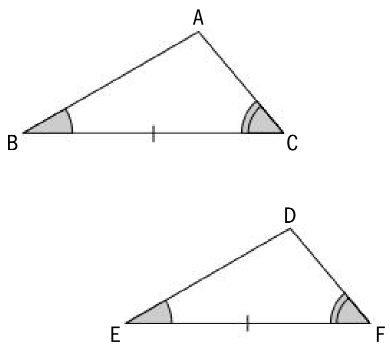
- Los tres lados son congruentes (LLL).



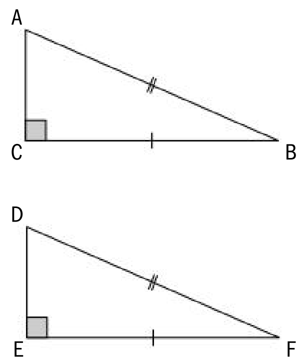
- Dos lados y el ángulo comprendido son congruentes (LAL).



- Dos ángulos y el lado adyacente son congruentes (ALA).



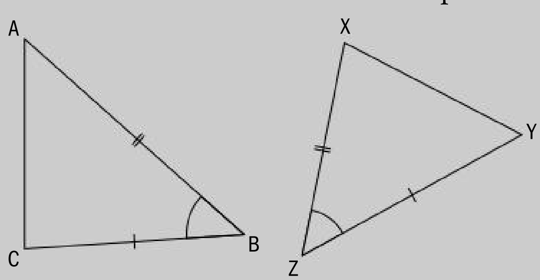
- Triángulos rectángulos con hipotenusa y un cateto congruentes (RHC).



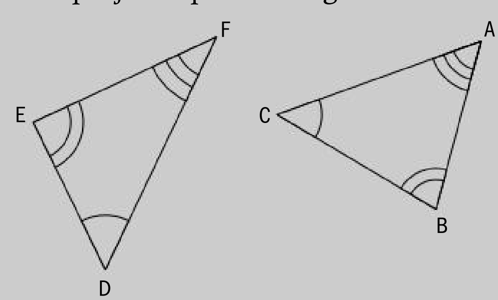
Ejemplo 57

Indique si las figuras de cada par resultan congruentes.
Enumere los vértices en el orden correspondiente y dé razones que justifiquen la congruencia.

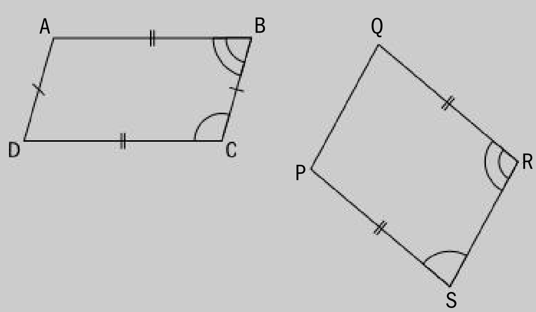
a



b



c



▶ Respuestas en la página siguiente.

Respuestas

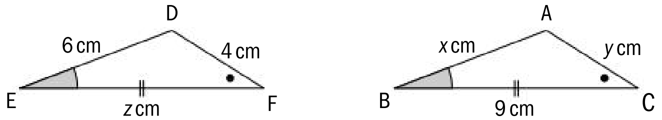
a Sí. ABC = XZY por lo tanto LAL

b No. Solo los ángulos son congruentes; los lados que se corresponden pueden no tener la misma medida.

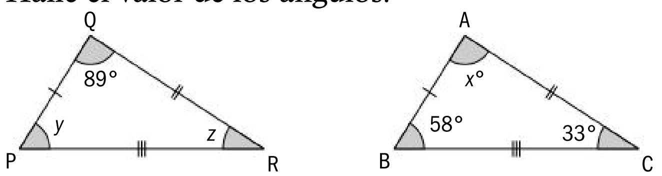
c No. El paralelogramo ABCD no es congruente con QRSP. No está claro si AD = PQ o BC = RS.

Ejercitación 3C

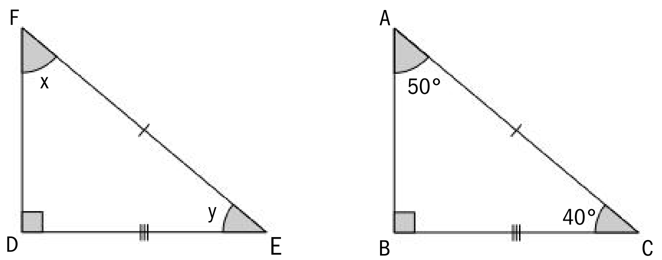
1 Muestre que ΔDEF es congruente con ΔABC. Halle la medida de cada uno de los lados.



2 Justifique brevemente por qué ΔDEF y ΔABC son congruentes. Halle el valor de los ángulos.



3 Demuestre que ΔDEF es congruente con ΔABC. Halle los valores de x e y.



3.4 Semejanza

➔ Dos figuras son **semejantes** si tienen la misma forma. No tienen necesariamente el mismo tamaño, por lo tanto, generalmente una es una homotecia de la otra.

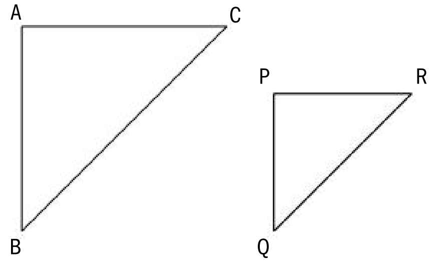
Luego de una homotecia, la imagen siempre es semejante al objeto. Luego de una homotecia, la figura mantiene la amplitud de los ángulos pero cambian todas las medidas de los lados, de acuerdo con la razón.

➔ La razón de una homotecia es el cociente entre

$$\frac{\text{Medida del lado de una de las figuras}}{\text{Medida del lado que le corresponde en la otra figura}}$$

Triángulos semejantes

En los triángulos semejantes, los ángulos que se corresponden son congruentes y los lados que se corresponden son proporcionales.



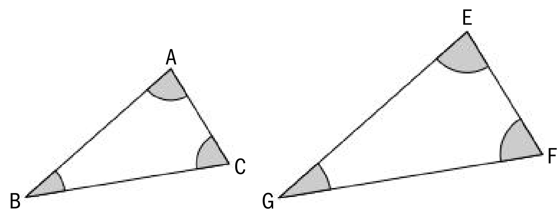
Los triángulos ABC y PQR son semejantes porque:

$$\hat{A} = \hat{P},\ \hat{B} = \hat{Q},\ \hat{C} = \hat{P}$$

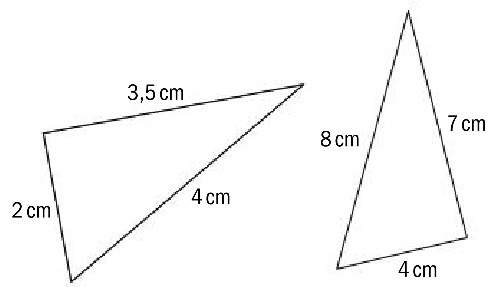
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \text{ razón}$$

Para demostrar que dos triángulos son semejantes, se debe mostrar que es verdadera **una** de las siguientes afirmaciones:

1 ▼ Los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos del otro.

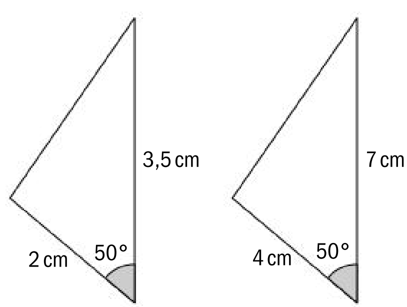


2 ▼ Los lados que se corresponden en los dos triángulos son proporcionales.



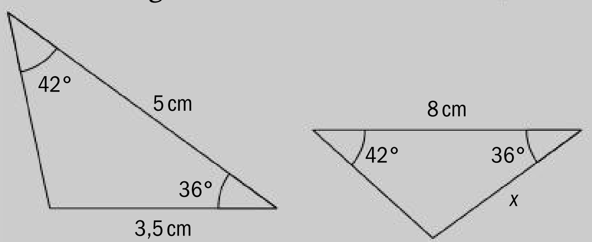
$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{7}{3,5} = 2$$

3 ▼ Existe un par de ángulos congruentes y los lados adyacentes a estos ángulos son proporcionales.



Ejemplo 58

Halle la longitud del lado rotulado con x.



Respuesta

Dos pares de lados son congruentes, por lo tanto el tercer par de lados debe ser congruente. Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

Demostrar la semejanza

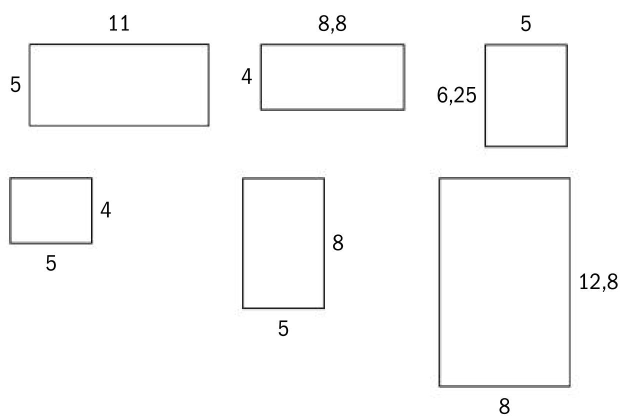
La razón de la homotecia es $\frac{8}{5} = 1{,}6$.

Por lo tanto, $x = 3{,}5 \times 1{,}6 = 5{,}6$ cm.

Ejercitación 3D

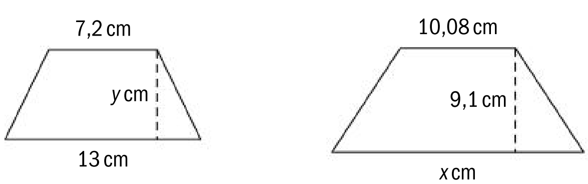
Las figuras de esta ejercitación no fueron dibujadas a escala.

1 ¿Cuáles pares de rectángulos son semejantes?

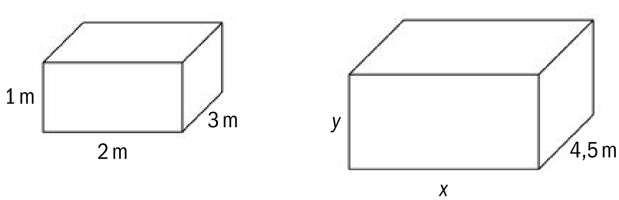


2 Las figuras dadas a continuación son semejantes. Calcule las longitudes señaladas con letras.

a

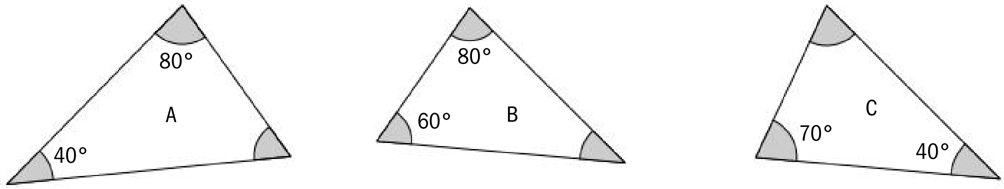


b

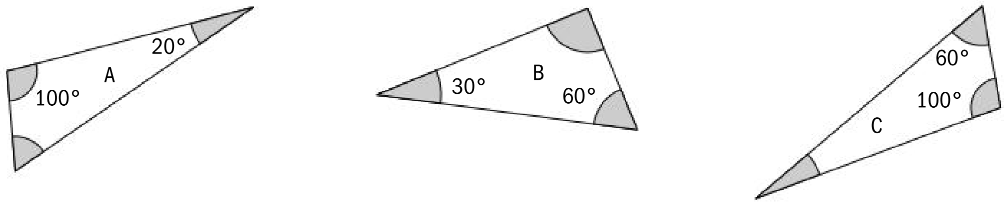


3 ¿Cuáles triángulos son semejantes?

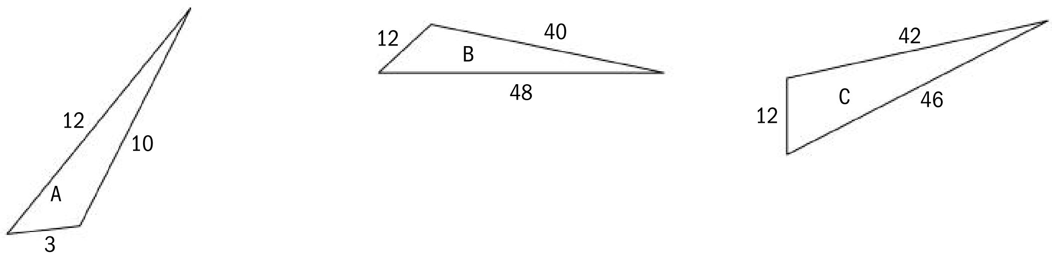
a



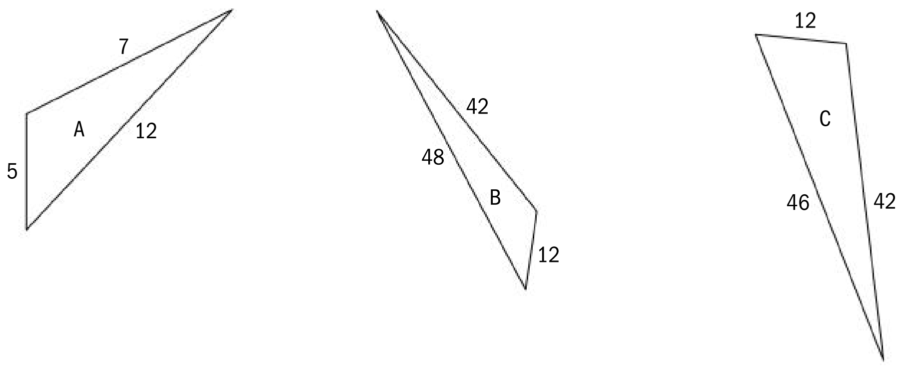
b



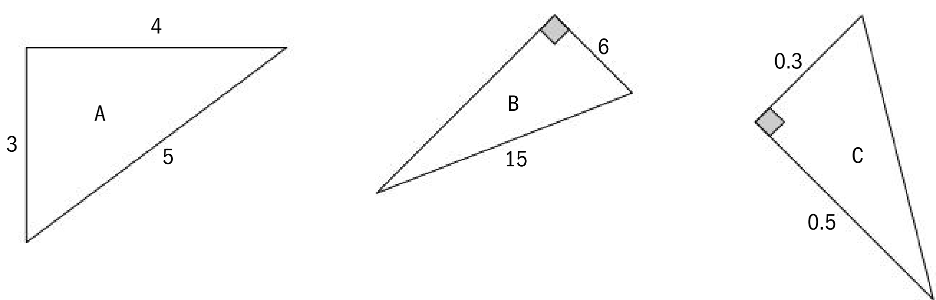
c



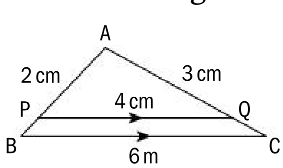
d



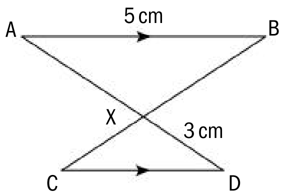
e



4 Muestre que los triángulos ABC y APQ son semejantes.
Calcule la longitud de AC y de BP.

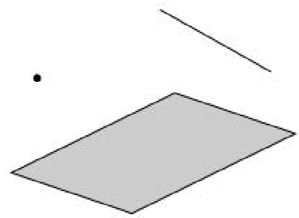


5 En el diagrama, AB y CD son segmentos paralelos. AD y BC se cortan en X.



a Demuestre que los triángulos ABX y DCX son semejantes.
b ¿Cuál lado en el triángulo DCX se corresponde con AX en el triángulo ABX?
c Calcule la longitud de AX.

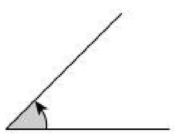
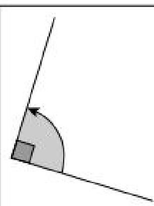
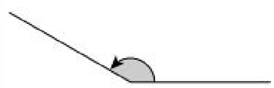
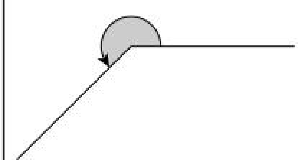
3.5 Puntos, rectas, planos y ángulos



Las ideas más básicas de la geometría son las de punto, recta y plano. Un **segmento** representa el camino más corto entre dos puntos. Los planos pueden ser **finitos**, como por ejemplo, la superficie de un escritorio o la de una pared, o **infinitos**, es decir, continuar en todas las direcciones.

Decimos que un punto tiene dimensión cero, una recta es unidimensional y un plano es bidimensional.

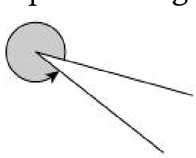
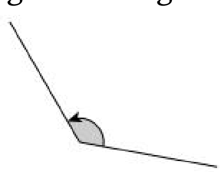
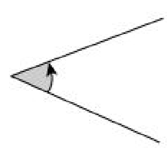
Los ángulos pueden medirse en grados.

			
Ángulo agudo, entre 0° y 90°	Ángulo recto, 90°	Ángulo obtuso, entre 90° y 180°	Ángulo cóncavo, entre 180° y 360°

Ejercitación 3E

1 Dibuje:
a Un ángulo cóncavo **b** Un ángulo agudo
c Un ángulo recto **d** Un ángulo obtuso

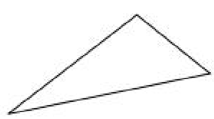
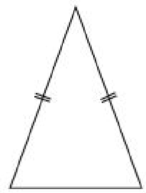
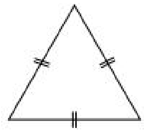
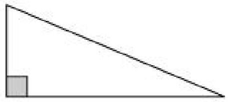
2 Indique si los siguientes ángulos son agudos, obtusos o cóncavos:

a  **b**  **c** 

3 Indique si los siguientes ángulos son agudos, obtusos o cóncavos:
a 173° **b** 44° **c** 272°
d 82° **e** 308° **f** 196°

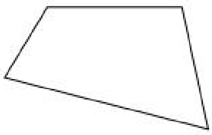
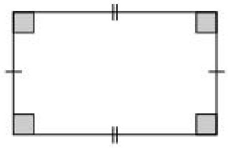
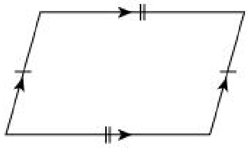
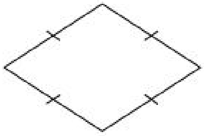
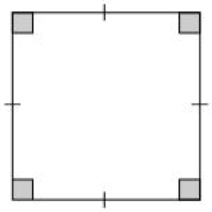
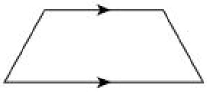
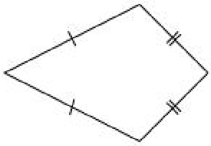
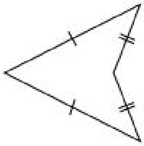
3.6 Figuras planas (bidimensionales)

Triángulos

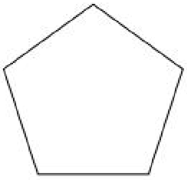
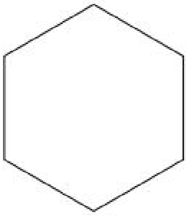
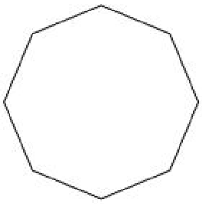
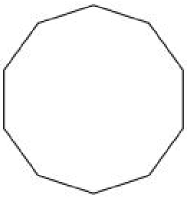
			
Triángulo escaleno	Triángulo isósceles	Triángulo equilátero	Triángulo rectángulo

Las líneas pequeñas en estos diagramas indican que los lados marcados son iguales y las flechas indican que los lados marcados son paralelos. Los cuadrados sombreados indican que el ángulo marcado es recto.

Cuadriláteros

			
Irregular	Rectángulo	Paralelogramo	Rombo
			
Cuadrado	Trapecio	Cometa	Punta de flecha

Polígonos

			
Pentágono	Hexágono	Octógono	Decágono

Ejercitación 3F

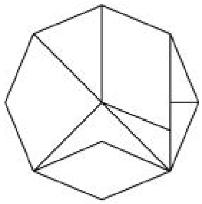
1 Dibuje aproximadamente los cuadriláteros nombrados en la tabla anterior y agregue las diagonales. Copie y complete la siguiente tabla:

Diagonales	Irregular	Rectángulo	Paralelogramo	Rombo	Cuadrado	Trapecio	Cometa
Son perpendiculares.					✓		
Son iguales.					✓		
Se cortan en su punto medio.					✓		
Dividen a los ángulos en dos partes iguales.					✓		

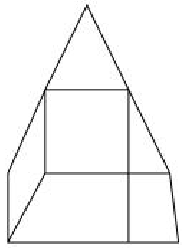
Por ejemplo, las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí, tienen la misma longitud, se cortan mutuamente en partes iguales y dividen a los ángulos en partes iguales.

2 Enumere los nombres de todas las figuras contenidas en cada uno de estos diagramas.

a

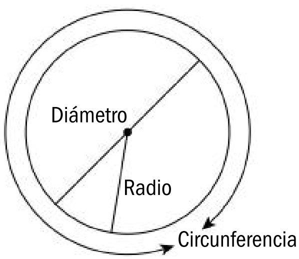


b



3.7 El círculo: definiciones y propiedades

Seguramente ya conocemos estas definiciones referidas a los círculos.



Se denomina **circunferencia** a la curva que rodea al círculo.
El segmento que une el centro del círculo y un punto cualquiera de la circunferencia se denomina **radio**, usualmente se lo denota con r.

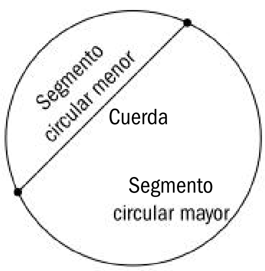
El **diámetro** es el doble del radio, se lo denota usualmente con d.

$d = 2r$

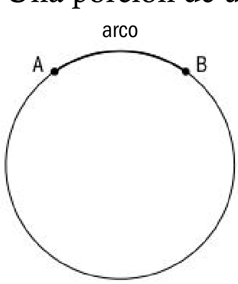
La longitud de la circunferencia de un círculo se obtiene usando la fórmula $C = 2\pi r$ o $C = \pi d$.

Las siguientes son algunas propiedades y definiciones que ya deberíamos conocer:

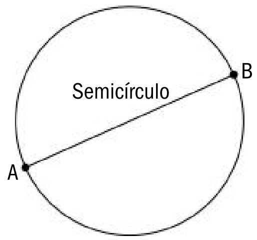
- El **área** de un círculo puede calcularse usando la fórmula $A = \pi r^2$.
- Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.
  Una cuerda divide a un círculo en dos **segmentos circulares**: uno **menor** y uno **mayor**.



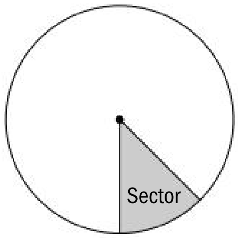
- Una porción de una circunferencia se denomina **arco**.



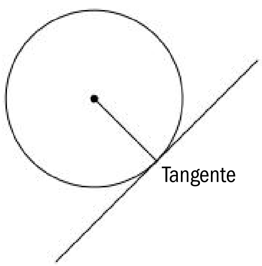
- Un **semicírculo** es la porción de un círculo determinada por cualquier diámetro.



- El área comprendida entre dos radios de un círculo se denomina **sector circular**.

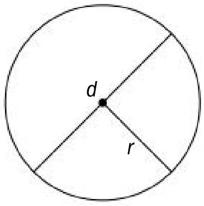


- Una **tangente** a un círculo es una recta que toca a la circunferencia del círculo en un único punto llamado **punto de tangencia**. El ángulo entre una tangente y el radio en el punto de tangencia es 90°.



3.8 Perímetro

El **perímetro** de una figura se define como la longitud de su contorno. El perímetro de un polígono se calcula sumando las longitudes de sus lados.



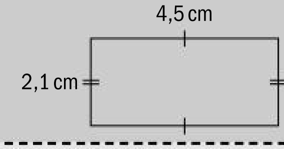
El contorno de un círculo se denomina **circunferencia**.

En el círculo que se muestra a la izquierda, r es el radio y d es el diámetro. Si C es la longitud de la circunferencia, entonces:
$C = 2\pi r$ o $C = \pi d$

π = 3,141592653589793238462... Muchos matemáticos alrededor del mundo celebran el día de Pi el 14 de marzo. El uso del símbolo π fue popularizado por el matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783).

Ejemplo 59

Halle el perímetro de esta figura:

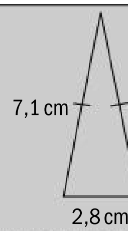


Respuesta

Perímetro = 4,5 cm + 2,1 cm + 4,5 cm + 2,1 cm = 13,2 cm

Ejemplo 60

Halle el perímetro de esta figura:



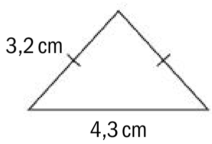
Respuesta

Perímetro = 2 × 7,1 cm + 2,8 cm = 17,0 cm

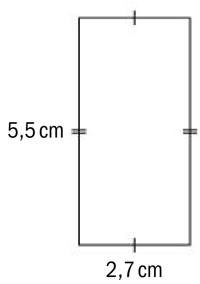
Ejercitación 3G

Halle el perímetro de estas figuras:

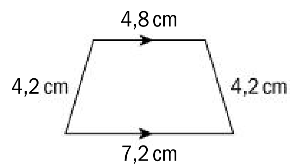
a



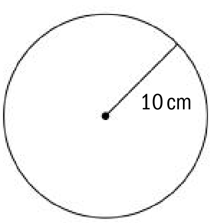
b



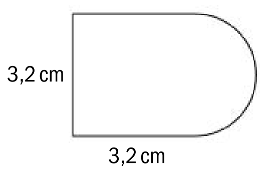
c



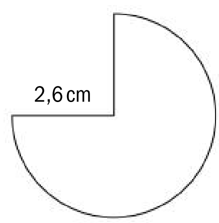
d



e

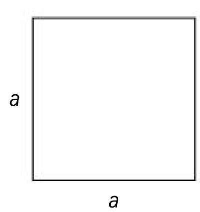
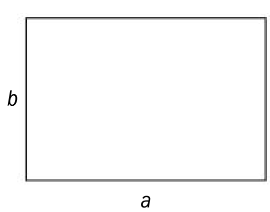
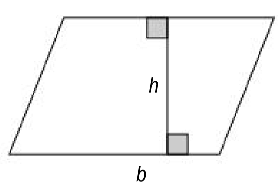
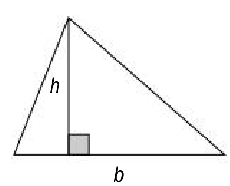


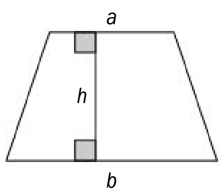
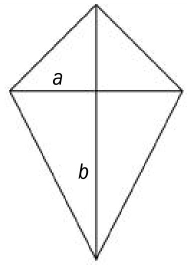
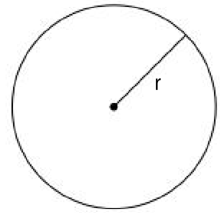
f



3.9 Área

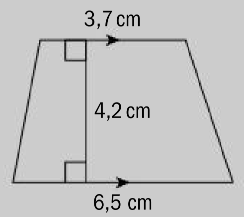
En la siguiente tabla, se muestran algunas figuras planas junto con las fórmulas de sus áreas.

			
$A = a^2$	$A = ab$	$A = bh$	$A = \frac{1}{2}bh$

		
$A = \frac{1}{2}(a + b)\,h$	$A = \frac{1}{2}ab$	$A = \pi r^2$

Ejemplo 61

Halla el área de esta figura:

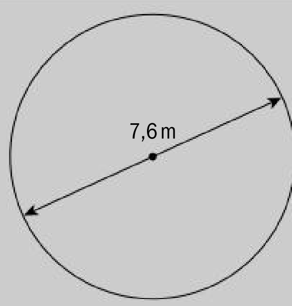


Respuesta

Área = $\frac{1}{2}(3{,}7 + 6{,}5)(4{,}2) = 21{,}42\ \text{cm}^2$

Ejemplo 62

Halle el área de esta figura y redondee su respuesta a tres cifras significativas.



Respuesta

Área = $\pi(3{,}8)^2 = 45{,}4\,\text{cm}^2$ (3 cs)

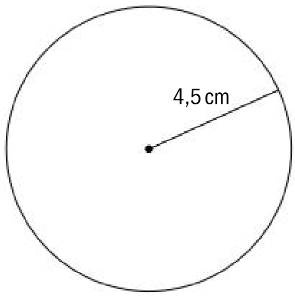
Diámetro = 7,6 m,
entonces radio = 7,6 ÷ 2 = 3,8 m

Use la tecla π de la calculadora para ingresar π.

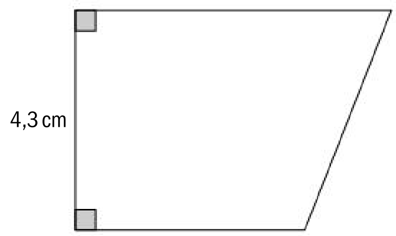
Ejercitación 3H

Halle las áreas de estas figuras. Dé sus respuestas redondeadas a tres cifras significativas.

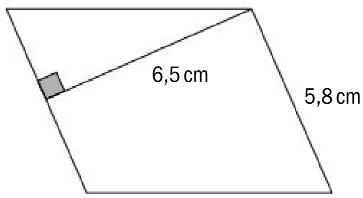
1



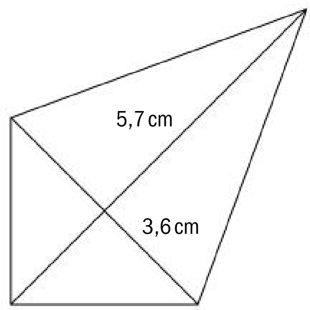
2



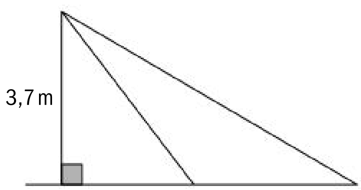
3



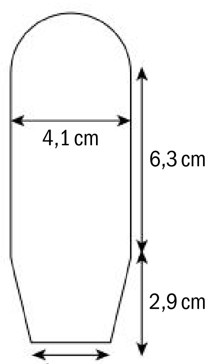
4



5



6

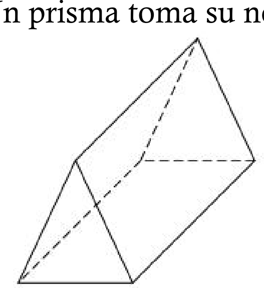


3.10 Volúmenes y áreas de la superficie de cuerpos tridimensionales

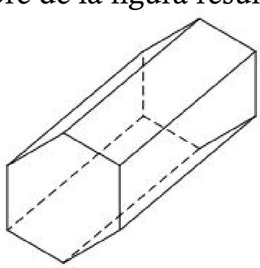
Prisma

➔ Un **prisma** es un cuerpo que presenta la misma forma o sección transversal en todo su largo.

Un prisma toma su nombre de la figura resultante de la sección transversal.



Prisma triangular



Prisma hexagonal

➔ Para calcular el volumen de un prisma, usamos la fórmula:

V = área de la sección transversal × altura

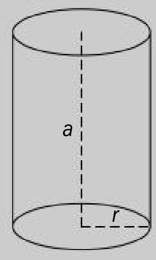
Para calcular el área total de un prisma, se calcula el área de cada cara y luego se suman todas las áreas.

Cilindro

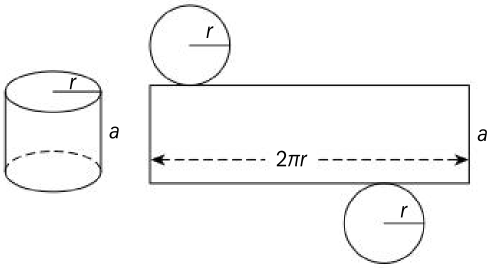
Un **cilindro** es un caso particular de un prisma, en el que la figura determinada por la sección transversal es un círculo.

➔ El volumen de un cilindro en el que el radio de la sección transversal es r y la altura es a es:

$V = \pi r^2 \times a$



Para calcular el área de la superficie de un cilindro, desplegamos la superficie curva para formar un rectángulo:



Para hallar el área de la superficie curva usamos la fórmula $ASC = 2\pi ra$.

➔ Para hallar el área de la superficie del cilindro, calculamos el área de la superficie curva y le sumamos las áreas de las dos bases circulares:

Área total = $2\pi ra + 2\pi r^2$

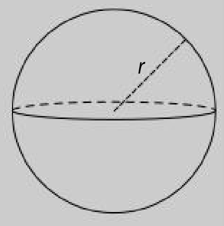
Esfera

➔ La fórmula del volumen de una **esfera** de radio r es:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

La fórmula para calcular el área de la superficie esférica es:

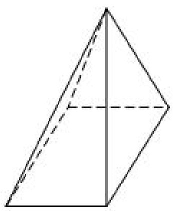
$AS = 4\pi r^2$



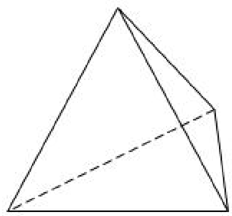
Pirámide

Una **pirámide** es un sólido que tiene una base plana y llega hasta un punto (el **vértice**).

Cada tipo particular de pirámide toma su nombre de la figura que conforma la base.



Pirámide de base cuadrada



Pirámide de base triangular

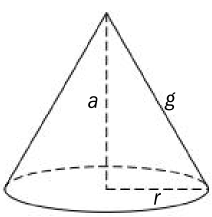
➔ Para hallar el área de la superficie de una pirámide, sumamos las áreas de todas sus caras.

El volumen de una pirámide de altura a es:

$$V = \frac{1}{3} \times \text{\textit{área de la base}} \times a$$

Cono

Un **cono** es un tipo especial de pirámide con base circular.



➔ El volumen de un cono con base circular de radio r y **altura perpendicular** a está dado por la fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times a$$

El área de la superficie curva de un cono usa la longitud de la **generatriz** g:

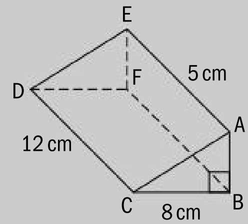
$$ASC = \pi r \times g$$

Para hallar el área total de la superficie del cono, se le suma el área de la base circular.

$$AT = \pi r \times g + \pi r^2$$

Ejemplo 63

ABCDEF es una cuña.
Ángulo ABC = 90°,
AB = 5 cm, BC = 8 cm y CD = 12 cm.
Calcule el volumen de ABCDEF.



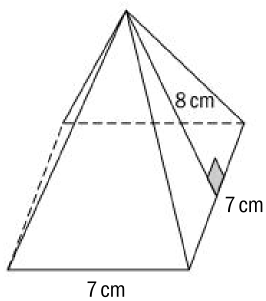
Respuesta

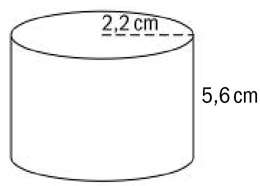
Área de la sección transversal triangular $= \frac{1}{2} \times 5 \times 8 = 20$	*Calcular el área de la sección transversal*
Volumen de la cuña $= 20 \times 12 = 240\,\text{cm}^2$	*Volumen del prisma = área de la sección transversal × altura*

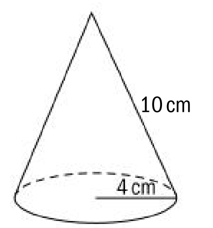
Una cuña es un prisma con sección transversal triangular.

Ejercitación 3I

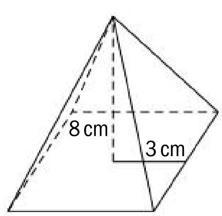
1 Halle el área total de los siguientes cuerpos:

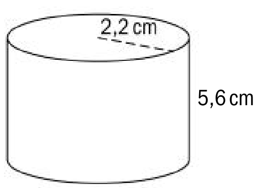


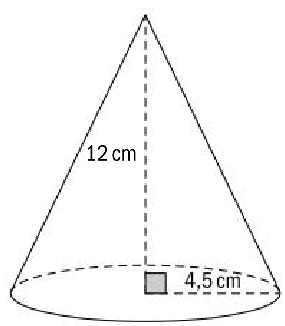




2 Calcule el volumen de cada uno de los cuerpos siguientes:





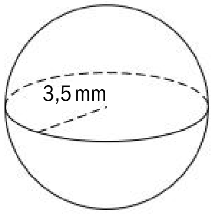


3 Halle la altura de un cono que tiene un radio de 2 cm y un volumen de $23\,\text{cm}^3$.

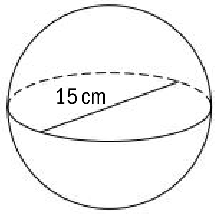
4 Un cilindro tiene un volumen de $2120{,}6\,\text{cm}^3$ y un radio de 5 cm. ¿Cuál es el volumen de un cono con la misma altura, cuya base tiene un radio de 2,5 cm?

5 Determine el área de la superficie y el volumen de cada esfera.

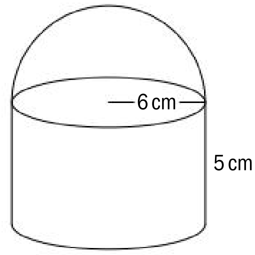
a



b



6 Una semiesfera está montada sobre un cilindro. Halle el área de la superficie y el volumen.



7 Se colocan ocho pelotas de básquet en un contenedor. El radio de cada pelota es de 10 cm. El contenedor tiene forma de pirámide de base cuadrada; cada arista de la base mide 40 cm y la altura mide 70 cm. ¿Cuánto espacio queda vacío en el contenedor?

8 Una lata cilíndrica tiene un díametro de 9 cm y una altura de 14 cm. Calcule el volumen y el área de la superficie, con una aproximación de una cifra decimal.

9 Calcule la altura de un cilindro que tiene un volumen de 250 cm^3 y un radio de 5,5 cm.

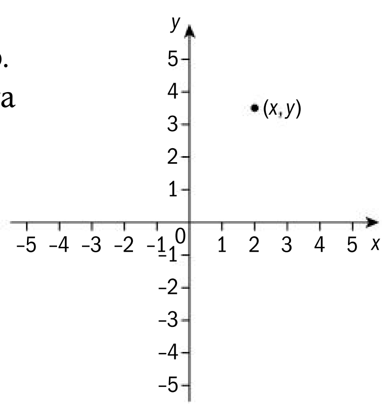
10 Un tubo cilíndrico de cartón tiene 60 cm de largo y es abierto. Su área total es de 950 cm^2. Calcule el radio, a la décima de centímetro más próxima.

3.11 Geometría cartesiana

René Descartes introdujo el uso de coordenadas en un tratado en 1637. Es por esta razón que los ejes y las coordenadas llevan el nombre de "ejes cartesianos" y "coordenadas cartesianas".

Coordenadas

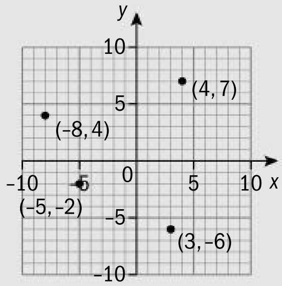
Las coordenadas de un punto describen su posición en el plano. La posición horizontal se muestra en el eje *x* y la posición vertical se muestra en el eje *y*.



Ejemplo 64

Dibuje un par de ejes donde $-10 \le x \le 10$ e $-10 \le y \le 10$.
Sitúe los puntos de coordenadas: (4, 7), (3, −6), (−5, −2) y (−8, 4).

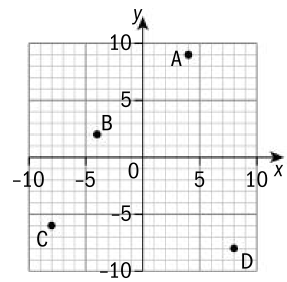
Respuesta



Ejercitación 3J

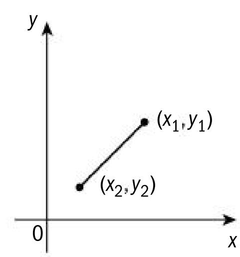
1 Dibuje un par de ejes donde $-8 \le x \le 8$ e $-5 \le y \le 10$.
Sitúe los puntos con coordenadas:
(5, 0), (2, −2), (−7, −4) y (−1, 9)

2 Escriba las coordenadas de los puntos que se muestran en este diagrama.



Punto medio

El punto medio del segmento que une los puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.



Ejemplo 65

Halle el punto medio del segmento que une los puntos (1, 7) y (−3, 3).

Respuesta

El punto medio es $= \left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = (-1, 5)$.

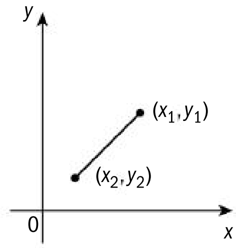
Ejercitación 3K

Calcule el punto medio de los segmentos que unen estos pares de puntos:

1 (2, 7) y (8, 3) **2** (–6, 5) y (4, –7) **3** (–2, –1) y (5, 6).

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Ejemplo 66

Halle la distancia entre los puntos de coordenadas (2, –3) y (–5, 4).

Respuesta

Distancia $= \sqrt{(-5-2)^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 7^2} = 9{,}90$ (3 cs)

Ejercitación 3L

Calcule la distancia entre los siguientes pares de puntos. Dé su respuesta redondeada a tres cifras significativas, cuando corresponda.

1 (1, 2) y (4, 6)

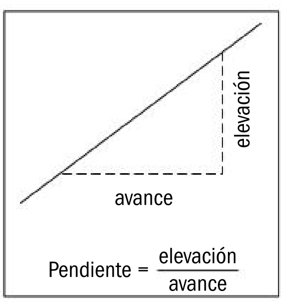
2 (–2, 5) y (3, –3)

3 (–6, –6) y (1, 7)

La pendiente de una recta

La **pendiente** de una recta es una medida de cuán empinada es.

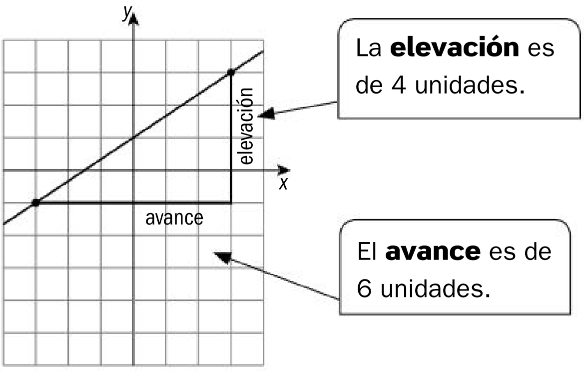
Para hallar la pendiente, se mide el incremento vertical (elevación) entre dos puntos y se divide por el incremento horizontal (avance).



Otra manera de expresar esta idea es:

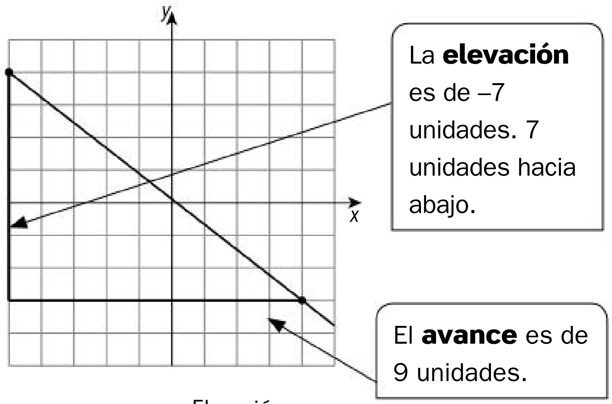
$$\text{Pendiente} = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$$

Pendiente positiva

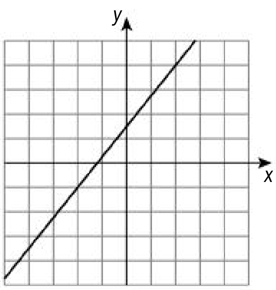


▲ Pendiente = $\frac{\text{Elevación}}{\text{Avance}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

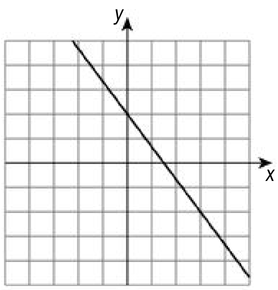
Pendiente negativa



▲ Pendiente = $\frac{\text{Elevación}}{\text{Avance}} = -\frac{7}{9}$

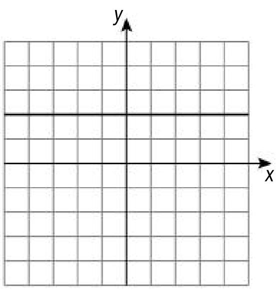


Pendiente positiva



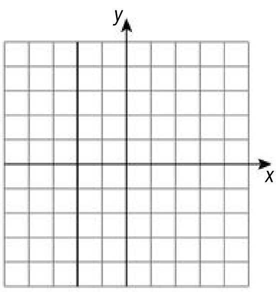
Pendiente negativa

▼ Las rectas horizontales tienen pendiente 0 pues la elevación es 0.



Pendiente cero

▼ Las rectas verticales tienen pendiente indefinida dado que el avance es 0.

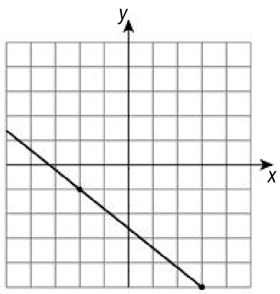


Pendiente indefinida

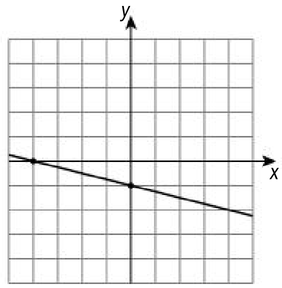
Ejercitación 3M

Halle la pendiente de las siguientes rectas:

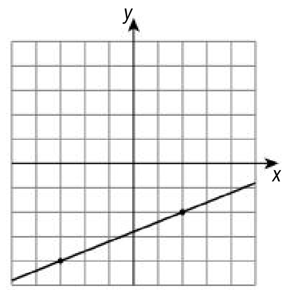
1



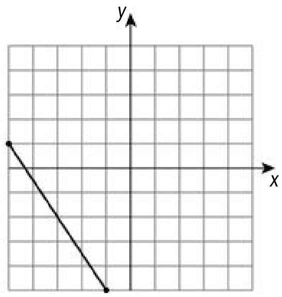
2



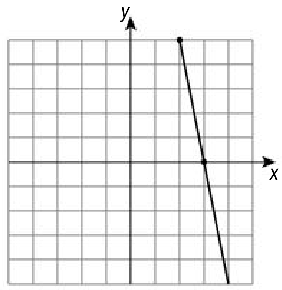
3



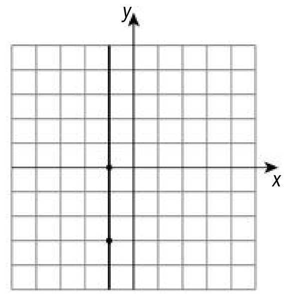
4



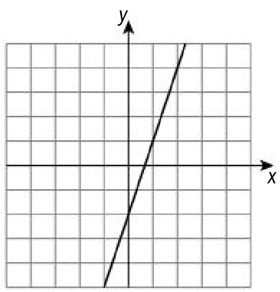
5



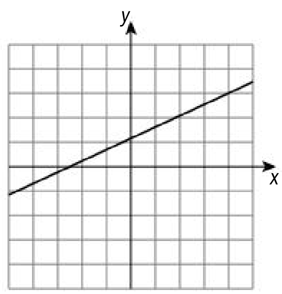
6



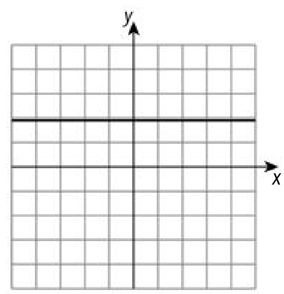
7



8



9



Cálculo de la pendiente dados dos puntos

➔ La pendiente de una recta es $\frac{\textit{Elevación}}{\textit{Avance}}$ lo cual significa $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$.

Dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), $\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ejemplo 67

Halle la pendiente de la recta determinada por los puntos (–3, –2) y (4, 1).

Respuesta

Pendiente $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-2)}{4-(-3)} = \frac{3}{7}$

Ejercitación 3N

Halle la pendiente de la recta determinada por los siguientes pares de puntos.

1 (19, –16) y (–7, –15)

2 (1, –19) y (–2, –7)

3 (–4, 7) y (–6, –4)

4 (20, 8) y (9, 16)

5 (17, –13) y (17, 7)

6 (14, 3) y (1, 3)

7 (3, 0) y (–11, –15)

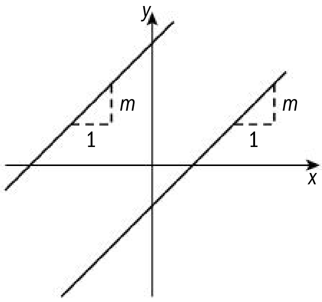
8 (19, –2) y (–11, 10)

9 (6, –10) y (–15, 15)

10 (12, –18) y (18, –18)

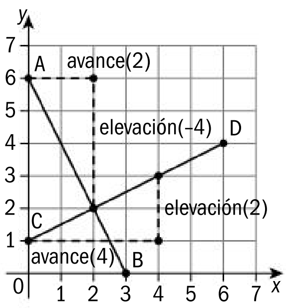
Rectas paralelas y perpendiculares

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente



Ambas rectas tienen pendiente *m*.

Las rectas perpendiculares tienen pendientes m y $-\frac{1}{m}$



La recta CD tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

La recta AB tiene pendiente –2.

El producto de las pendientes de las rectas perpendiculares es –1.
$-2 \times \frac{1}{2} = -1$

Ejercitación 30

1 **a** ¿Cuáles de las siguientes pendientes corresponden a rectas paralelas?

b ¿Cuáles de las siguientes pendientes corresponden a rectas perpendiculares?

$3;\ -3;\ \frac{1}{3};\ 4{,}5;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{9};\ \frac{9}{2};\ -\frac{2}{9};\ -1{,}5;\ \frac{6}{2}$

2 Indique si las rectas dadas en cada par resultan paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

a La recta A determinada por (2, 5) y (0, 1) y la recta B determinada por (4, 10) y (5, 12)

b La recta C determinada por (3, 14) y (–2, –6) y la recta D determinada por (12, –3) y (20, –5)

c La recta E determinada por (1, 10) y (5, 15) y la recta F determinada por (2, 2) y (4, 2)

d La recta G determinada por (5, 7) y (2, 4) y la recta H determinada por (8, –5) y (4, –1)

e La recta I determinada por (4, 11) y (10, 20) y la recta J determinada por (2, 1) y (6, 7)

Ecuaciones de rectas

Una recta está definida por una ecuación lineal de la forma

$$y = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{c}$$

Pendiente

Intersección con el eje *y*

A esta expresión se la llama forma explícita de la ecuación. Algunas personas usan:

y = ax + b.

Ejemplo 68

Halle la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (0, 4).

Respuesta

La ecuación de la recta es $y = 3x + 4$

Pendiente 3 Intersección con el eje *y* 4

Esta intersección con el eje y es 4.
La pendiente es 3.

Empleo de la fórmula de la pendiente para hallar la ecuación de una recta

Considere una recta con un punto fijo (x_1, y_1) y un punto genérico (x, y).

Luego $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

o $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Ejemplo 69

Halle la ecuación de la recta con pendiente $m = 3$ que pasa por el punto $(x_1\ y_1) = (6,12)$.
$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 12 = 3(x - 6)$ $y - 12 = 3x - 18$ $y = 3x - 6$

Ejercitación 3P

Halle la ecuación de las siguientes rectas en la forma explícita:

1 Pendiente 3, que pasa por el punto (1, 5)

2 Pendiente 4, que pasa por el punto (5, 11)

3 Pendiente 2,5, que pasa por el punto (4, 12)

4 Pendiente $\frac{1}{2}$, que pasa por el punto (12, 20)

5 Pendiente 5, que pasa por el punto (–2, –13)

6 Pendiente –3, que pasa por el punto (1, 1)

7 Pendiente –2, que pasa por el punto (–3, –1)

8 Pendiente $-\frac{1}{2}$, que pasa por el punto (–4, –3)

9 Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 7) y (5,19).

10 Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–1, –3) y (–5, –11).

4 Estadística

4.1 Gráficos estadísticos

En una investigación estadística, recopilamos información, conocida como **datos**. Para representar los datos en forma clara podemos usar gráficos. Tres tipos de gráficos estadísticos son gráficos de barras, gráficos de sectores y pictogramas.

Gráficos de barras

Un **gráfico de barras** está formado por rectángulos o barras del mismo ancho, cuyas longitudes son proporcionales a la cantidad que representan, o frecuencia. A veces dejamos un pequeño espacio entre las barras.

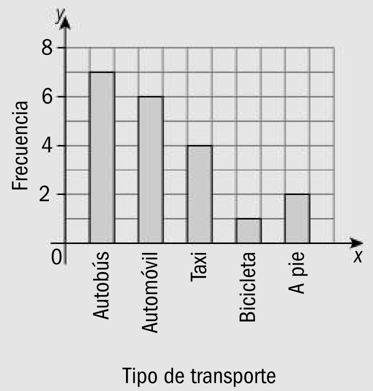
Ejemplo 70

Juliana recopiló algunos datos sobre las formas en que sus compañeros de clase viajan al colegio.

Tipo de transporte	Autobús	Automóvil	Taxi	Bicicleta	A pie
Frecuencia	7	6	4	1	2

Represente esta información en un gráfico de barras.

Respuesta



Ejemplo 71

Lionel recopiló datos de la misma clase acerca del número de niños en cada una de sus familias.

Número de niños	1	2	3	4	6
Frecuencia	3	9	5	2	1

Represente esta información en un diagrama de barras.

Respuesta

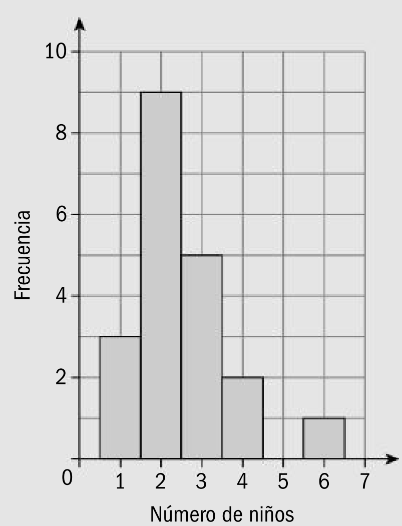


Gráfico de sectores

Un **gráfico de sectores** es un círculo dividido en sectores, como porciones de un pastel. El ángulo de cada sector es proporcional a la cantidad que representa.

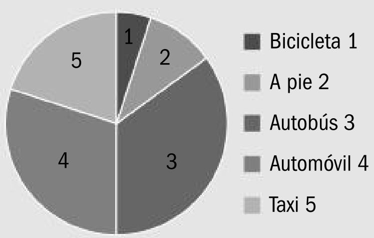
Ejemplo 72

Utilice los datos de Juliana del ejemplo 70 para elaborar un gráfico de sectores.

Respuesta

Tipo de transporte	Frecuencia		Ángulo del sector
Autobús	7	$\frac{7}{20} \times 360°$	126°
Automóvil	6	$\frac{6}{20} \times 360°$	108°
Taxi	4	$\frac{4}{20} \times 360°$	72°
Bicicleta	1	$\frac{1}{20} \times 360°$	18°
A pie	2	$\frac{2}{20} \times 360°$	36°

La frecuencia total es 20. El ángulo total en el círculo completo es 360°.



Dibujar primero el radio y luego medir, con un transportador, un ángulo por vez. La suma de todos los ángulos debe ser 360°.

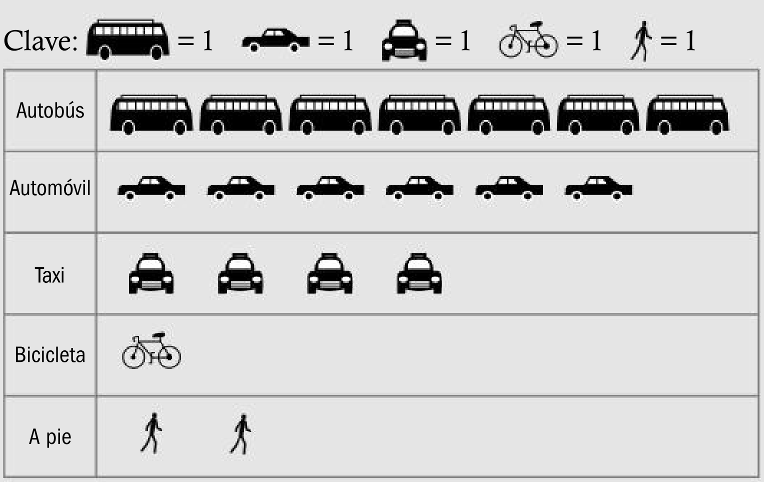
Pictogramas

Los **pictogramas** son similares a los gráficos de barras, con la excepción de que en ellos se utilizan dibujos. La cantidad de dibujos es proporcional a la cantidad que representan. Los dibujos pueden estar relacionados con los elementos que representan o simplemente ser un símbolo, como por ejemplo, un asterisco.

Ejemplo 73

Utilice los datos de Juliana del ejemplo 70 para elaborar un pictograma.

Respuesta



En este pictograma, se emplean símbolos diferentes para cada categoría y cada símbolo describe a su categoría.

Ejemplo 74

Utilice estos datos sobre el número de niños de una muestra de familias para elaborar un pictograma.

Número de niños	1	2	3	4	6
Frecuencia	4	9	6	2	1

Respuesta

Número de niños	
1	△△ △△
2	△△△△△△△△△
3	△△△△△△
4	△△
6	△

Clave: △ = 1 niño

Ejercitación 4A

1 Desde su ventana, Adam llevó a cabo un sondeo sobre los automóviles que pasaban por el frente de su casa. Anotó el color de los automóviles durante 10 minutos y recopiló los siguientes datos:

Color	Negro	Rojo	Azul	Verde	Plateado	Blanco
Frecuencia	12	6	10	7	14	11

Dibuje con precisión un gráfico de barras, un gráfico de sectores y un pictograma para representar estos datos.

2 Ida les preguntó a sus compañeros cuántas veces habían ido al cine en el último mes. Recopiló los siguientes datos:

Número de veces que fueron al cine	1	2	3	4	8	12
Número de estudiantes	4	7	4	3	1	1

Dibuje con precisión un gráfico de barras, un gráfico de sectores y un pictograma para representar estos datos.

Diagramas de tallos y hojas

Los diagramas de tallos y hojas proporcionan una forma sencilla de organizar los datos primarios sin perder ningún detalle.

He aquí algunos datos de los pesos de 20 personas (en kg):

50, 47, 53, 88, 75, 62, 49, 83, 57, 69, 71, 73, 73, 66, 51, 44, 78, 66, 54 y 80

Podemos dibujar un diagrama de tallos y hojas para estos datos.

El "tallo" son las decenas y las "hojas" son las unidades.

Debemos dar una clave para un diagrama de tallos y hojas.

4	4 7 9
5	0 1 3 4 7
6	2 6 6 9
7	1 3 3 5 8

Clave
6|2 significa 62 kg

La clave explica lo que el tallo y la hoja significan.

Las hojas son las unidades, escritas en orden ascendente.

El tallo es el dígito de las decenas.

Ejercitación 4B

1 Los resultados de los exámenes sobre 50 puntos en una clase de matemáticas son:
21, 23, 25, 26, 28, 30, 30, 30, 33, 36, 37, 39, 39, 40, 41, 42, 42, 42, 42, 46, 49, 50, 54
Muestre esta información en un diagrama de tallos y hojas.

2 El número de anunciantes en diferentes números de una revista son:
164, 176, 121, 185, 148, 149, 177, 151, 157, 152, 163, 145, 123, 176
Muestre esta información en un diagrama de tallos y hojas.

Use esta clave:
16|4 significa 164 anuncios.

3 El tiempo de espera (en minutos) de 24 pacientes en la consulta de un dentista fue de:
55, 26, 27, 53, 19, 28, 30, 29, 22, 44, 48, 48, 37, 46, 62, 57, 49, 42, 25, 34, 58, 43, 52, 36
Muestre esta información en un diagrama de tallos y hojas.

4 A continuación se muestra el número de tomates cosechados de las diferentes plantas de un jardín:
11, 34, 14, 23, 56, 36, 28, 19, 26, 35, 24, 30, 51, 18, 14, 16, 27, 29, 38, 26
Muestre esta información en un diagrama de tallos y hojas.

5 Los tiempos, en segundos, que les llevó a los exploradores atar un nudo fueron:
4,6; 2,2; 3,1; 4,2; 5,2; 4,3; 6,0; 7,3; 7,4; 3,2;
3,3; 6,3; 3,2; 2,3; 2,5; 6,4; 5,2; 2,5; 2,9; 5,2; 5,4; 4,3; 4,8; 4,7
Muestre esta información en un diagrama de tallos y hojas.

Represente el número entero en el tallo y las décimas en las hojas.

4.2 Análisis de datos

→ Los **datos discretos** pueden tomar solo valores específicos.
Los datos discretos se pueden contar.

Por ejemplo:

- El número de niños en una familia: los valores pueden tomar solo números enteros.
- La talla de calzado en el Reino Unido – 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$, …

➔ Los **datos continuos** pueden tomar cualquier valor dentro de un cierto rango.

Los datos continuos se miden, y el grado de aproximación de los datos depende del instrumento de medición empleado.

Por ejemplo:

- El tiempo empleado para correr 100 metros puede ser 14,4 segundos o 14,43 segundos o 14,428 segundos, etc., dependiendo del instrumento de medición.

Ejercitación 4C

Indique si estos datos son discretos o continuos:

1 El número de automóviles en el estacionamiento de una escuela

2 El número de libros en una biblioteca

3 La medida de su lápiz

4 El tiempo que le lleva correr 400 m

5 La velocidad de un auto

6 El número de amigos que tiene

7 El número de pares de zapatos que posee

8 La masa de una mesa

9 La distancia de la Tierra al Sol

Medidas de posición central

Una medida de posición central, o **promedio**, describe un valor típico de un conjunto de datos.

Existen tres tipos comunes de promedios:

- La **moda:** es el valor del dato que ocurre con mayor frecuencia.
- La **mediana:** es el elemento central cuando se ordenan los datos de menor a mayor.
- La **media:** este es el término al que usualmente se refiere la gente cuando habla de “promedio”. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo la suma por el número total de datos.

Ejemplo 75

Halle: (a) la moda, (b) la mediana y (c) la media del siguiente conjunto de datos:
2, 5, 4, 9, 1, 3, 2, 6, 9, 2, 5, 13, 4

Respuestas	
a La moda es 2.	*2 ocurre más frecuentemente.*
b 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 9, 9, 13 La mediana es 4.	*Ordenar los elementos y hallar el del medio*
c Media $= \frac{1+2+2+2+3+4+4+5+5+6+9+9+13}{13}$ $= \frac{65}{13} = 5$	*Sumar todos los datos. Hay 13 datos entonces dividir por 13.*

Ejercitación 4D

1 Halle: (a) la moda, (b) la mediana y (c) la media de:

a 1, 4, 1, 5, 6, 7, 3, 1, 8
b 4, 7, 5, 12, 5, –3, –2
c 2, 3, 8, 2, 1, 7, 9, 8, 5
d 25, 28, 29, 21, 25, 20, 27
e 7,4; 10,2; 12,5; 6,8; 10,2

2 A quince estudiantes se les preguntó cuántos hermanos y hermanas tenían. Los resultados fueron:
2, 2, 1, 0, 3, 5, 2, 1, 1, 0, 1, 4, 1, 0, 2.

Halle: (a) la moda, (b) la mediana y (c) la media del número de hermanos y hermanas.

3 Mis últimas calificaciones de tareas, evaluadas sobre 10 puntos, fueron:
8, 7, 9, 10, 8, 9, 6, 8, 7.

Halle: (a) la moda, (b) la mediana y (c) la media de las calificaciones de tareas.

4 Los tiempos de un velocista para una carrera de 40 m fueron:
5,13; 4,82; 5,25; 4,94; 5,06; 4,82; 5,12.

Halle: (a) la moda, (b) la mediana y (c) la media de los tiempos.

5 Siete granjeros poseen los siguientes números de pollos:
253, 78, 497, 166, 710, 497 y 599.

Halle: (a) la moda, (b) la mediana y (c) la media del número de pollos.

Medidas de dispersión

Una medida de dispersión es un valor que describe el grado de diseminación del conjunto de datos.

El **rango** y el **rango intercuartil** son dos medidas de dispersión.

El **rango** muestra cuán separados están los datos.

> ➔ Rango = mayor valor – menor valor

Los **cuartiles** dividen un grupo de datos en cuatro secciones iguales.

> ➔ El **primer cuartil**, Q_1, es el valor que marca la primera sección y su posición se determina usando la fórmula
>
> $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$-ésimo valor, donde n es el número de elementos del conjunto de datos.
>
> El **tercer cuartil**, Q_3, es el valor que marca la tercera sección y su posición se determina usando la fórmula
>
> $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$-ésimo valor
>
> El **rango intercuartil** muestra cuán disperso se encuentra el 50% central de los datos.
>
> Rango intercuartil = $Q_3 - Q_1$

Ejemplo 76

He aquí el tamaño de zapatos de quince niños:
42, 42, 38, 40, 42, 40, 34, 46, 44, 36, 38, 40, 42, 36, 42

Halle: **a** El rango **b** El rango intercuartil

Respuestas

a 34, 36, 36, 38, 38, 40, 40, 40, 42, 42, 42, 42, 42, 44, 46
rango = 46 – 34 = 12

Para hallar el rango intercuartil primero ordenamos los datos según el tamaño.

$n = 15$

b Primer cuartil = $\frac{16}{4}$.° valor
= 4.° valor
= 38
Tercer cuartil = 3 × 4.° valor
= 12.° valor
= 42
Por lo tanto, rango intercuartil
= 42 – 38 = 4

Ejercitación 4E

1 He aquí los tamaños de calzado de 15 niñas:
26, 28, 28, 36, 34, 32, 30, 34, 32, 28, 36, 38, 34, 32, 30

Halle **a** el rango y **b** el rango intercuartil
de los tamaños de calzado.

2 Les preguntaron a 23 estudiantes cuántas mascotas tenían en sus hogares. He aquí las respuestas:
1, 4, 3, 5, 3, 2, 8, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 2, 1, 0, 1, 2, 6, 7, 2, 8, 2

Halle **a** el rango y **b** el rango intercuartil
del número de mascotas.

3 El promedio de las temperaturas diarias en °C de Chillton durante enero fueron:
–6, –4, –4, –2, –1, 0, 4, 5, 7, 4, 2, 1, 0, –3, –4, –6,
–7, –5, –3, –1, 1, 3, 4, 7, 7, 8, 3, –2, 0, –2, –5

Halle **a** el rango y **b** el rango intercuartil
de las temperaturas diarias.

4 El almacenero vende patatas por kilogramo.
Compré 1 kg de patatas cada día de la semana y conté el número de patatas cada vez. He aquí los resultados:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Patatas	18	15	20	17	14	12	15

Halle **a** el rango y **b** el rango intercuartil
del número de patatas en 1 kg.

5 Se da el tiempo (en segundos) que les toma a 11 jugadores de futbol prepararse para un tiro libre.
12,4; 2,45; 3,75; 10; 3,5; 8,4; 9,6; 23,5; 2,48; 15,6; 5,2

Halle **a** el rango y **b** el rango intercuartil
del tiempo empleado.

19 Práctica para la prueba 1

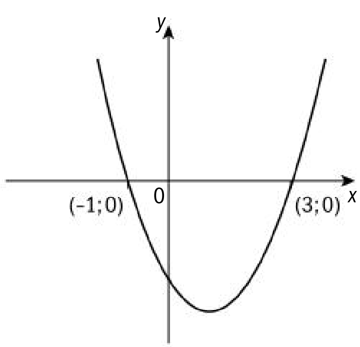
Tiempo permitido: 1 hora 30 minutos

- Responda todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Las respuestas correctas que no presentan por escrito el procedimiento realizado no siempre reciben la puntuación máxima. Las respuestas se deben justificar mediante el procedimiento seguido o las explicaciones correspondientes. Aun cuando una respuesta sea incorrecta, se pueden otorgar algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y este sea correcto. Por lo tanto, se recomienda que muestre todos los procedimientos utilizados.

SECCIÓN A

1 Sea $f(x) = 2(x - p)(x - q)$. Parte del gráfico de f se muestra a continuación.



a Escriba los valores de p y q. *[2 puntos]*

b **i** Escriba la ecuación del eje de simetría. *[1 punto]*

ii Halle las coordenadas del vértice. *[3 puntos]*

2 Sabiendo que $f(x) = e^{-2x}$, responda lo siguiente.

a Halle las primeras cuatro derivadas de $f(x)$. *[4 puntos]*

b Escriba una expresión para $f^{(n)}(x)$ en función de x y n. *[3 puntos]*

3 Considere el desarrollo de la expresión $(x^4 - 2x)^5$.

a Escriba el número de términos de este desarrollo. *[1 punto]*

b Halle el término en x^{11}. *[5 puntos]*

4 Una recta que pasa por los puntos (0, 0) y (2, 3) forma un ángulo agudo θ con el eje x.

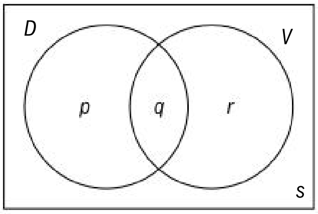
a Halle el valor de:

i $\operatorname{sen} 2\theta$

ii $\cos 2\theta$ *[3 puntos]*

b A partir de lo anterior, escriba el valor de $\tan 2\theta$. *[4 puntos]*

5 El siguiente diagrama de Venn muestra la información sobre 40 alumnos en una clase de teatro. De estos, 11 toman clases de danza (D), 14 toman clase de vocalización (V) y 5 toman clases de danza y de vocalización.



a Escriba el valor de:

i p

ii q

iii r

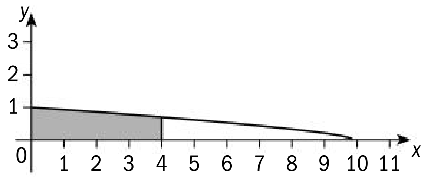
iv s *[4 puntos]*

b Halle el valor de $P(V \mid D')$. *[2 puntos]*

c Muestre que las regiones V y D **no** son mutuamente excluyentes. *[1 punto]*

6 La región sombreada en el gráfico a continuación está delimitada por

$f(x) = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}}{x^{\frac{1}{4}}}$, $x = 4$, el eje x y el eje y.



La región sombreada se rota 360° alrededor del eje x para generar un sólido.

a Escriba una integral definida que dé el volumen del sólido. *[1 punto]*

b Sabiendo que el volumen del sólido es $p\pi(\cos(q) - 1)$, halle los valores de p y q. *[5 puntos]*

7 Sea $f(x) = 4^{-x}$.

a Escriba $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. *[1 punto]*

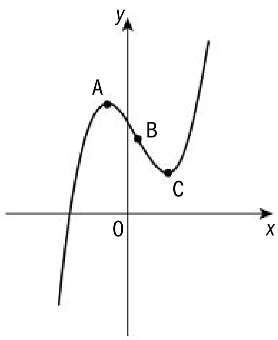
b Muestre que $f^{-1}(x) = \log_4 \dfrac{1}{x}$. *[2 puntos]*

Sea $g(x) = 2^x$.

c Halle el valor de $\left(f^{-1} \circ g\right)(4)$, dando su respuesta como un número entero. *[4 puntos]*

SECCIÓN B

8 Sea $f(x) = 2x^3 - 1{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$. Parte del gráfico de f se muestra a continuación.



Hay un punto máximo relativo en A, un punto de inflexión en B y un punto mínimo relativo en C(1, 2).

a Halle la coordenada x de:

i el punto A

ii el punto B *[10 puntos]*

b Cierta transformación viene definida por una simetría respecto del eje x seguida de una traslación por el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

i Escriba las coordenadas de la imagen de C luego de esta transformación.

ii El gráfico de una función g se obtiene cuando se le aplica esta transformación a la función f.
Escriba la ecuación que define la función g. *[4 puntos]*

9 Sea $f(x) = xe^{-x}$.

a Use la regla del producto para mostrar que $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$. *[4 puntos]*

b Halle $f''(x)$. *[3 puntos]*

c **i** Halle el valor de $f'(1)$ y el valor de $f''(1)$.

ii A partir de lo anterior, explique por qué hay un punto mínimo relativo, un punto máximo relativo o ninguno de los dos en el gráfico de f cuando $x = 1$. *[5 puntos]*

10 La recta L_1 está representada por la ecuación vectorial $r = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Una segunda recta L_2 perpendicular a L_1 está representada por la ecuación vectorial $r = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ l \end{pmatrix}$.

a Muestre que $l = -1$. *[5 puntos]*

Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto A.

b Halle $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. *[6 puntos]*

Sean $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c **i** Halle $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

ii A partir de lo anterior, halle $\mathrm{A\hat{B}C}$. *[7 puntos]*

Al final de este libro, en la sección de respuestas encontraremos un esquema de calificación que nos servirá para puntuar nuestras respuestas a esta prueba.

Práctica para la prueba 2

Tiempo permitido: 1 hora 30 minutos

- Responda todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Las respuestas correctas que no presentan por escrito el procedimiento realizado no siempre reciben la puntuación máxima. Las respuestas se deben justificar mediante el procedimiento seguido o las explicaciones correspondientes. En particular, las soluciones halladas utilizando una calculadora de pantalla gráfica (CPG) deben estar respaldadas con el procedimiento adecuado. Por ejemplo, si se utilizan gráficos para hallar la solución, entonces se deberán dibujar aproximadamente estos gráficos en la respuesta. Aun cuando una respuesta sea incorrecta, se pueden otorgar algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y este sea correcto. Por lo tanto, se recomienda que muestre todos los procedimientos utilizados.

SECCIÓN A

1 Se piensa que el peso de un mango está relacionado con su longitud. La longitud (x) en cm y el peso (y) en gramos se muestran en la tabla a continuación.

Longitud x (cm)	14	21	10	22	15	17	12	25	22	18
Peso y (g)	70	95	58	112	77	92	63	130	121	100

a Escriba el coeficiente de correlación, r. *[1 punto]*
b Comente su valor de r. *[2 puntos]*
c Escriba la ecuación de la recta de regresión de y sobre x. *[1 punto]*
d Use su recta de regresión para calcular el peso de un mango de 20 cm. *[2 puntos]*

2 Considere la progresión aritmética 5, 9, 13, …, 329.
a Halle la diferencia. *[1 punto]*
b Halle el número de términos de la progresión. *[3 puntos]*
c Halle la suma de la progresión. *[2 puntos]*

3 Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x$, para $0 \leq x \leq 6$.

a Halle $f'(x)$. *[3 puntos]*

b Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f'(x)$. *[4 puntos]*

4 La siguiente tabla muestra el número de computadores que se han adquirido para una clase. La media fue 4 computadores.

Computadores	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	2	1	4	9	x	3

a Muestre que el valor de x es 6. *[2 puntos]*

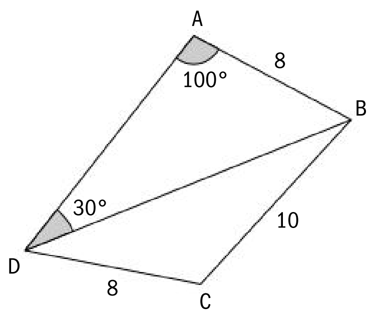
b Escriba la desviación típica. *[1 punto]*

Otro colegio tiene una media de 3,6 computadores y una desviación típica de 1,2 computadores. Un profesor da a todos los alumnos un computador nuevo.

c ¿Cuál será la nueva media? *[1 punto]*

d ¿Qué efecto tendrá esto en la desviación típica? *[1 punto]*

5 El siguiente diagrama muestra un cuadrilátero ABCD.



a Halle BD. *[3 puntos]*

b Halle el ángulo BCD. *[3 puntos]*

c Halle el área del triángulo BCD. *[2 puntos]*

6 La aceleración, a m s^{-2}, de una partícula en el tiempo t segundos está dada por $a = \frac{1}{t} + 3\operatorname{sen} 2t$, para $t \geq 1$.

La partícula está en reposo cuando $t = 1$.
Halle la velocidad de la partícula cuando $t = 5$. *[6 puntos]*

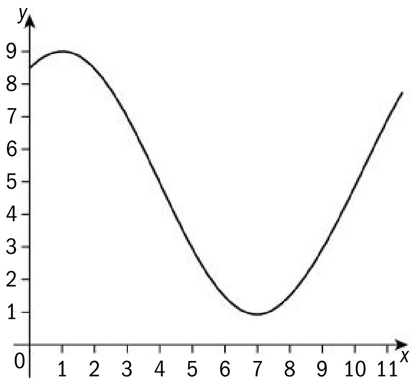
7 La probabilidad de ganar un juego de azar es 0,25.

a Si Walter juega 10 veces, halle la probabilidad de que gane exactamente 4 veces. *[3 puntos]*

b ¿Cuál es el menor número de veces que Walter debe jugar para asegurarse de que la probabilidad de ganar al menos dos veces sea mayor que 0,9? *[4 puntos]*

SECCIÓN B

8 El gráfico siguiente muestra la profundidad del agua en un puerto durante un período de doce horas, desde la medianoche hasta el mediodía.



a Use el gráfico para estimar el instante cuando:

i El agua está en un máximo.

ii La profundidad aumenta más rápidamente. *[2 puntos]*

b La profundidad del agua puede ser modelizada mediante la función $y = A\cos(B(x + C)) + D$.

i Muestre que $A = 4$.

ii Escriba el valor de C.

iii Escriba el valor de D.

iv Halle el valor de B.

v Escriba la función que modeliza la profundidad del agua. *[8 puntos]*

c El pesquero Halcón del Mar solo puede entrar al puerto cuando la profundidad del agua es de 4,5 m o más. Use su modelo para hallar la hora más temprana después de las 7 de la mañana a la que el Halcón del Mar puede entrar al puerto. *[3 puntos]*

9 Sean $f(x) = 4 - (1 - x)^2$, para $-2 \le x \le 4$ y $g(x) = \ln(x + 3)^2$, para $-3 \le x \le 5$.

a Dibuje aproximadamente el gráfico de ambas funciones en el mismo sistema de ejes coordenados. *[4 puntos]*

b **i** Escriba la ecuación de la asíntota vertical.

ii Escriba la intersección de g con el eje x.

iii Escriba la intersección de g con el eje y. *[4 puntos]*

c Halle los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$. *[2 puntos]*

Sea R la región entre las dos curvas donde $x \ge 0$.

d **i** Sombree la región R en su diagrama.

ii Escriba una expresión integral que represente el área de R.

iii Evalúe el área de R. *[5 puntos]*

10 En un colegio con muchos alumnos, se miden las estaturas de todos los estudiantes de catorce años.
Las estaturas de las mujeres se distribuyen normalmente con media 155 cm y desviación típica 10 cm.
Las estaturas de los varones se distribuyen normalmente con media 156 cm y desviación típica 12 cm.

a Halle la probabilidad de que una mujer mida más de 170 cm. *[3 puntos]*
b Sabiendo que el 10% de las mujeres miden menos de x cm, halle x. *[3 puntos]*
c Sabiendo que el 90% de los varones miden entre q cm y r cm, donde q y r son simétricos respecto de 160 cm, y $q < r$, halle el valor de q y r. *[4 puntos]*

En el grupo de estudiantes de catorce años, el 60% son mujeres y el 40% son varones. La probabilidad de que una mujer mida más de 170 cm se halló en el apartado (a).
La probabilidad de que un varón mida más de 170 cm es de 0,202.
Un estudiante de catorce años se selecciona al azar.

d Calcule la probabilidad de que el estudiante mida más de 170 cm. *[4 puntos]*
e Sabiendo que el estudiante mide más de 170 cm, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? *[3 puntos]*

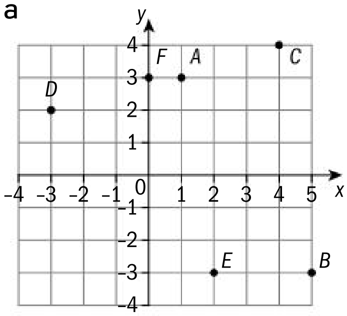
Al final de este libro, en la sección de respuestas encontraremos un esquema de calificación que nos servirá para puntuar nuestras respuestas a esta prueba.

Respuestas

Capítulo 1

Comprobemos nuestras habilidades

1 a



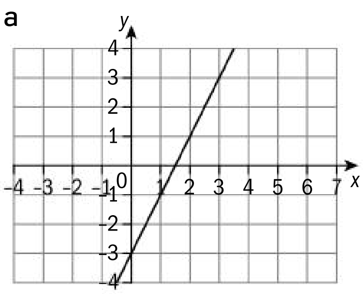
b $A(0, 2)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 0)$, $D(0, 0)$, $E(2, 1)$, $F(-2, -2)$, $G(3, -1)$, $H(-1, 1)$

2 a 34 b 82

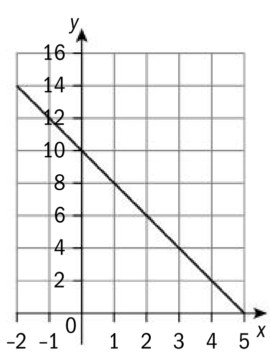
c 16 d $-\frac{13}{60}$

3 a 4 b -2 c 10

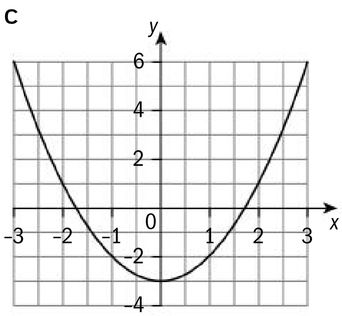
4 a



b



c



5 a $x^2 + 9x = 20$

b $x^2 - 4x + 3$

c $x^2 + x - 20$

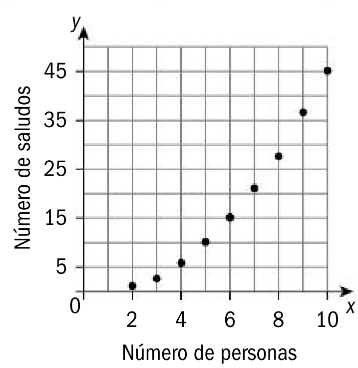
Investigación: saludos con las manos

a 6

b

Número de personas	Número de saludos
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45

c



d $S = \frac{1}{2}n(n-1)$

Ejercitación 1A

1 Funciones: **a b f**

2 a Función: dominio $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, recorrido $\{0, 1, 2\}$

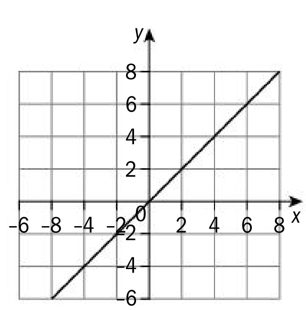
b No es una función: dominio $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, recorrido $\{-1, 0, 1, 2\}$

3 Sí, es función.

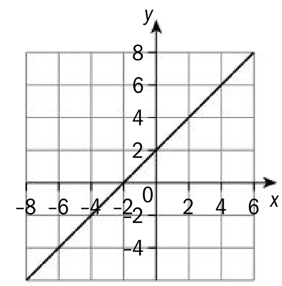
Ejercitación 1B

1 a b d f h i

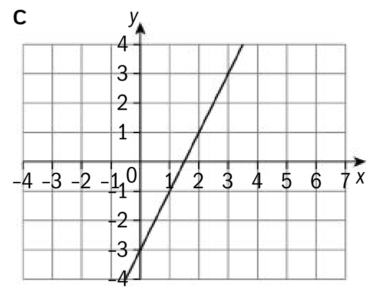
2 a



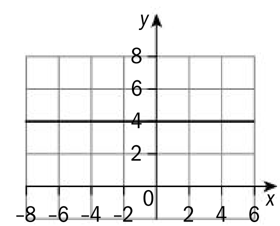
b



c



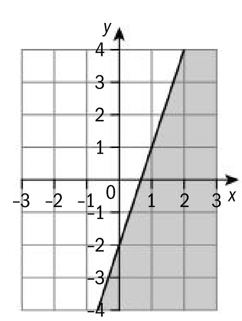
d



e Sí, la recta vertical cortará solo una vez.

f No, las rectas verticales tales como $x = 3$ no son funciones.

3 Una recta vertical, que no es función, corta la región en muchos lugares.



4 $y^2 = 4 - x^2$, $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

Cuando $x = 1$, $y = \pm\sqrt{3}$. Dos posibles valores, por ende, no es una función.

Ejercitación 1C

1 Asíntota horizontal: $y = 0$

2 Asíntota horizontal: $y = 0$,
Asíntota vertical: $x = 0$

3 Asíntota horizontal: $y - 0$,
Asíntota vertical: $x = -1$

4 Asíntota horizontal: $y = 2$,
Asíntota vertical: $x = -2$

5 Asíntota horizontal: $y = 2$,
Asíntota vertical: $x = 1$

6 Asíntota horizontal: $y = 0$,
Asíntota vertical: $x = \pm 3$

Ejercitación 1D

1 Función, dominio$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, recorrido $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45\}$.

2 a dominio $\{x: -4 < x \leq 4\}$, recorrido $\{y: 0 \leq y \leq 4\}$

b dominio $\{x: -1 \leq x \leq 5\}$, recorrido $\{y: 0 \leq y \leq 4\}$

c dominio $\{x: -\infty < x < \infty\}$, recorrido $\{y: 0 \leq y < \infty\}$

d dominio $\{x: -\infty < x \leq -2, 2 < x < \infty\}$,
recorrido $\{y: -\infty < y \leq 3, 4 \leq y < \infty\}$

e dominio $\{x: -5 \leq x \leq 5\}$, recorrido $\{y: -3 \leq y \leq 4\}$

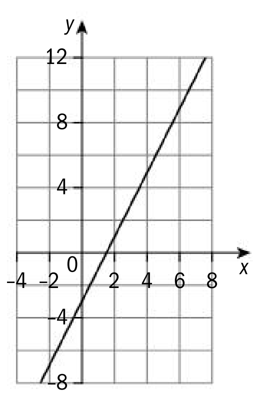
f dominio $\{x: -\infty < x < \infty\}$, recorrido $\{y: -1 \leq y \leq 1\}$

g dominio $\{x: -2 \leq x \leq 2\}$, recorrido $\{y: -2 \leq y \leq 2\}$

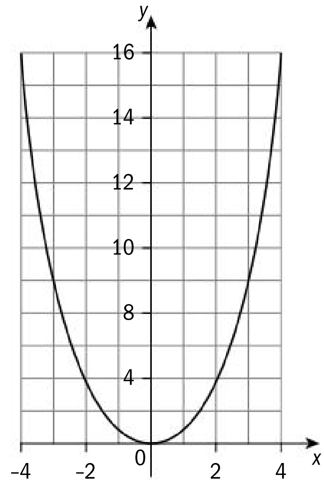
h dominio $\{x: -\infty < x < \infty\}$, recorrido $\{y: -\infty < y < \infty\}$

i dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$, recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

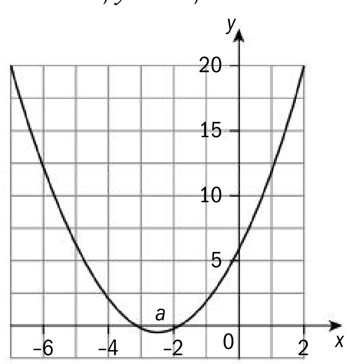
3 a $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$



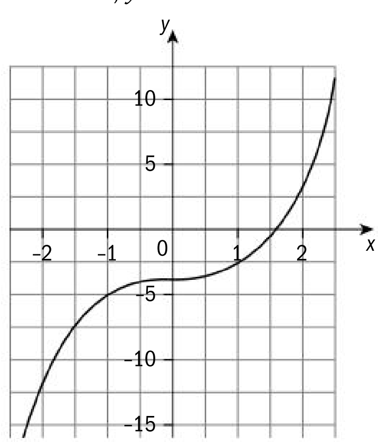
b $x \in \mathbb{R}, y \geq 0$



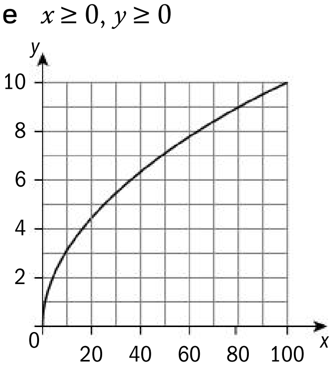
c $x \in \mathbb{R}, y \geq -0{,}25$



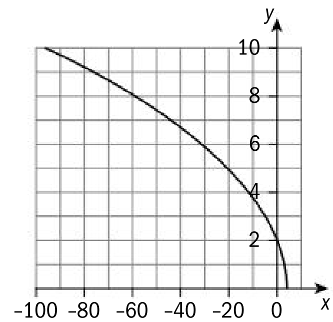
d $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$



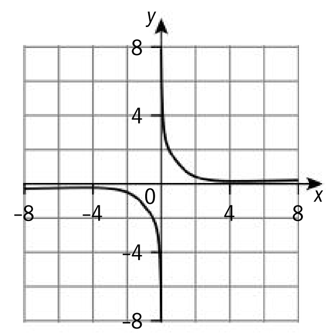
e $x \geq 0, y \geq 0$



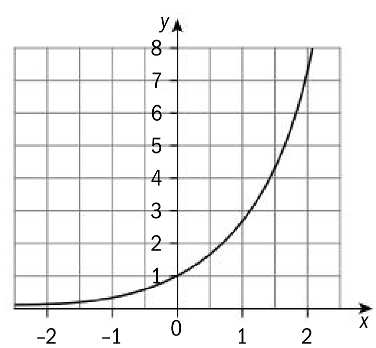
f $x \leq 4, y \geq 0$



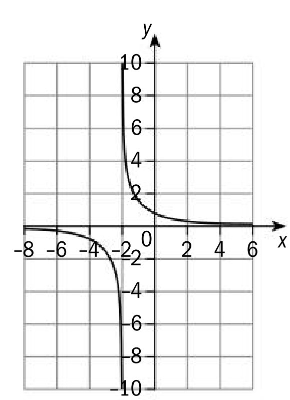
g $x \in \mathbb{R}\ x \neq 0, y \in \mathbb{R}\ y \neq 0,$



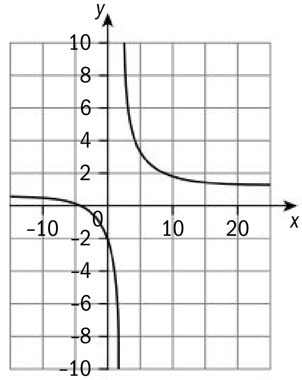
h $x \in \mathbb{R}, y > 0$



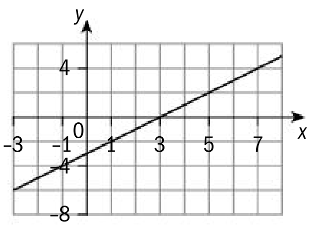
i $x \in \mathbb{R}\ x \neq -2, y \in \mathbb{R}\ y \neq 0,$



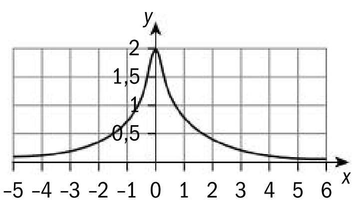
j $x \in \mathbb{R}\ x \neq 2,\ y \in \mathbb{R}\ y \neq 1$



k $x \in \mathbb{R}\ x \neq -3,\ y \in \mathbb{R}\ y \neq -6$



l $x \in \mathbb{R},\ 0 < y \leq 2$



Ejercitación 1E

1 a i 5 ii -5 iii $-1\frac{1}{2}$
iv -2, v $a-2$
b i 21 ii -9 iii $1\frac{1}{2}$
iv 0 v $3a$
c i $\frac{7}{4}$ ii $\frac{-3}{4}$ iii $\frac{1}{8}$
iv 0 v $\frac{1}{4}a$
d i 19 ii -1 iii 6
iv 5 v $2a+5$
e i 51 ii 11 iii $2\frac{1}{4}$
iv 2 v a^2+2

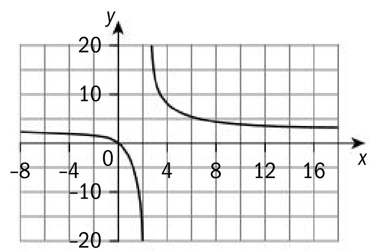
2 a a^2-4 b $a^2+10a+21$
c a^2-2a-3 d a^4-4a^2
e $21-10a+a^2$

3 a 2 b 11 c 2

4 a $-\frac{1}{9}$
b $x=6$, denominador $=0$ y $h(x)$ indefinida.

5 a 125
b El volumen de un cubo de arista 5.

6 a i $\frac{19}{4}$ ii $\frac{5}{4}$
iii $-\frac{1}{2}$ iv 0
b i -4 ii -11 iii -67
iv -697 v -6997
vi -69997
c El valor de $g(x)$ se vuelve cada vez menor a medida que x se aproxima a 2.
d 2
e asíntota vertical en $x=2$



7 a $-9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ b $7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
c $91\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ d $3\ \mathrm{s}$

8 a $\dfrac{f(2+2h)-f(2+h)}{h}$
b $\dfrac{f(3+2h)-f(3+h)}{h}$

Ejercitación 1F

1 a 12 b 3 c -15
d $3x+3$ e 13 f 16
g -17 h $3x+1$ i 18
j 38 k $3x^2+6$
l $9x^2+2$ m 12 n 18
o x^2+3 p x^2+2x+3

2 a 3 b 0 c -12
d -1 e -5 f 48
g $3-2x+x^2$ h $-2x+x^2$

3 a x^2+4x+4 b 25

4 a $5x^2+5$ b $25x^2+1$

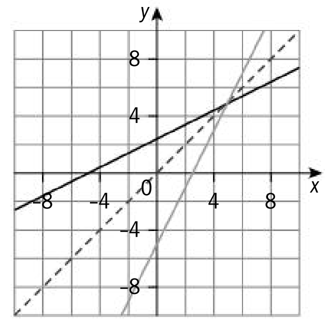
5 a $x^2-8x+19$ b x^2-1
c $2{,}5$

6 $(r \circ s)(x) = x^2-4,\ x \in \mathbb{R},\ y \geq -4$

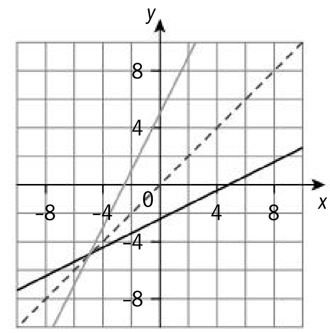
Ejercitación 1G

1 b, c

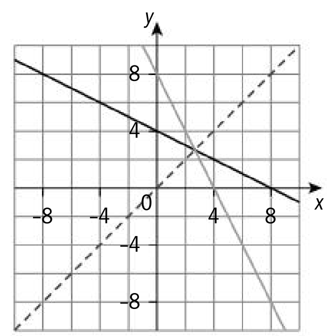
2 a



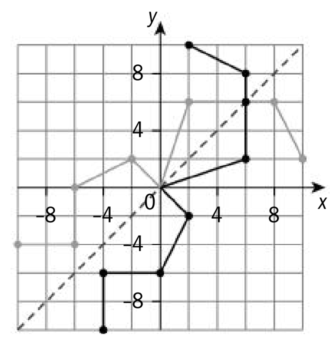
b



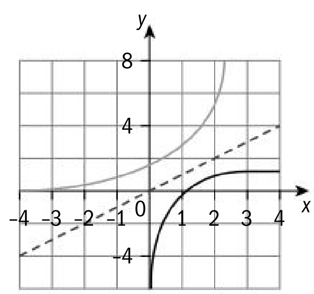
c



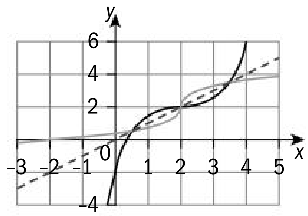
d



e



f



Ejercitación 1H

1 a i -2 y 1

ii $\frac{1}{2}$ y -3

iii x iv x

b Resultan inversas una de otra.

2 a $\frac{x+1}{3}$ b $\sqrt[3]{x+2}$

c $4(x-5)$ d $(x+3)^3$

e $\frac{1}{x+2}$ f $\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$

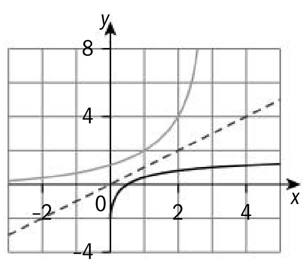
g $\frac{3x}{1-x}$ h $\frac{5x}{x+2}$

3 a $1-x$ b x c $\frac{1}{x}$

4 a 1 b -5 c $\frac{17}{20}$

5 $\frac{1+2x}{x-1}$

6 a–c



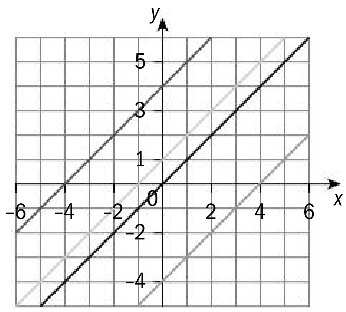
d $f(x)$: $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$
$f^{-1}(x)$: $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

7 $g^{-1}(x) = x^2$. El recorrido de $g(x)$ es $x \geq 0$, por lo tanto, el dominio de $g^{-1}(x)$ es $x \geq 0$. El dominio de $f(x)$ es $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, $g^{-1}(x) \neq f(x)$.

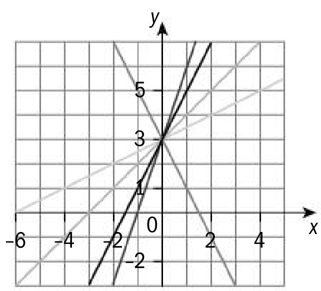
8 Si $f(x) = mx + c$ entonces
$f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{c}{m}$
$m \times \frac{1}{m} = 1$, no -1, por lo tanto, no son perpendiculares.

Investigación: funciones

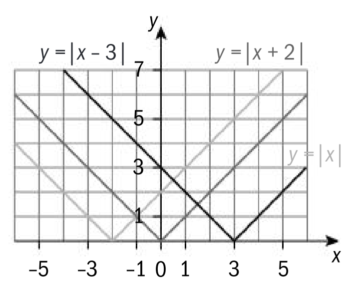
1 Al cambiar los términos constantes se produce una traslación de $y = x$ en la dirección del eje y.



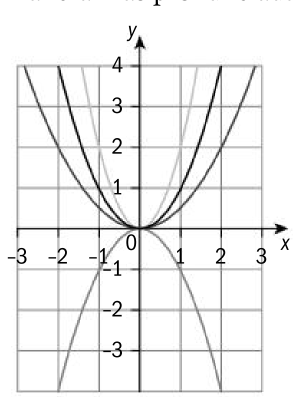
2 La variación del coeficiente de x altera la pendiente de la recta.



3 $y = |x + h|$ es una traslación de $-h$ en la dirección del eje x.

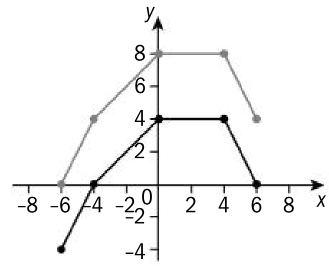


4 El signo negativo produce una simetría del gráfico respecto del eje x. Aumentar el valor de a hace que el gráfico crezca de manera más pronunciada.

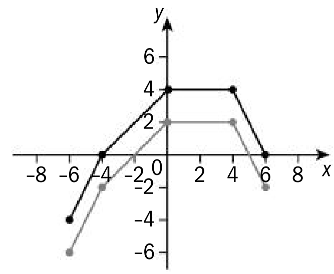


Ejercitación 1I

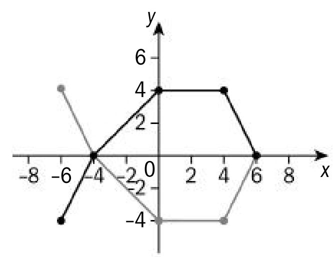
1 a



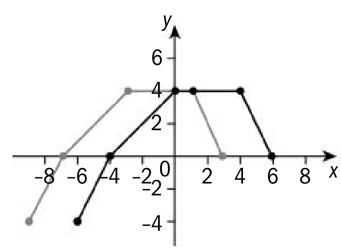
b



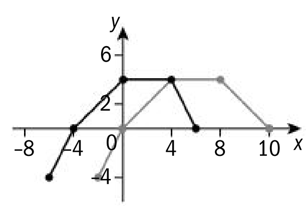
c



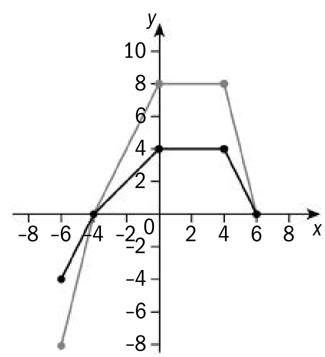
d



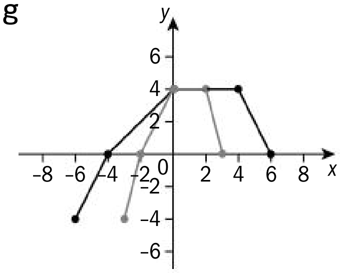
e



f



g



2 $g(x) = f(x) + 2$

$h(x) = f(x) - 4$

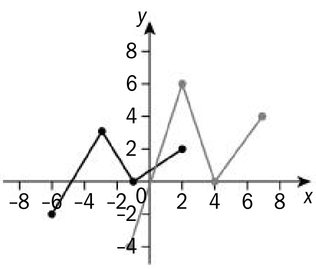
$q(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

3 $q(x) = f(x + 4) - 2$

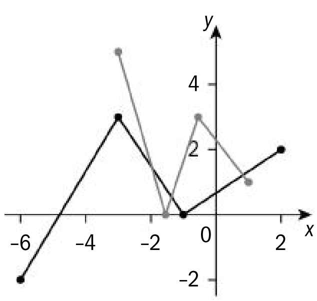
$s(x) = f(x + 4)$

$t(x) = f(x - 2)$

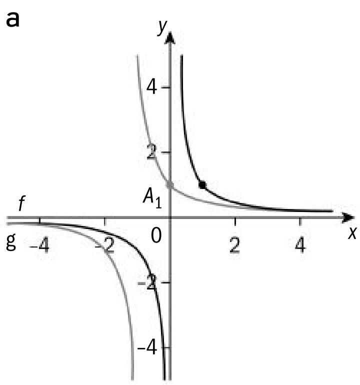
4 a Dominio $-1 \leq x \leq 7$, recorrido $-4 \leq y \leq 6$



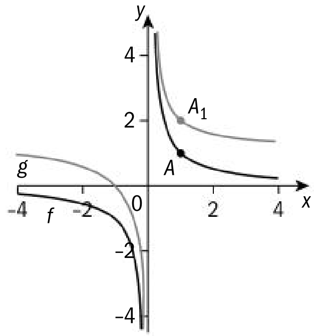
b Dominio $-3 \leq x \leq 1$, recorrido $0 \leq y \leq 5$



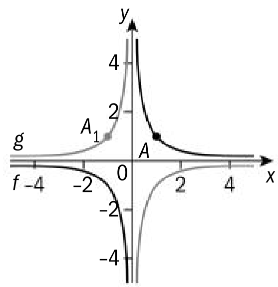
5 a



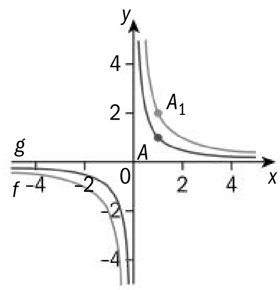
b



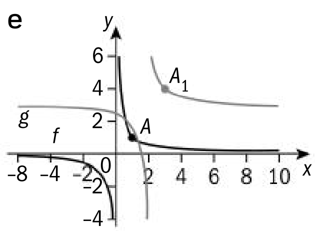
c



d



e

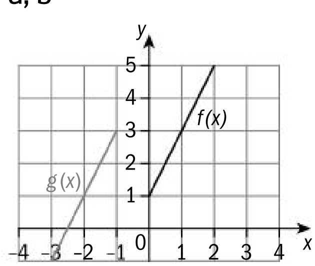


6 a Simetría respecto del eje x

b Traslación horizontal de 3 unidades

c Estiramiento vertical de razón 2, seguido de una simetría respecto del eje x y luego una traslación vertical de 5 unidades

7 a, b



Ejercicio de revisión sin CPG

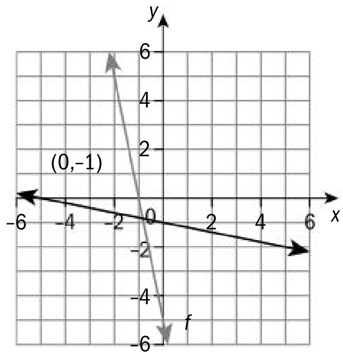
1 a $4a - 13$ b $\frac{2-x}{x}$

2 a $2x^2 - 15x + 28$

b $-2x^2 + 9$

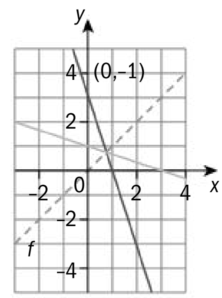
3 a $\frac{2x-17}{3}$ b $\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$

4 $f^{-1}(x) = -5x - 5$

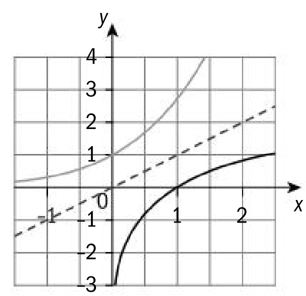


5 a $\frac{x-5}{3}$ b $x^3 - 2$

6 a



b



7 a Dominio $x \in \mathbb{R}$, recorrido $y \geq 0$

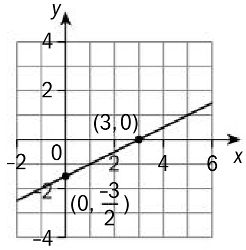
b Dominio $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$, recorrido $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$

8 a $-2(3x + 2)$

b $f(x) = \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{3}x - 5\right)^2$

9 a El gráfico de la función inversa es simétrico respecto de $y = x$.

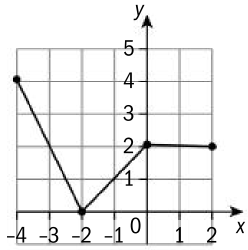
b



10 a -2 b -13

c $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{2}}$

11 a



b P es (4, 1)

12 a $(f \circ g)(x) = 3x + 6$

b $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ $g^{-1}(x) = x - 2$

$f^{-1}(12) = \frac{12}{3} = 4$

$g^{-1}(12) = 12 - 2 = 10$

$f^{-1}(12) + g^{-1}(12) = 4 + 10$

$f^{-1}(12) + g^{-1}(12) = 14$

13 a $(h \circ g)(x) = \dfrac{3(2x-1)}{(2x-1)-2}$

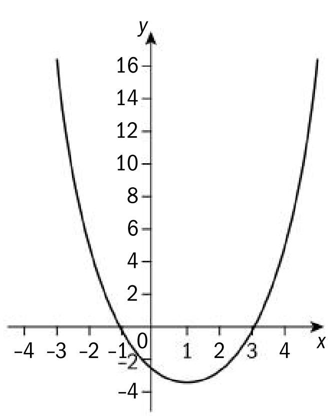
$= \dfrac{6x-3}{2x-3}$

b $x = \frac{1}{2}$

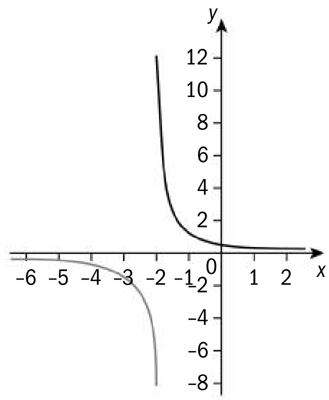
Ejercicio de revisión con CPG

1 Dominio $x \geq -2$, recorrido $y \geq 0$

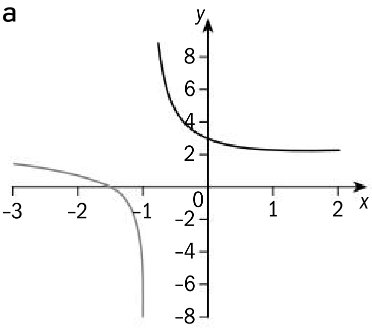
2 Dominio $x \in \mathbb{R}$, recorrido $y \geq -4$



3 Dominio $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$, recorrido $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$

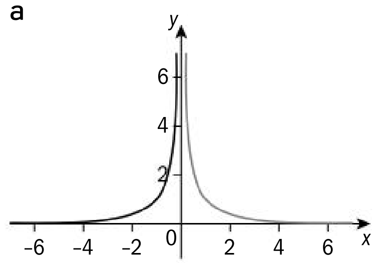


4 a



b Intersección con el eje x $-1{,}5$; intersección con el eje y 3.

5 a

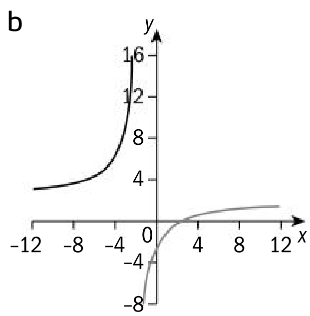


b 0

c Dominio $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, recorrido $y > 0$

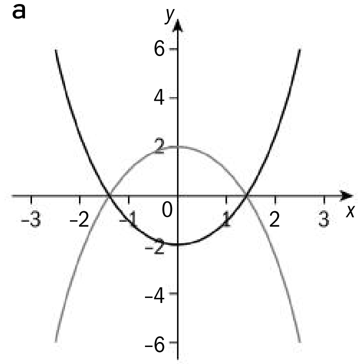
6 a $x = -2$, $y = 2$

b



c $(2{,}5; 0)$, $(0; -2{,}5)$

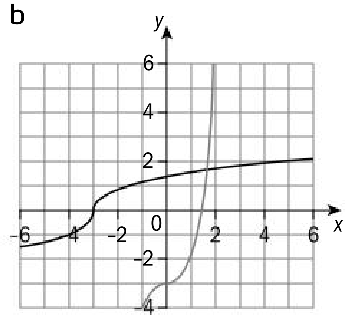
7 a



b $x = \pm\sqrt{2}$

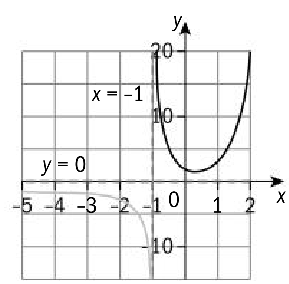
8 a $\sqrt[3]{x+3}$

b



c 1,67

9



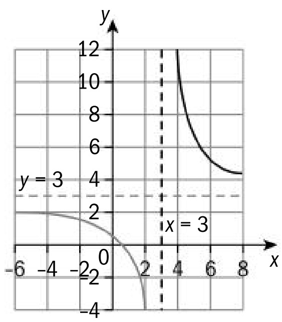
10 a $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$

b $(g^{-1} \circ f)(x) = (3x - 2) + 3$
$= 3x + 1$

c $(f^{-1} \circ g) = \dfrac{(x-3)+2}{3} = \dfrac{x-1}{3}$

d $\dfrac{x-1}{3} = 3x + 1$
$x - 1 = 3(3x + 1)$
$x - 1 = 9x + 3$
$8x = -4$
$x = -\frac{1}{2}$

e



f $x = 3, y = 3$

Capítulo 2

Comprobemos nuestras habilidades

1 **a** $a = 6$

b $x = \pm\sqrt{5}$

c $n = -11$

2 **a** $2k(k - 5)$

b $7a(2a^2 + 3a - 7)$

c $(2x + 3)(x + 2y)$

d $(5a - b)(a - 2)$

e $(n + 1)(n + 3)$

f $(2x - 3)(x + 1)$

g $(m + 6)(m - 6)$

h $(5x + 9y)(5x - 9y)$

Ejercitación 2A

1 **a** $1, 2$

b $-8, 7$

c $5, 6$

d $-5, 5$

e $-8, 6$

f -3

2 **a** $-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}$

b $-2, \frac{4}{5}$

c $-1, \frac{5}{2}$

d $-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$

e $-4, -\frac{2}{3}$

f $-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

Ejercitación 2B

1 **a** $-5, 4$

b $-2, -\frac{2}{3}$

c $-\frac{3}{2}$

d $-2, \frac{25}{2}$

e $-9, 4$

f $-\frac{1}{4}, 1$

2 -3 o 4

3 $\frac{2}{5}$ o 3

Investigación: trinomios cuadrados perfectos

1 -5

2 -3

3 -7

4 4

5 9

6 10

Ejercitación 2C

1 $-4 \pm \sqrt{19}$

2 $\frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

3 $3 \pm 2\sqrt{2}$

4 $\frac{-7 \pm \sqrt{65}}{2}$

5 $1 \pm \sqrt{7}$

6 $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Ejercitación 2D

1 $-3 \pm 2\sqrt{3}$

2 $1 \pm \sqrt{2}$

3 $1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$

4 $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{4}$

5 $-\frac{3}{2}, 2$

6 $\frac{-2 \pm 3\sqrt{6}}{10}$

Ejercitación 2E

1 $\frac{-9 \pm \sqrt{193}}{8}$

2 $-2, \frac{4}{3}$

3 $-1, -\frac{1}{5}$

4 $3 \pm \sqrt{5}$

5 Sin solución

6 $\frac{-5 \pm 2\sqrt{10}}{3}$

7 $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

8 $\frac{9 \pm \sqrt{113}}{4}$

9 $x = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{4}.$

10 $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{4}$

Ejercitación 2F

1 18, 32

2 24 m, 11 m

3 10

4 18 cm, 21 cm

5 2,99 segundos

Investigación: raíces de ecuaciones cuadráticas

1 **a** 4 **b** $\frac{3}{2}$

c $-\frac{1}{5}$

2 **a** $-7, 2$ **b** $\frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$

c $\frac{3 \pm \sqrt{89}}{10}$

3 **a** Sin solución

b Sin solución

c Sin solución

Ejercitación 2G

1 **a** 37; dos raíces reales distintas

b 8; dos raíces reales distintas

c −79; sin raíces reales

d 0; dos raíces reales iguales

e −23; sin raíces reales

f −800; sin raíces reales

2 a $p < 4$ b $p < 3{,}125$

c $|p| > 4\sqrt{2}$ d $|p| > \frac{2}{3}$

3 a $k = 25$ b $k = 1{,}125$

c $k = \pm\sqrt{15}$ d $k = 0; -0{,}75$

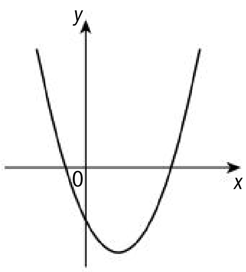
4 a $m > 9$ b $-2 < m < 2$

c $m > \frac{16}{3}$ d $m > 12$

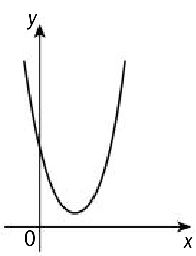
5 $0 < q < 1$

Investigación: gráficos de funciones cuadráticas

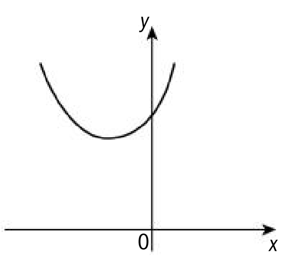
a Discriminante $\triangle = 29$



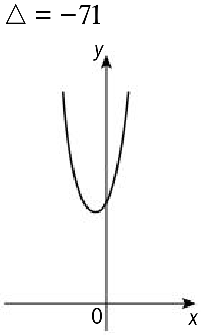
b $\triangle = -12$



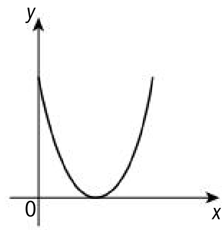
c $\triangle = -24$



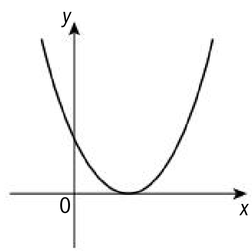
d $\triangle = -71$



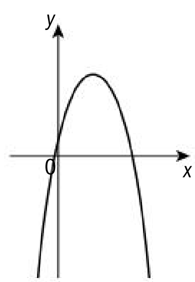
e $\triangle = 0$



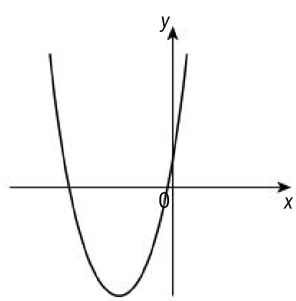
f $\triangle = 0$



g $\triangle = 33$



h $\triangle = 37$



Si $b^2 - 4ac > 0$, el gráfico corta al eje x dos veces; si $b^2 - 4ac = 0$, el gráfico es tangente al eje x; si $b^2 - 4ac < 0$, el gráfico no corta al eje x.

Ejercitación 2H

1 a $x = -4; (0, 5)$

b $x = 3; (0, -3)$

c $x = -1; (0, 6)$

d $x = \frac{5}{3}; (0, 9)$

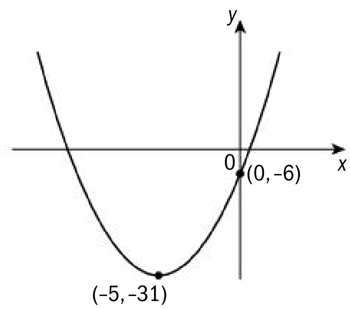
2 a $(7, -2); (0, 47)$

b $(-5, 1); (0, 26)$

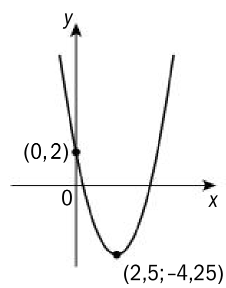
c $(1, 6); (0, 10)$

d $(-2, -7); (0, 5)$

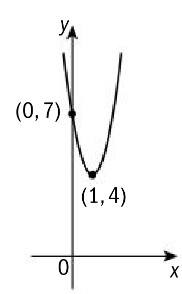
3 a $f(x) = (x + 5)^2 - 31$



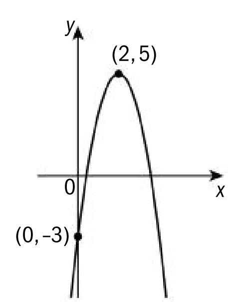
b $f(x) = (x - 2{,}5)^2 - 4{,}25$



c $f(x) = 3(x - 1)^2 + 4$



d $f(x) = -2(x - 2)^2 + 5$



Ejercitación 2I

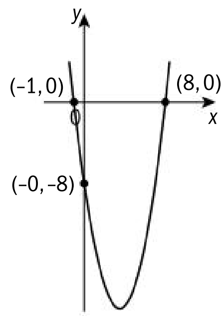
1 a $(-3,0)$; $(7,0)$; $(0,-21)$

b $(4,0)$; $(5,0)$; $(0,40)$

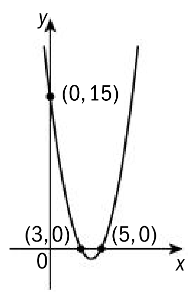
c $(-2,0)$; $(-1,0)$; $(0,-6)$

d $(-6,0)$; $(2,0)$; $(0,-60)$

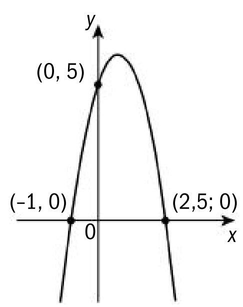
2 a $y=(x-8)(x+1)$



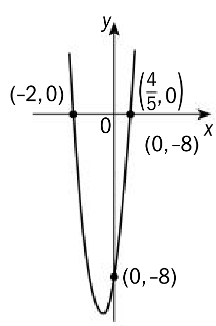
b $y=(x-3)(x-5)$



c $y=-2(x+1)(x-2{,}5)$

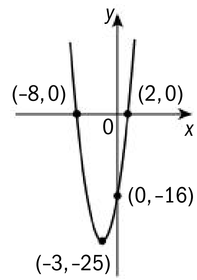


d $y=5(x+2)\left(x-\frac{4}{5}\right)$



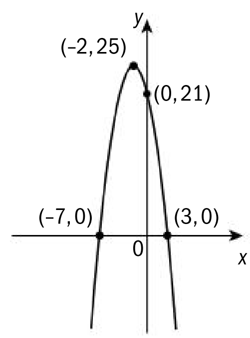
3 a $y=(x+3)^2-25$;

$y=(x+8)(x-2)$



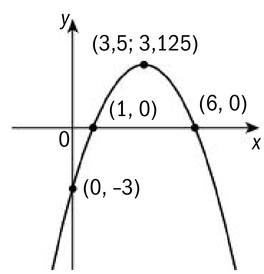
b $y=-(x+2)^2+25$;

$y=-(x+7)(x-3)$



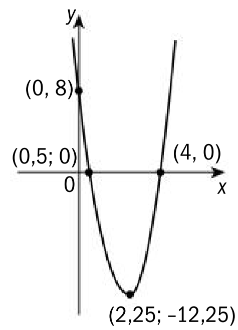
c $y=-0{,}5(x-3{,}5)^2+3{,}125$;

$y=-0{,}5(x-1)(x-6)$



d $y=4(x-2{,}25)^2-12{,}25$;

$y=4(x-0{,}5)(x-4)$



4 a i 0 ii 6

b $x=3$

c $(3,-18)$

5 a $(f\circ g)(x)=(x-2)^2+3$

b $(2, 3)$

c $h(x)=x^2-14x+50$

d 50

Ejercitación 2J

1 $y=x^2-4x+5$

2 $y=x^2-4x-12$

3 $y=-3x^2-6x+5$

4 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-3$

5 $y=2x^2+7x+4$

6 $y=-0{,}4x^2+8x$

7 $y=-x^2+4x+21$

8 $y=12x^2-12x+3$

Ejercitación 2K

1 a 14,5 metros

b 1,42 segundos

2 14 cm, 18 cm

3 a $10-x$

c 50 cm^2

4 12,1 cm

5 17 m, 46 m

6 7, 9, 11

7 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

8 28,125 m^2

9 60 km h^{-1}, 70 km h^{-1}

10 6 horas

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a $-6, 2$

b 8

c $-\frac{7}{3}, 1$

d 3, 4

e $-1\pm\sqrt{13}$

f $\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$

2 a -4

b $-4, 1$

c $x=-1{,}5$

d $-1{,}5$

3 a $-5, 1$

b -2

4 a $(-3, -6)$

b $\frac{1}{2}$

c 12

5 $\pm\sqrt{3}$

6 a $f(x) = 2(x+3)^2 - 13$

b $(1, -5)$

7 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 12$

Ejercicio de revisión con CPG

1 a $-0{,}907;\ 2{,}57$

b $-4{,}35;\ 0{,}345$

c $-2{,}58;\ 0{,}581$

d $-1{,}82;\ 0{,}220$

2 a 20 m

b 31,5 m

c 3,06 s

d 4,07 s

3 21, 68

4 $a = 0{,}4$, $b = 3$, $c = 2$

5 60 km h^{-1}

Capítulo 3

Comprobemos nuestras habilidades

1 a $\frac{4}{7}$ b $1\frac{4}{35}$

c $\frac{2}{15}$ d $\frac{22}{27}$

e $\frac{3}{7}$

2 a 0,625 b 0,7

c 0,42 d 0,16

e 15 f 0,0484

g 0,0096

Ejercitación 3A

1 a $\frac{1}{2}$ b $\frac{1}{4}$

c $\frac{1}{4}$ d $\frac{3}{4}$

e $\frac{3}{8}$

2 $\frac{1}{5}$

3 a i 0,21 ii 0,33

b 252

4 a 0,27

b No, las frecuencias son muy diferentes.

c 450

5 a $\frac{2}{11}$ b 0

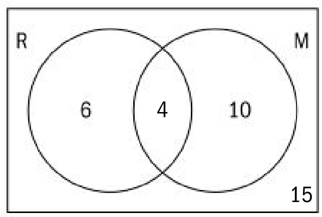
c $\frac{5}{11}$

6 0,2

7 a $\frac{1}{2}$ b $\frac{13}{40}$

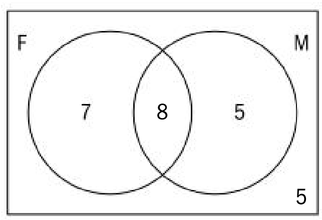
Ejercitación 3B

1



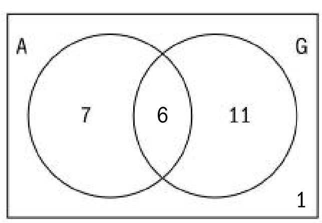
$\frac{4}{7}$

2



$\frac{8}{25}$

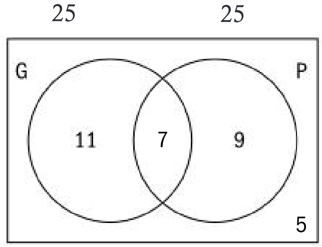
3



Seis han hecho ambas actividades.

a $\frac{6}{25}$ b $\frac{11}{25}$

4

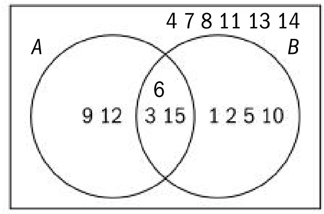


Cinco no practican ninguna de las actividades.

a $\frac{11}{32}$ b $\frac{9}{32}$

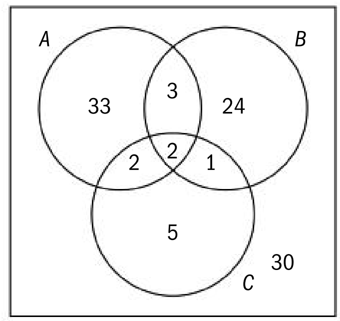
5 a $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$



c i $\frac{1}{5}$ ii $\frac{2}{5}$

6



a 0,33 b 0,24

c 0,3

Ejercitación 3C

1 a $\frac{51}{250}$

b $\frac{53}{100}$

c $\frac{299}{500}$

2 a $\frac{2}{5}$

b $\frac{3}{5}$

c $\frac{1}{2}$

3 $\frac{17}{20}$

4 a $\frac{4}{13}$ b $\frac{9}{26}$

c $\frac{2}{13}$ d $\frac{1}{2}$

5 a 0,5 b 0,5

6 $\frac{11}{60}$

7 a $\frac{1}{4}$ b $\frac{3}{4}$

8 a 0,6 b 0,4
c 0,9

Ejercitación 3D

1 a No b Sí
c No d Sí
e No f No
g No

2 Sí

3 $\frac{57}{89}$

4 a $\frac{7}{12}$ b $\frac{47}{60}$
c $\frac{13}{60}$

Ejercitación 3E

1 CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX
a $\frac{1}{2}$ b $\frac{3}{8}$
c $\frac{1}{4}$

2

		AZUL			
		1	2	3	4
ROJO	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

a $\frac{3}{8}$ b $\frac{3}{8}$
c $\frac{1}{4}$ d $\frac{9}{16}$

3

		Caja 1		
		1	2	3
Caja 2	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)

a $\frac{1}{6}$ b $\frac{1}{4}$
c $\frac{3}{4}$ d $\frac{5}{12}$
e $\frac{2}{3}$

4

		Segundo lanzamiento					
		0	1	2	3	4	5
Primer lanzamiento	0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)
	1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
	2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
	3	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
	4	(4, 0)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)
	5	(5, 0)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)

a $\frac{1}{6}$ b $\frac{5}{9}$
c $\frac{13}{18}$ d $\frac{1}{3}$
e $\frac{3}{4}$

5 a $\frac{2}{9}$ b $\frac{1}{9}$
c $\frac{2}{9}$

Ejercitación 3F

1 $\frac{1}{25}$

2 $\frac{2}{169}$

3 $\frac{64}{125}$

4 0,6375

5 a $P(B) = 0{,}2$; $P(B \cap C) = 0{,}16$
b No son independientes.

6 $\frac{5}{12}$

7 $\frac{1}{59049}$

8 $\frac{1}{256}$

9 a 0,4
b $P(E) \times P(F) = P(E \cap F)$
c $P(E \cap F) \neq 0$
d 0,64

10 $\frac{2}{27}$

11 $\frac{1}{27}$

12 a 0,27 b 0,63
c 0,07

13 0,18; 0,28

14 a $\frac{1}{1296}$ b $\frac{1}{216}$

15 Obtener un seis en cuatro lanzamientos con un dado.

16 a 0,729 b 0,271

Ejercitación 3G

1 12 toman ambas clases.
a $\frac{8}{27}$ b $\frac{23}{27}$
c $\frac{4}{5}$

2 a 0,2 b $\frac{1}{3}$
c $\frac{7}{15}$

3 $\frac{39}{48}$

4 a $\frac{1}{3}$ b $\frac{2}{5}$
c $\frac{3}{5}$ d $\frac{1}{2}$

5 $\frac{61}{95}$

6 $\frac{1}{6}$

7 a 0 b 0
c 0,63

8 67,3%

9 $\frac{34}{47}$

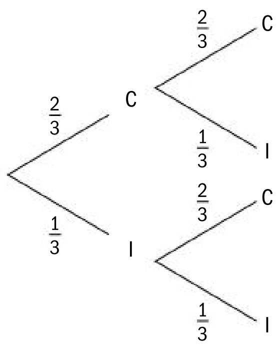
10 a $\frac{1}{10}$ b $\frac{43}{50}$
c $\frac{11}{13}$

11 0,3

12 $\frac{1}{3}$

Ejercitación 3H

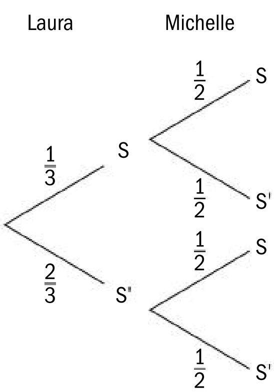
1 a



b $\frac{4}{9}$

c $\frac{8}{9}$

2



$\frac{1}{3}$

3 a $\frac{1}{5}$

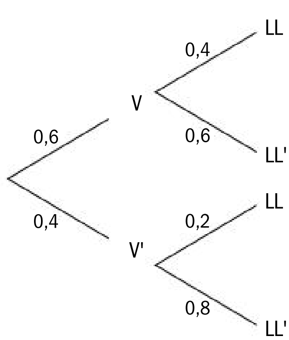
b $\frac{29}{60}$

4 $\frac{4}{9}$

5 a 0,48

b 0,64

6 a



b 0,32 c 0,4624

Ejercitación 3I

1 a $\frac{11}{1105}$ b $\frac{132}{1105}$

2 a $\frac{5}{33}$ b $\frac{15}{22}$

c $\frac{1}{2}$

3 a $\frac{1}{12}$ b $\frac{5}{18}$

c $\frac{5}{18}$ d $\frac{5}{12}$

4 $\frac{120}{1001}$

5 a $\frac{2}{5}$ b $\frac{8}{15}$

6 a $\frac{55}{63}$ b $\frac{9}{11}$

c $\frac{7}{11}$ d $\frac{5}{11}$

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a $\frac{1}{5}$ b $\frac{1}{3}$

c $\frac{49}{90}$ d $\frac{1}{15}$

2 $\frac{11}{30}$

3 a 0,55

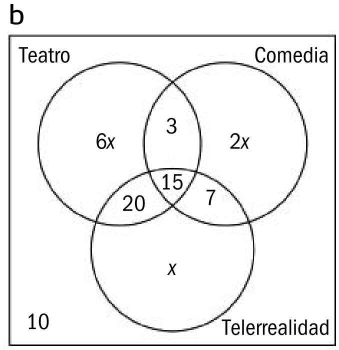
b $P(G \cap P) = S0{,}15$
$P(G) \times P(P) = 0{,}14$
$P(G \cap P) \neq P(G) \times P(P)$

4 a 0,02 b 0,78

c 0,76 d $\frac{1}{30}$

5 a $6x$

b



c $x = 5$

Ejercicio de revisión con CPG

1 a 0,3

b No, $P(G \text{ y } P) \neq 0$

c No, $P(G) \times P(P) \neq P(G \text{ y } P)$

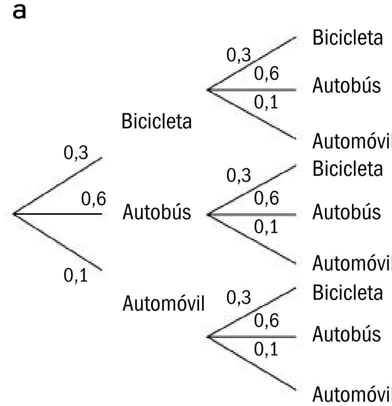
d 0,6

e 0,75

2 a 0,43

b 0,316

3 a



b i 0,09

ii 0,18

iii 0,46

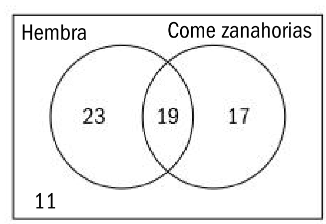
c 0,343

d 0,045

4 a $\frac{3}{8}$ b $\frac{2}{3}$

c $\frac{2}{21}$

5



Hembra y come zanahorias = 19

a $\frac{11}{70}$ b $\frac{19}{36}$

c No, $P(F) \times P(C) \neq P(F \text{ y } C)$

Capítulo 4

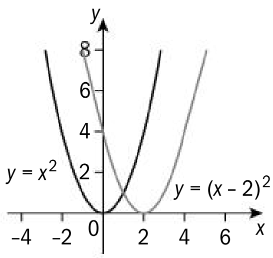
Comprobemos nuestras habilidades

1 a $\frac{81}{256}$ b $\frac{1}{128}$

c 1×10^{-9}

2 a 3 b 5 c 4

3



Investigación: qué sucede al plegar el papel

Número de dobleces	Número de láminas	Espesor (km)	Tan alto como
0	1	1×10^{-7}	Trozo de papel
1	2	2×10^{-7}	
2	4	4×10^{-7}	Tarjeta de crédito
3	8	8×10^{-7}	
4	16	$1{,}6 \times 10^{-6}$	
5	32	$3{,}2 \times 10^{-6}$	
6	64	$6{,}4 \times 10^{-6}$	
7	128	$1{,}28 \times 10^{-5}$	Libro de texto
8	256	$2{,}56 \times 10^{-5}$	
9	512	$5{,}12 \times 10^{-5}$	

3 a 13 dobleces

b 15 dobleces

4 113 000 000 km

Ejercitación 4A

1 a x^5 b $6p^6q^2$

c $\frac{1}{3}x^3y^3$ d x^4y^6

2 a x^3 b a^4

c $\frac{a^4}{4}$ d $2x^2y^3$

3 a x^{12} b $27t^6$

c $3x^6y^4$ d $-y^6$

Ejercitación 4B

1 a 3 b 5 c 16

d 4 e $\frac{4}{9}$

2 a $\frac{1}{8}$ b $\frac{1}{4}$ c $\frac{1}{3}$

d $\frac{1}{16}$ e $\frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

Ejercitación 4C

1 a $8a^3$ b $\frac{2}{x^2}$ c q^3

d $\frac{d}{3c}$ e $\frac{1}{4P^{\frac{4}{3}}}$

2 a $\frac{a^{\frac{5}{2}}}{b}$ b $\frac{y}{5x^3}$ c $\frac{3x^3}{y^2}$

Ejercitación 4D

1 a $x = 5$ b $x = -2$

c $x = 3, -1$ d $x = \frac{3}{2}$

e $x = 3$

2 a $x = \frac{5}{2}$ b $x = -4$

c $x = -\frac{3}{5}$ d $x = \frac{4}{5}$

3 $x = -6$

Ejercitación 4E

1 a $x = \pm 3$ b $x = 2$ c $x = \pm\frac{1}{4}$

d $x = \pm\frac{1}{2}$ e $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ f $x = \frac{3}{4}$

2 a $x = 8$ b $x = 625$

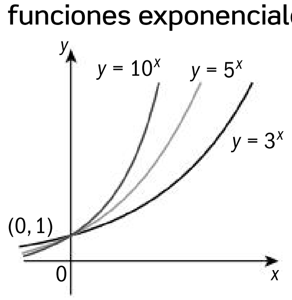
c $x = \frac{1}{256}$ d $x = 64$

e $x = 32$ f $x = \frac{1}{16}$

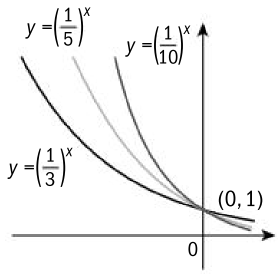
3 a $x = \frac{1}{25}$ b $x = \frac{1}{216}$

c $x = 512$ d $x = \frac{27}{64}$

Investigación: gráficos de funciones exponenciales 1



Investigación: gráficos de funciones exponenciales 2

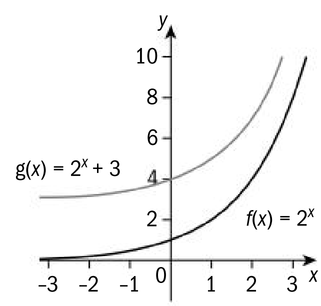


Investigación: interés compuesto

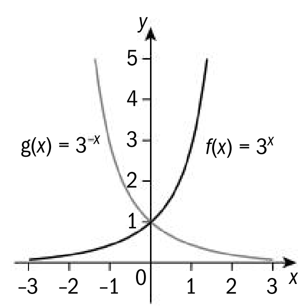
Semestral	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	2,25
Trimestral	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	2,441 406 25
Mensual	$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	2,613 035 290 22…
Semanal	$\left(1+\frac{1}{52}\right)^{52}$	2,692 596 954 44…
Diaria	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	2,714 567 482 02…
Por hora	$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	2,718 126 690 63…
Por minuto	$\left(1+\frac{1}{525\,600}\right)^{525\,600}$	2,718 279 215 4…
Por segundo	$\left(1+\frac{1}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000}$	2,718 282 472 54…

Ejercitación 4F

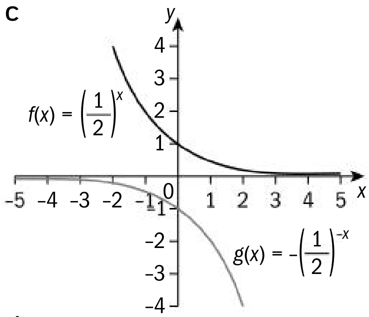
1 a



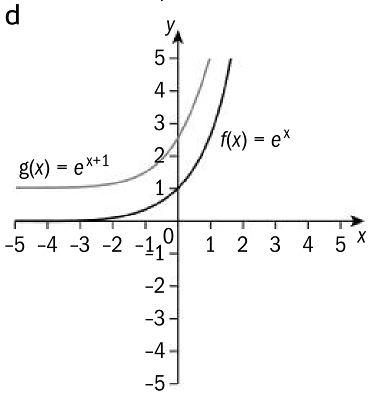
b



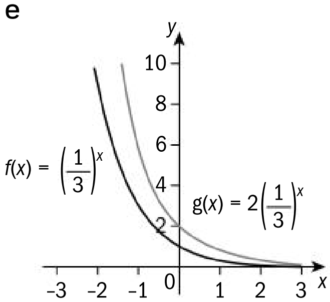
c



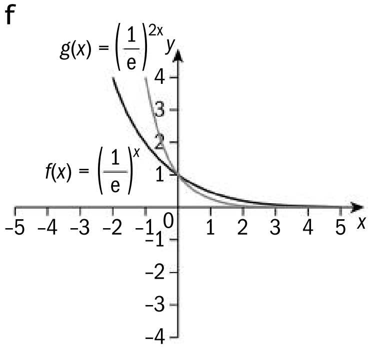
d



e



f



2 Dominio Recorrido

	Dominio	Recorrido
a	$x \in \mathbb{R}$	$g(x) > 3$
b	$x \in \mathbb{R}$	$g(x) > 0$
c	$x \in \mathbb{R}$	$g(x) < 0$
d	$x \in \mathbb{R}$	$g(x) > 0$
e	$x \in \mathbb{R}$	$g(x) > 0$
f	$x \in \mathbb{R}$	$g(x) > 0$

Ejercitación 4G

1 a 2 b $\frac{1}{2}$ c 6 d 0

2 a −4 b $\frac{3}{2}$ c $\frac{3}{5}$ d 4

Ejercitación 4H

1 a 1 b 1 c 1
d 0 e 0 f 0

Ejercitación 4I

1 a $\log_2 x = 9$ b $\log_3 x = 5$
c $\log_{10} x = 4$ d $\log_a x = b$

2 a $2^x = 8$ b $3^x = 27$
c $10^x = 1000$ d $a^x = b$

3 a 64 b 81 c 8
d 36 e $\frac{1}{32}$

Investigación: funciones inversas

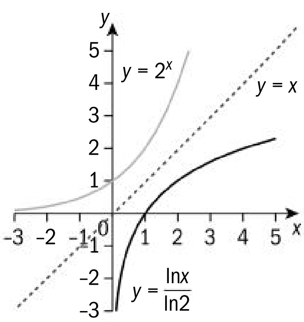
a La función $y = 2^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b La función inversa $y = 2^x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−3	−2	−1	0	1	2	3

c

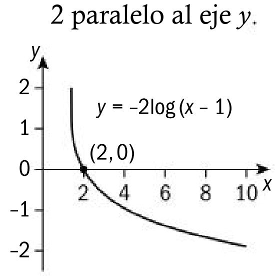


d Los gráficos son simétricos uno de otro respecto de la recta $y = x$.

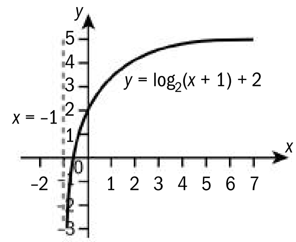
Ejercitación 4J

1 a La curva se desplaza dos unidades hacia abajo.
b La curva se traslada 2 unidades a la derecha.
c La curva se estira con un estiramiento de razón 2 paralelo al eje y.

2



3



4 $a = 3$

5 $f^{-1}(2) = 9$

Ejercitación 4K

1 a 0,477 b 1,20
c 0,805 d 0,861
e 0,861 f −0,0969
g 0,228 h 0,954

Ejercitación 4L

1 a $x = 0{,}425$ b $x = -5{,}81$
c $x = 0$ d $x = -0{,}693$
e $x = -3{,}51$

2 a 0,367 b −0,222
c 0 d −0,301

3 a 100 b $\frac{1}{10}$
c 1 d 0,000 007 94

4 a 12 b 4
c $\sqrt{3}$ d 4

5 a 5 b 2
c 0 d 1
e −3

6 $f^{-1}(x) = \frac{1 + \ln x}{2}$, $x > 0$

7 Dominio $[e^{-0,5}, e]$; recorrido $[-2, 4]$

8 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}e^x$

9 $(g \circ f)(x) = 2x - 2$

Ejercitación 4M

1 a log 30 b log 12 c log 4
d log 7 e $\log \frac{x^3}{y^2}$
f $\log \frac{x}{yz}$ g $\log \frac{1}{x^2 y}$

2 a $\log_2\left(\frac{27}{2}\right)$ b $\log_3 \frac{24}{25}$
c $\log_a 6$ d $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ o $-\ln 2$
e $\ln\left(\frac{8}{e^2}\right)$ f $\log_2\left(\frac{x^4 y^{\frac{1}{3}}}{z^5}\right)$

3 a 2 b 3 c 2
d 3 e 1

Ejercitación 4N

1 a $p+q$ b $3p$ c $q-p$

d $\frac{q}{2}$ e $2q-\frac{p}{2}$

2 $6x-3y-6z$

3 a $1+\log x$ b $2-2\log x$

c $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log x$ d $-1-\frac{1}{2}\log x$

4 $y=3a-4$ 5 $-3-2\log_3 x$

6 $e^{x\ln 2}=e^{\ln 2^x}=2^x$

Ejercitación 4O

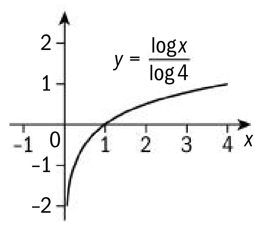
1 a 2,81 b −1,21 c −0,325
d 0,514 e 12,4

2 $\frac{y}{2}$

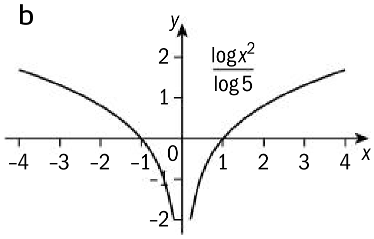
3 a $\frac{y}{x}$ b $\frac{x}{y}$ c $\frac{2y}{x}$

d $2x+y$ e $\frac{x+y}{y}$ f $\frac{y-x}{x}$

4 a



b



5 a $2b$ b $\frac{b}{2}$

c $-2b$ d $-\frac{b}{4}$

Ejercitación 4P

1 a 2,32 b 3,56 c −1,76
d 0,425 e 0,229 f −3,64
g 1,79 h −11,0

2 a 6,78 b 2,36
c −3,88 d 0,263
e 0,526 f 2,04
g −99,9

Ejercitación 4Q

1 a 1,16 b 1,41 c −0,557
d −0,0570 e 11,1

2 a $\frac{\ln 500}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$ b $\frac{\ln\left(\frac{8}{5}\right)}{\ln\left(\frac{3}{7}\right)}$

c $\frac{\ln\left(\frac{144}{5}\right)}{\ln 108}$ d $\frac{\ln 64}{\ln 3}$

3 a $x=\ln 2$ b $x=\frac{\ln 3}{\ln 2}$

Ejercitación 4R

1 a $x=\frac{1}{5}$ b $x=1$

c $x=\frac{3}{7}$ d $x=\sqrt{2}$

e $x=1{,}62$

Ejercitación 4S

1 a $x=83$ b $x=14$

c $x=\frac{95}{32}$

2 a $x=9$ b $x=6$
c Sin solución

3 $A=x(2x+7)=2x^2+7x$
$x=0{,}5$

4 $x=4$

5 $x=16$

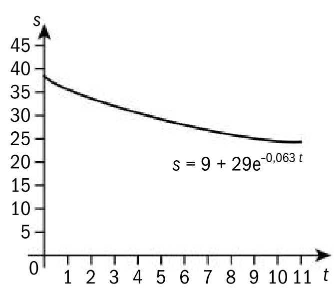
Ejercitación 4T

1 a $450\times 1{,}032^n$
b 10 años

2 a i 121 ii 195
b 9,6 días (10 días)

3 49,4 horas

4 a



b $38\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ c $9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
d $10{,}7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ e 16,9 s

5 $a=4$, $b=3$

Ejercicio de revisión con CPG

1 3,52

2 a $x=0{,}548$ b $x=-0{,}954$
c $x=-1{,}18$

3 a $x=5$ b $x=2$
c $x=3{,}60$ d $x=1, 4$
e $x=100$, $\frac{1}{100}$

4 a $f(x)>0$, recorrido de $g(x)$ son todos los números reales.
b Tienen inversas porque son funciones inyectivas.
$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln x$; $g^{-1}(x)=e^{\frac{2}{3}x}$
c $(f\circ g)(x)=x^3$; $(g\circ f)(x)=3x$
d $x=\sqrt{3}$

5 a 218 393 insectos
b 8,66 días

Ejercicio de revisión sin CPG

1 $x=\frac{3}{11}$

2 $x=\frac{\log\left(\frac{3}{5}\right)}{\log\left(\frac{35}{9}\right)}$

3 4,5

4 $\log_3\frac{x^4\sqrt[3]{y}}{z^5}$

5 a $x=7$ b $x=2$

c $x=1{,}4$ d $x=\frac{6}{7}$

6 a $\frac{n}{m}$ b $n-m$

c $2m$ d $\frac{m+n}{n}$

7 Traslación 1 unidad hacia la derecha, estiramiento de razón $\frac{1}{3}$ paralelo al eje x, traslación 2 unidades hacia arriba.

8 a $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{3}\right)$

b $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\log x$

c $f^{-1}(x)=\frac{2^x}{4}=2^{x-2}$

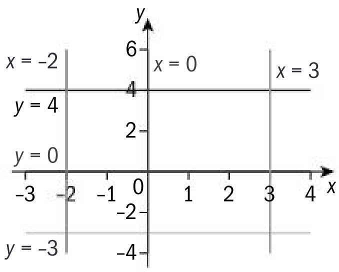
9 $a=2$, $b=4$

Capítulo 5

Comprobemos nuestros habilidades

1 a $-8x + 20$ b $12x - 18$
 c $-x^3 - 7x$
 d $x^4 + 6x^3 + 9x^2$
 e $x^3 + 5x^2 - 24x$

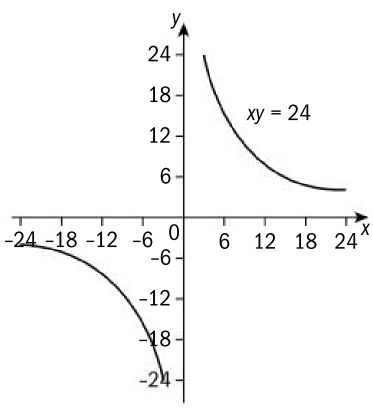
2



3 A es un desplazamiento horizontal de 4 unidades a la derecha. La función A es $y = (x - 4)^3$.
B es un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia abajo. La función B es $y = x^3 - 2$.

Investigación: representación gráfica de productos

x	24	12	8	3	6	4	2	1
y	1	2	3	8	4	6	12	24



A medida que y crece, x decrece y viceversa.
El gráfico se acerca cada vez más a los ejes a medida que aumentan los valores de x e y.

Ejercitación 5A

1 a $\frac{1}{2}$ b $\frac{1}{3}$ c $-\frac{1}{3}$
 d -1 e $\frac{3}{2}$ f $\frac{11}{7}$
 g $-\frac{2}{3}$ h $\frac{2}{7}$

2 a $\frac{2}{13}$ b $\frac{1}{x}$ c $\frac{1}{y}$
 d $\frac{1}{3x}$ e $\frac{1}{4y}$ f $\frac{9}{2x}$
 g $\frac{5}{3a}$ h $\frac{3d}{2}$ i $\frac{t}{d}$
 j $\frac{x-1}{x+1}$

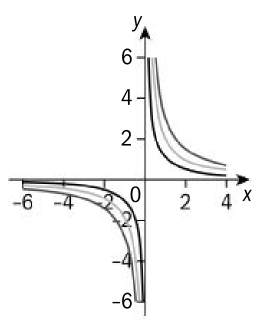
3 a $6 \times \frac{1}{6} = 1$ b $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$
 c $\frac{2c}{3d} \times \frac{3d}{2c} = 1$

4 a 4 b x

5 a i 0,5 ii 0,05
 iii 0,005 iv 0,0005
 b y decrece, acercándose a cero.
 c $y = \frac{24}{x}$, por lo tanto no puede ser cero.
 d i 0,5 ii 0,05
 iii 0,005 iv 0,0005
 e x decrece, acercándose a cero.
 f $x = \frac{24}{y}$ por lo tanto, nunca puede ser cero.

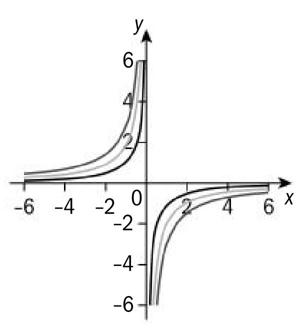
Investigación: gráficos de funciones recíprocas

1 a



El numerador indica la razón del estiramiento paralelo al eje y.

2



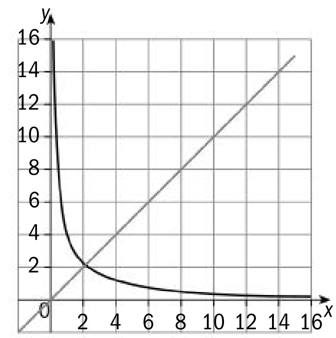
El cambio del signo del numerador produce una simetría de la función original respecto del eje x.

3 a

x	0,25	0,4	0,5	1	2	4	8	10	16
f(x)	16	10	8	4	2	1	0,5	0,4	0,25

 b Los valores de x y $f(x)$ son los mismos pero en orden inverso.

 c d e

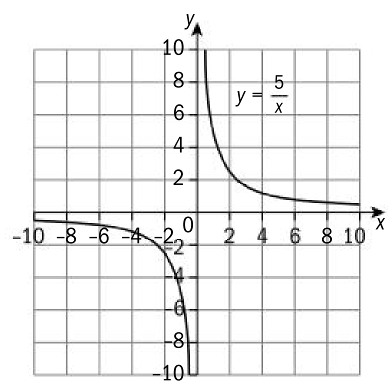


 f La función es simétrica de sí misma.

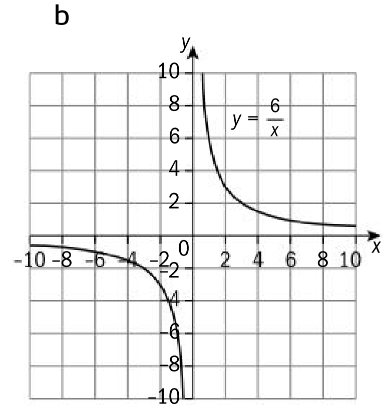
 g La función es su propia inversa.

Ejercitación 5B

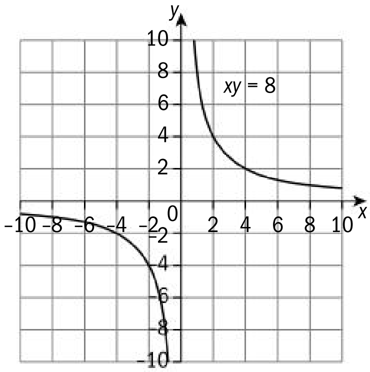
1 a



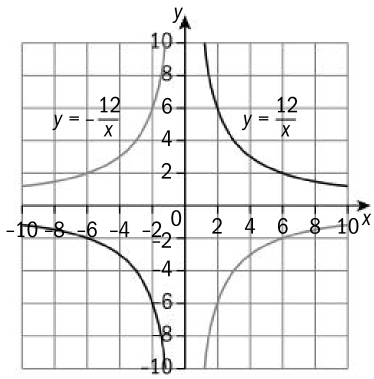
 b



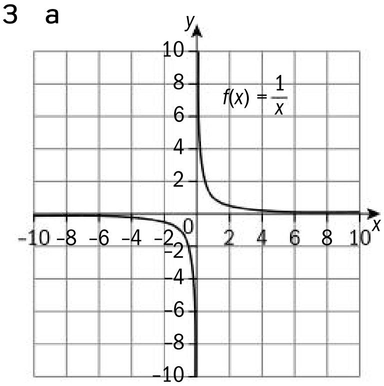
c



2

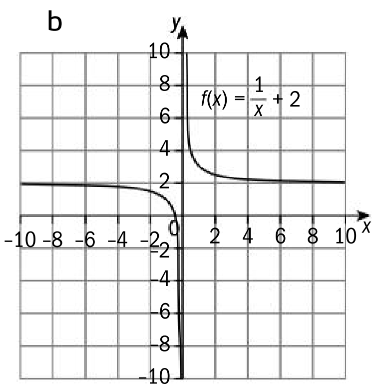


3 a



$x = 0$ e $y = 0$

b



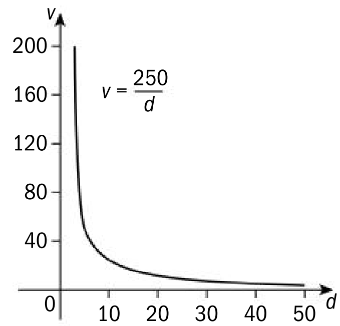
$x = 0$ e $y = 2$

4 a $y = 0, x = 0$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

b $y = 2, x = 0$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 2$

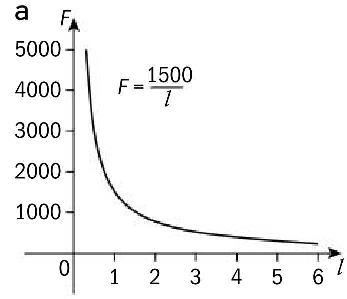
c $y = -2, x = 0$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -2$

5 a



b 25 m c 2,5 m s^{-1}

6 a

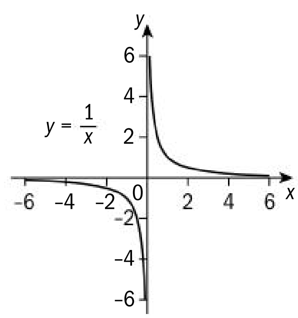


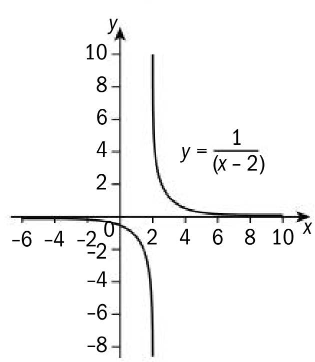
b 750 N

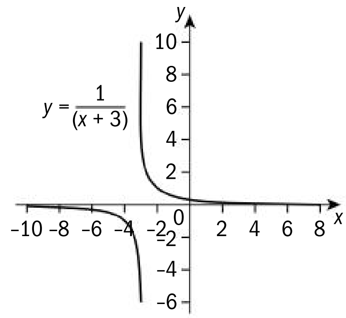
c i 1,5 m ii 075 m
iii 0,5 m

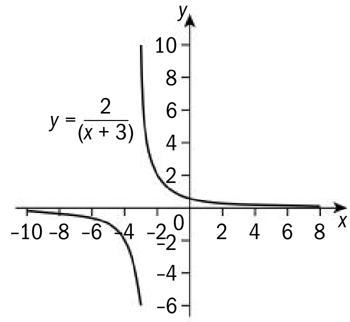
Investigación: gráficos de funciones racionales 1

a









b

Función racional	Asíntota vertical	Asíntota horizontal	Dominio	Recorrido
$y = \frac{1}{x}$	$x = 0$	$y = 0$	$x \in \mathbb{R}, x \neq 0$	$y \in \mathbb{R}, y \neq 0$
$y = \frac{1}{x-2}$	$x = 2$	$y = 0$	$x \in \mathbb{R}, x \neq 2$	$y \in \mathbb{R}, y \neq 0$
$y = \frac{1}{x+3}$	$x = -3$	$y = 0$	$x \in \mathbb{R}, x \neq -3$	$y \in \mathbb{R}, y \neq 0$
$y = \frac{2}{x+3}$	$x = -3$	$y = 0$	$x \in \mathbb{R}, x \neq -3$	$y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

c La asíntota vertical es el valor de x que hace que el denominador sea igual a cero.

d Son todos $y = 0$.

e $x \in \mathbb{R}, x \neq$ el valor de x de la asíntota

f $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$, el valor de y de la asíntota horizontal

Ejercitación 5C

1 a $y = 0, x = -1$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -1$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

b $y = 0, x = 4$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 4$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

c $y = 0, x = 5$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 5$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

d $y = 0, x = -1$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -1$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

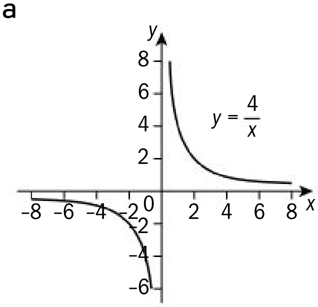
e $y = 2, x = -1$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -1$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 2$

f $y = -2, x = -1$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -1$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -2$

g $y = 2, x = 3$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 2$

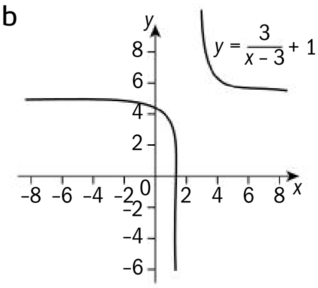
h $y = -2, x = -3$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -3$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -2$

2 a



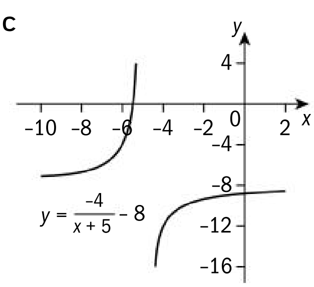
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

b



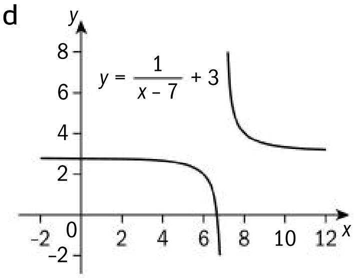
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 1$

c



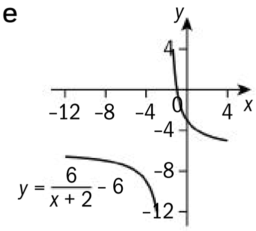
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -5$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -8$

d



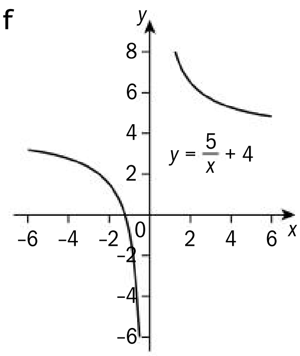
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 7$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 3$

e



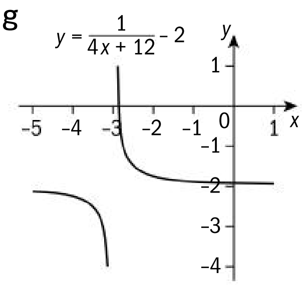
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -6$

f



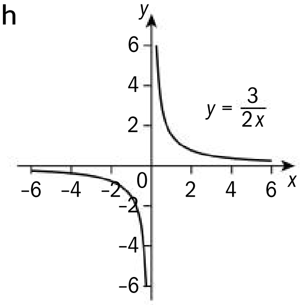
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 4$

g



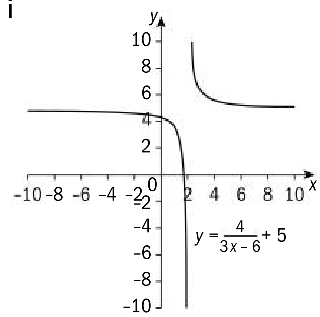
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -3$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -2$

h



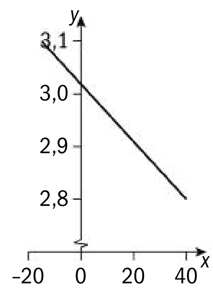
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

i



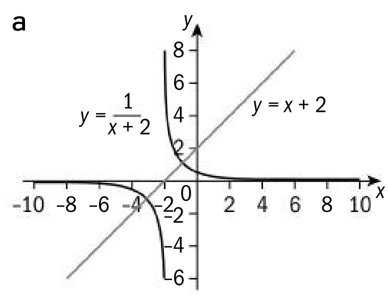
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 5$

3



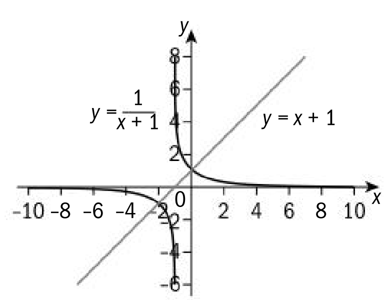
b 3,9°C

4 a



La función lineal es un eje de simetría de la función racional. La función lineal corta al eje x en el mismo lugar que la asíntota vertical de la función racional.

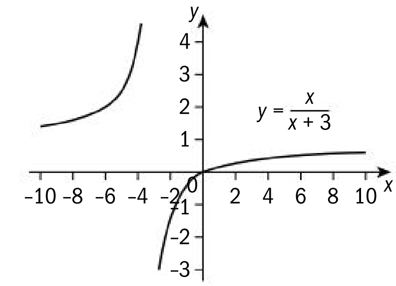
b

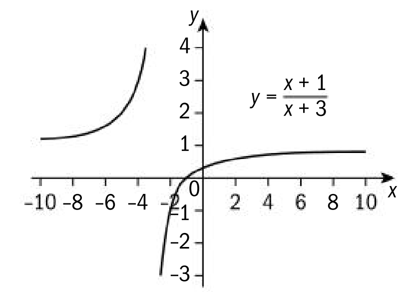


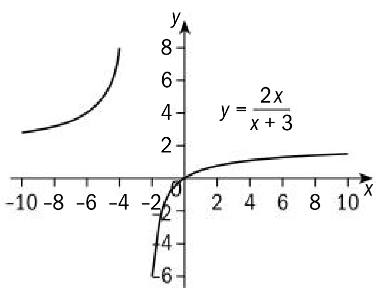
La función lineal es un eje de simetría de la función racional. La función lineal corta al eje x en el mismo lugar que la asíntota vertical de la función racional.

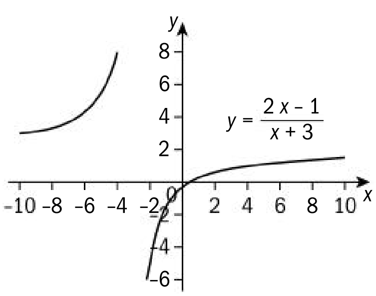
Investigación: gráficos de funciones racionales 2

a









b

Función racional	Asíntota vertical	Asíntota horizontal	Dominio	Recorrido
$y = \frac{x}{x+3}$	$x = -3$	$y = 1$	$x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$	$y \in \mathbb{R}$, $y \neq 1$
$y = \frac{x+1}{x+3}$	$x = -3$	$y = 1$	$x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$	$y \in \mathbb{R}$, $y \neq 1$
$y = \frac{2x}{x+3}$	$x = -3$	$y = 2$	$x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$	$y \in \mathbb{R}$, $y \neq 2$
$y = \frac{2x-1}{x+3}$	$x = -3$	$y = 2$	$x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$	$y \in \mathbb{R}$, $y \neq 2$

c La asíntota horizontal es el cociente de los coeficientes de x.

d El dominio excluye el valor de x de la asíntota vertical.

Ejercitación 5D

1 a $y = 1, x = 3$

Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 1$

b $y = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{3}$

Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{3}$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq \frac{2}{3}$

c $y = \frac{3}{4}, x = -\frac{5}{4}$

Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{5}{4}$

Recorrido $x \in \mathbb{R}, y \neq \frac{3}{4}$

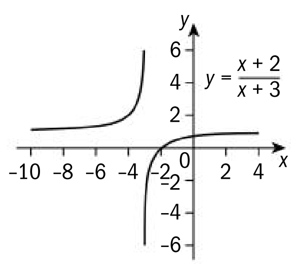
d $y = \frac{17}{8}, x = -\frac{1}{4}$

Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{1}{4}$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq \frac{17}{8}$

2 a iii, b i, c iv, d ii

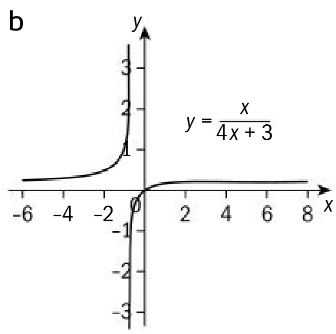
3 a



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -3$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 1$

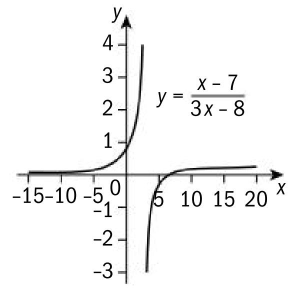
b



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{3}{4}$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq \frac{1}{4}$

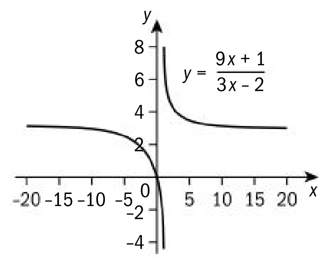
c



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{8}{3}$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq \frac{1}{3}$

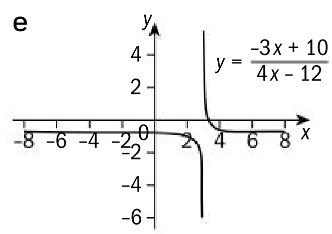
d



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{2}{3}$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 3$

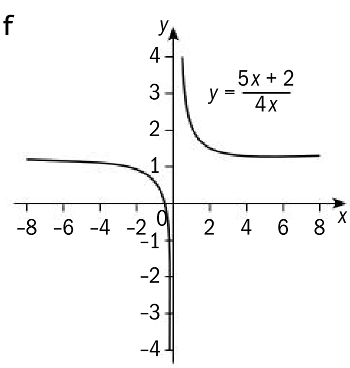
e



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -\frac{3}{4}$

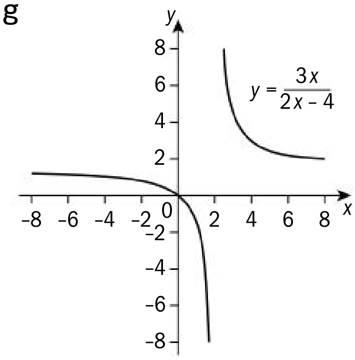
f



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq \frac{5}{4}$

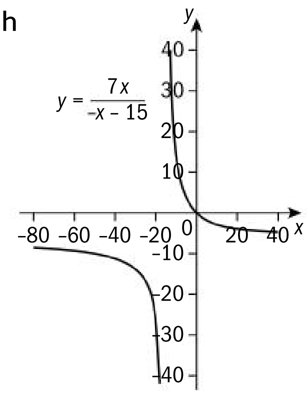
g



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq \dfrac{3}{2}$

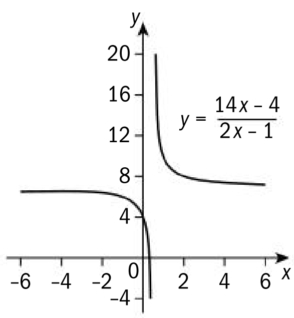
h



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -15$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -7$

i



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq \dfrac{1}{2}$

Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 7$

4 Ej.: $y = \dfrac{1}{x+4} + 3$

5 a $C(x) = 450 + 5{,}5x$

b $A(x) = \dfrac{450 + 5{,}5x}{x}$

c Dominio es $x > 0$. Ya que x representa el número de camisetas producidas, solo los valores positivos tienen sentido.
Excluya $x = 0$ ya que $A(x)$ es indefinido para $x = 0$ y en $x = 0$ no hay camisetas fabricadas.

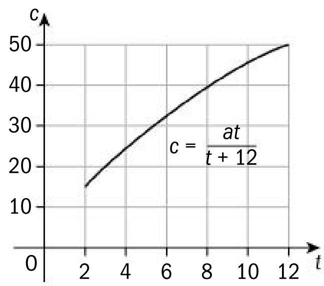
d $x = 0$

e La asíntota horizontal es $y = 5{,}5$. A medida que el número de camisetas fabricadas aumenta, los costos iniciales se vuelven insignificantes.

6 a

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	$\frac{100}{7}$	20	25	$\frac{500}{17}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{700}{19}$	40	$\frac{300}{7}$	$\frac{500}{11}$	$\frac{1100}{13}$	50

b



c Aproximadamente 38,5 mg

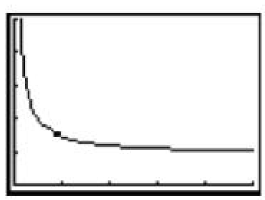
d $c = 100$

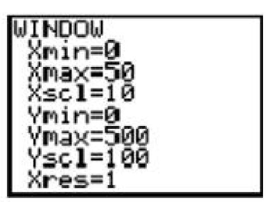
e La dosis para niños no excederá los 100 mg.

7 a \$128,67

b $C(n) = \dfrac{550 + 92n}{n}$ donde n = número de años y C representa el costo anual.

c





d La asíntota vertical es $n = 0$ y la asíntota horizontal es $C = 92$.

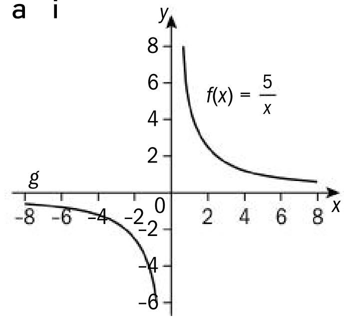
e El costo nunca estará debajo de \$92.

f No, ya que el refrigerador más caro sigue siendo el más costoso en el largo plazo.

Ejercicio de revisión sin CPG

1 **i** a, **ii** d, **iii** c, **iv** e, **v** b, **vi** f.

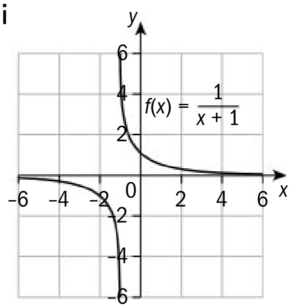
2 a i



ii $x = 0, y = 0$

iii Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

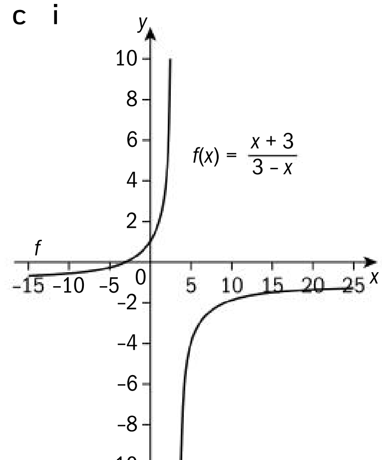
b i



ii $x = -1, y = 0$

iii Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -1$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

c i



ii $x = 3, y = -1$

iii Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 3$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -1$

3 a $x = -4, y = 0$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -4$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

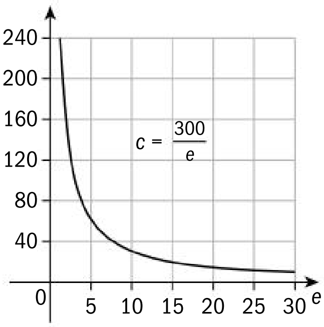
b $x = 0, y = -3$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -3$

c $x = -6$, $y = -2$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -6$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -2$

d $x = 1$, $y = 5$
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 5$

4 a $c = \frac{100}{e}$

b



c El dominio y el recorrido se limitan a $\mathbb{R}^+$ y el dominio a $\mathbb{Z}^+$.

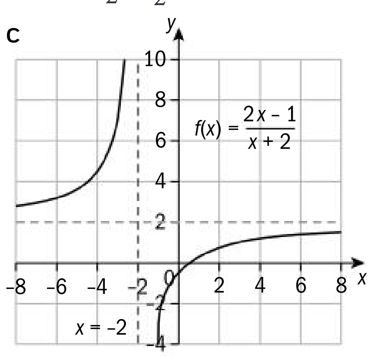
5 a i $y = \frac{2}{1} = 2$

ii $x = -2$

iii $(-2, 2)$

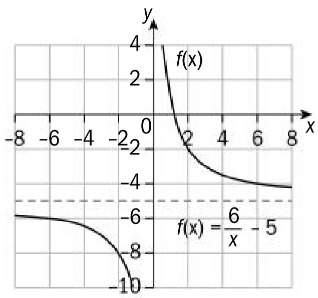
b $(0, -\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, 0)$

c



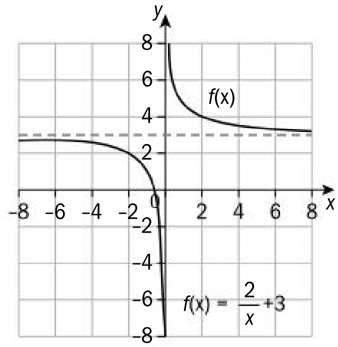
Ejercicio de revisión con CPG

1 a



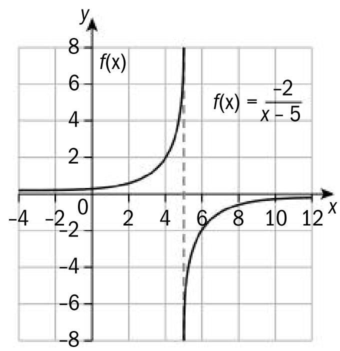
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 5$

b



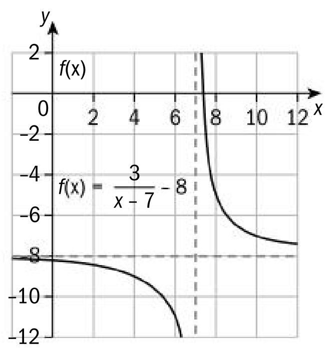
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 3$

c



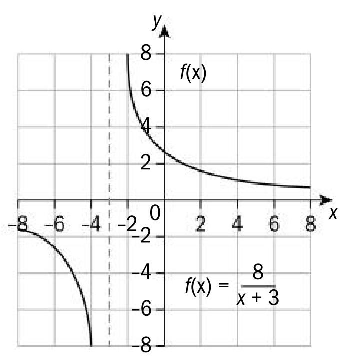
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 5$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

d



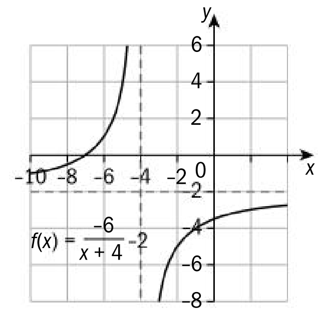
Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq 7$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -8$

e



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -3$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

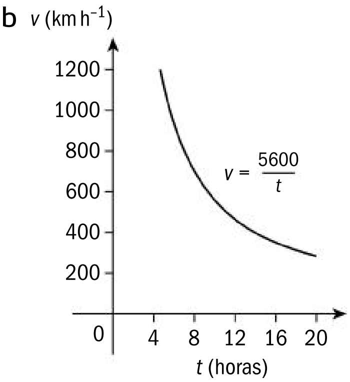
f



Dominio $x \in \mathbb{R}, x \neq -4$
Recorrido $y \in \mathbb{R}, y \neq -2$

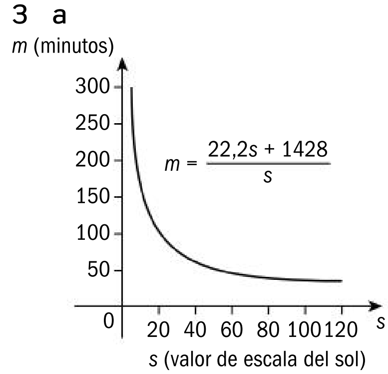
2 a $v = \frac{5600}{t}$

b



c $560\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$

3 a



b i 165 min

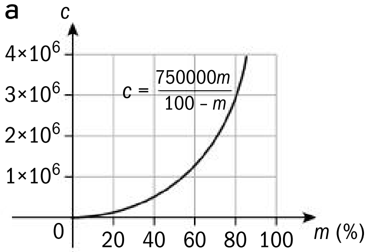
ii 57,9 min

iii 36,5 min

c $m = 22{,}2$

d Esto representa el número de minutos de exposición a la luz solar directa sin dañar la piel.

4 a



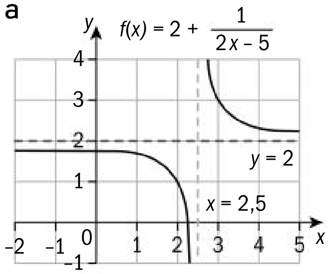
b i 187 500 bahts tailandeses

ii 750 000 bahts tailandeses

iii 6750 000 bahts tailandeses

c No. Cuando $m = 100$ la función es indefinida.

5 a



b i $x = \frac{5}{2}, y = 2$

ii 2,25

iii 1,8

Capítulo 6

Comprobemos nuestras habilidades

1 a -6 b $-3, 5$ c 5

2 a $k = \frac{15-3m}{4}$ b $k = \frac{4}{p}$

3 a 108 b $-12{,}22$

4 a 5 b 16 c $-\frac{3}{32}$

Investigación: ahorro de dinero

a

Número de semana	Ahorro semanal	Total ahorrado
1	20	20
2	25	45
3	30	75
4	35	110
5	40	150
6	45	195
7	50	245
8	55	300

b Ahorrado en la semana 10: \$65; ahorrado en la semana 17: \$100

c Total ahorrado en el primer año (52 semanas): \$7670

d \$1000 ahorrados después de 17 semanas.

e $M = 20 + 5(n-1)$ o $M = 15 + 5n$

f $T = \frac{n(35+5n)}{2}$ o $T = \frac{5n(7+n)}{2}$

Exercise 6A

1 a 19, 23, 27 b 16, 32, 64

c 18, 24, 31 d 80, –160, 320

e $\frac{9}{14}, \frac{11}{17}, \frac{13}{20}$

f 6,012 34; 6,012 345; 6,012 345 6

2 a 10, 30, 90, 270

b 3, 7, 15, 31

c $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$

d x, x^2, x^4, x^8

3 a $u_1 = 2$ y $u_{n+1} = u_n + 2$

b $u_1 = 1$ y $u_{n+1} = 3u_n$

c $u_1 = 64$ y $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$

d $u_1 = 7$ y $u_{n+1} = u_n + 5$

4 a 3, 9, 27, 81

b –3, –9, –15, –21

c 1, 2, 4, 8

d 1, 4, 27, 256

5 a $u_n = 2n$ b $u_n = 3^{n-1}$

c $u_n = 2^{7-n}$ d $u_n = 5n + 2$

e $u_n = \frac{n}{n+1}$ f $u_n = nx$

6 a 610

b $u_1 = 1, u_2 = 1$, y $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

Ejercitación 6B

1 a i $u_{15} = 45$ ii $u_n = 3n$

b i $u_{15} = 235$

ii $u_n = 15n + 10$

c i $u_{15} = 106$

ii $u_n = 5n + 31$

d i $u_{15} = -82$

ii $u_n = 113 - 13n$

e i $u_{15} = 14$

ii $u_n = 0{,}6n + 5$

f i $u_{15} = x + 14a$

ii $u_n = x + an - a$

2 a 51 b 169 c 37

d 15 e 27 f 10

Ejercitación 6C

1 $d = 0{,}9$

2 $d = -3, u_1 = 64$

3 5,5 4 8

Ejercitación 6D

1 a $r = \frac{1}{2}, u_7 = \frac{1}{4}$

b $r = -3, u_7 = -2916$

c $r = 10, u_7 = 1\,000\,000$

d $r = 0{,}4; u_7 = 0{,}1024$

e $r = 3x, u_7 = 1458x^6$

f $r = \frac{b}{a}, u_7 = ab^7$

Ejercitación 6E

1 $r = 0{,}4; u_1 = 125$

2 $r = -2; u_1 = -4{,}5$

3 a $n = 12$ b $n = 9$

c $n = 7$ d $n = 33$

4 $r = \pm 4, u_2 = \pm 36$

5 $p = \pm 27$ 6 $x = 8$

Ejercitación 6F

1 a $\sum_{n=1}^{8} n$ b $\sum_{n=3}^{7} n^2$

c $\sum_{n=1}^{6} (29-2n)$ d $\sum_{n=1}^{6} 240\,(0{,}5^{n-1})$

e $\sum_{a=5}^{10} an$ f $\sum_{n=1}^{18} (3n+1)$

g $\sum_{n=1}^{11} 3^{n-1}$ h $\sum_{n=1}^{5} na^n$

2 a 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25

b 4 + 16 + 64 + 256 + 1024

c 40 + 80 + 160 + 320 + 640

d $x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11}$

3 a 315 b 363

c 140 d 315

Ejercitación 6G

1 234

2 108

3 594

4 $40x + 152$

5 a $n = 24$ b 1776

6 2292

Ejercitación 6H

1 3

2 a $3n^2 - 2n$ b 17

3 a $1,75n^2 - 31,75n$ b 21

4 a 1600 b 12 600

5 $u_1 = -20$, $d = 4$

6 $d = 2,5$; $S_{20} = 575$

Ejercitación 6I

1 a 132 860 b 1228,5

c 42,656 25

d $4095x + 4095$

2 a 435 848 050

b $\approx 11\,819,58$

c $-1\,048\,575$

d $\log(a^{1048575})$

3 a i 9 ii 76 684

b i 6 ii 3685,5

c i 8 ii 1,626 537 5

d i 11 ii 885,73

Ejercitación 6J

1 a 6 b 5

c 19 d 6

2 $r = 3$, $S_{10} = \frac{59048}{15}$

3 $r = 3$

4 a 1,5 b 21

5 2059 6 3

Investigación: series convergentes

1 i a $r = \frac{1}{2}$ b $r = \frac{2}{5}$

c $r = \frac{-1}{4}$

ii Observe los valores en la CPG.

2 a Los valores se aproximan a 4 a medida que $n \to \infty$.

b Los valores se aproximan a 125 a medida que $n \to \infty$.

c Los valores se aproximan a 192 a medida que $n \to \infty$.

3 Resultados como $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ exceden el límite de lo que se puede visualizar en la CPG.

Ejercitación 6K

1 $|r| < 1$

2 a $S_4 = 213,\overline{3}$, $S_7 \approx 215,9$; y $S_\infty = 216$

b $S_4 = 1476$, $S_7 = 1975,712$; y $S_\infty = 2500$

c $S_4 = 88,88$; $S_7 = 88,888\,88$; y $S_\infty = 88,\overline{8}$

d $S_4 = 10,8\overline{3}$, $S_7 \approx 12,71$; y $S_\infty = 13,5$

3 $13,\overline{4}$

4 192

5 16 o 48

6 150

7 4118

Ejercitación 6L

1 -20

2 a 26,25 cm b 119

3 a \$3984,62 b \$4025,81

c \$4035,36

4 42

5 18

6 232

7 ≈19,6 años

8 a 1, 8, 21 b 1, 7, 13

c $6n - 5$

9 a 4, 12, 28 b 4, 8, 16

c $4(2^{n-1})$

10 ≈ 86 meses

11 Alrededor de \$16,30

Ejercitación 6M

1 10

2 28

3 35

4 84

5 15

6 120

Investigación: patrones en polinomios

1 $a + b$

2 $a^2 + 2ab + b^2$

3 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4 $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

5 $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

6 $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Los coeficientes vienen del triángulo de Pascal.

$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Ejercitación 6N

1 $y^5 + 15y^4 + 90y^3 + 270y^2 + 405y + 243$

2 $16b^4 - 32b^3 + 24b^2 - 8b + 1$

3 $729a^6 + 2916a^5 + 4860a^4 + 4320a^3 + 2160a^2 + 576a + 64$

4 $x^6 + 6x^3 + 12 + \frac{8}{x^3}$

5 $x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$

6 $81a^4 - 216a^3b + 216a^2b^2 - 96ab^3 + 16b^4$

7 $243c^5 + \frac{810c^4}{d} + \frac{1080c^3}{d^2} + \frac{720c^2}{d^3} + \frac{240c}{d^4} + \frac{32}{d^5}$

8 $64x^6 + \frac{24x^4}{y} + \frac{3x^2}{y^2} + \frac{1}{8y^3}$

Ejercitación 6O

1 $336x^5$

2 $-1280y^4$

3 $4860a^2b^4$

4 -512

5 2

6 ± 4

7 17 920

8 4860

9 8

10 7

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a 4 b 283 c 25

2 a $\frac{1}{4}$ b 1 c $\frac{256}{3}$

3 a 4 b 5

4 a 30 b 262

5 120

6 a $\frac{1}{4}$ b $\frac{3200}{3}$

7 ± 4

8 $720x^3$

9 a 17 b 323

Ejercicio de revisión con CPG

1 a 3 b 52

2 a 96 b 32

3 a $u_1 = 7, d = 2$ b 720

4 a 2 b 11

5 18

6 $u_1 = 5, r = -3$

7 $\frac{-945x^4}{16}$ 8 $\frac{1}{4}$

9 a ≈ 5,47 millones b 2056

Capítulo 7

Comprobando nuestras habilidades

1 a $3x(3x^3 - 5x^2 + 1)$

b $(2x - 3)(2x + 3)$

c $(x - 3)(x - 2)$

d $(2x + 1)(x - 5)$

2 a $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b $81x^4 - 108x^3 + 54x^2 - 12x + 1$

c $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

3 a x^{-6} b $4x^{-3}$

c $5x^{\frac{1}{2}}$ d $x^{\frac{5}{7}}$

e $7x^{-\frac{3}{2}}$

Investigación: creación de una progresión

Número de vuelta	Porción de papel que tiene al final de la vuelta	
	Fracción	Decimal (3 cs)
1	$\frac{1}{3}$	0,333
2	$\frac{4}{9}$	0,444
3	$\frac{13}{27}$	0,481
4	$\frac{40}{81}$	0,494
5	$\frac{121}{243}$	0,498
6	$\frac{364}{729}$	0,499

1 La porción se acerca a $\frac{1}{2}$.

2 La porción se acerca cada vez más a $\frac{1}{2}$, pero nunca llega a $\frac{1}{2}$.

Ejercitación 7A

1 Divergente

2 Convergente; 3,5

3 Convergente; 0

4 Convergente; 0,75

5 Divergente

Ejercitación 7B

1 10 2 1

3 1

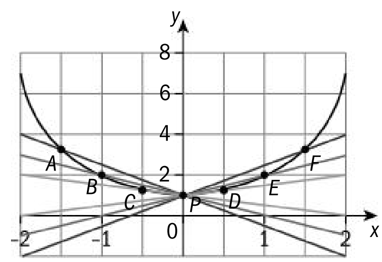
4 No existe.

5 4

6 No existe.

Investigación: rectas secantes y tangentes

1

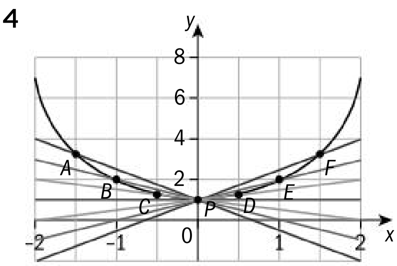


2

Punto	Coordenadas	Recta	Pendiente
P	(0, 1)	–	–
A	(–1,5; 3,25)	AP	–1,5
B	(–1, 2)	BP	–1
C	(–0,5; 1,25)	CP	–0,5
D	(0,5; 1,25)	DP	0,5
E	(1, 2)	EP	1
F	(1,5; 3,25)	FP	1,5

3 0

4



Ejercitación 7C

1 $\frac{[3(x+h)+4]-(3x+4)}{h} = 3$

2 $\frac{\left[2(x+h)^2-1\right]-(2x^2-1)}{h} = 4x+2h$

3 $\frac{\left[(x+h)^2+2(x+h)+3\right]-(x^2+2x+3)}{h}$

$= 2x+h+2$

Ejercitación 7D

1 2; $m = 2$

2 $6x + 2$; $m = -16$

3 $2x - 1$; $m = 1$

Investigación: la derivada de $f(x) = x^n$

1
$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2x+h)$$
$$= 2x$$

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$
$$= 3x^2$$

$$f(x) = x^4$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)$$
$$= 4x^3$$

2 Para hallar la derivada de $f(x) = x^n$, multiplicar x por el exponente n y restar 1 del exponente para obtener el nuevo exponente. Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

3 Predicción: $f'(x) = 5x^4$
$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(5x^4+10x^3h+10x^2h^2$$
$$+5xh^3+h^4)$$
$$= 5x^4$$

Ejercitación 7E

1 $5x^4$

2 $8x^7$

3 $-\frac{4}{x^5}$

4 $\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ o $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5 $-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$ o $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

6 $\frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}$ o $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

Ejercitación 7F

1 $-\frac{16}{x^9}$

2 0

3 $3x^2+\frac{6}{x^3}$

4 $5\pi x^4$

5 $2x-8$

6 $\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}}$

7 $-\frac{3}{2x^3}$

8 $-\frac{3}{8x^3}$

9 $-4x^3$

10 $\frac{5}{6x^{\frac{1}{6}}}+\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$

11 $12x^3-4x$

12 $4x+3$

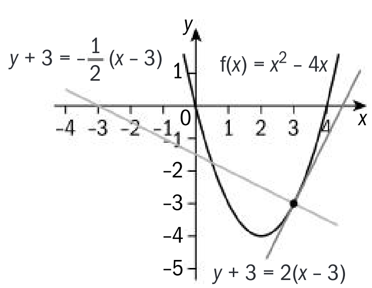
13 $\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}}$

14 $6x^2-12x$

15 $3x^2+4x-3$

Ejercitación 7G

1 $y+3=2(x-3)$; o $y=2x-9$;
$y+3=-\frac{1}{2}(x-3)$ o $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$



2 a $y-4=-4(x+3)$
o $y=-4x-8$

b $y-6=1(x-1)$
o $y=x+5$

c $y-5=\frac{1}{3}(x-3)$
o $y=\frac{1}{3}x+4$

d $y-9=-\frac{15}{4}(x-1)$
o $y=-\frac{15}{4}x+\frac{51}{4}$

3 a $y-3=-\frac{1}{7}(x-2)$
o $y=-\frac{1}{7}x+\frac{23}{7}$

b $y+5=\frac{1}{6}(x+1)$
o $y=-\frac{1}{6}x+\frac{29}{6}$

c $y-25=-\frac{1}{20}(x-2)$
o $y=-\frac{1}{20}x+25\frac{1}{10}$

d $y+2=-\frac{3}{26}(x-1)$
o $y=-\frac{3}{26}x+\frac{23}{26}$

4 $x=1$; $x=-1$

5 5

Investigación: las derivadas de e^x y $\ln x$

1 Conjetura: $f'(x)=e^x$

2 Conjetura: $f'(x)=\frac{1}{x}$

Ejercitación 7H

1 $\frac{4}{x}$

2 $e^x+\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

3 $12x^3+\frac{1}{x}$

4 $8x+3$

5 $2e^x+\frac{1}{x}$

6 $5e^x+4$

7 $y-5=12(x-\ln 3)$

8 $y-9=\frac{1}{6}(x+3)$

9 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$ o $y=\frac{x}{e}$

10 $y-7=-\frac{1}{9}(x-2)$
o $y=-\frac{1}{9}x+\frac{65}{9}$

11 $2e^3$; 40,2

12 $\frac{5}{24}$; 0,208

Investigación: la derivada del producto de dos funciones

1 11

2 $f'(x)=11x^{10}$

3 $u'(x)=4x^3$; $v'(x)=7x^6$

4 $u'(x)\cdot v'(x)=28x^9$

5 No

6 $f'(x)=x^4\cdot 7x^6+x^7\cdot 4x^3=11x^{10}$

7 $f'(x)=u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x)$

8 $f(x)=(3x+1)(x^2-1)$
$=3x^3+x^2-3x-1$
$f'(x)=9x^2+2x-3$
$f(x)=(3x+1)(x^2-1)$
$f'(x)=(3x+1)(2x)+(x^2-1)(3)$
$=6x^2+2x+3x^2-3$
$=9x^2+2x-3$
Esto apoya la conjetura.

Ejercitación 7I

1 $\frac{x^2-8x}{(x-4)^2}$

2 $10x^4+4x^3+9x^2+2x+1$

3 $\frac{1-\ln x}{x^2}$

4 $\frac{e^x}{x}+e^x\ln x$

5 $\frac{6}{(x+4)^2}$

6 $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

7 $e^x(5x^3+15x^2+4x+4)$

8 $\frac{x^4-6x^2-2x}{(x^3+1)^2}$

9 -1

10 $y-2=-\frac{1}{2}(x-3)$; $y=-\frac{1}{2}(x+1)$

Ejercitación 7J

1 $2x^2-\frac{5}{3}$

2 $4x^3$

3 $4xe^x+2x^2e^x$

4 $\frac{2xe^x-4e^x}{x^3}$

5 $3x^2-\frac{16}{5x^{\frac{9}{5}}}$

6 $\frac{2x-x^2}{e^x}$

7 $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

8 $3+3\ln x$

9 $1-\frac{1}{x^2}$

10 $\dfrac{5x^{\frac{3}{2}}}{2}+\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

11 $-\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$

12 $10x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 18x - 15$

13 $y=-\dfrac{1}{e}(x-1)$

14 $y = x - 1$

15 $-9n + 3{,}5$

16 $4\pi r^2$

17 7

18 4

Investigación: cálculo de la derivada de una función compuesta

1 a $f(x) = (2 - x)^3$
$= 8 - 12x + 6x^2 - x^3$
$f'(x) = -12 + 12x - 3x^2$

b $f'(x) = 3(2 - x)^2 \cdot (-1)$

2 a $f(x) = (2x + 1)^2$
$= 4x^2 + 4x + 1$
$f'(x) = 8x + 4$

b $f'(x) = 2(2x + 1) \cdot 2$

3 a $f(x) = (3x^2 + 1)^2$
$= 9x^4 + 6x^2 + 1$
$f'(x) = 36x^3 + 12x$

b $f'(x) = 2(3x^2 + 1) \cdot (6x)$

4 La derivada de una función compuesta es la derivada de la función exterior con respecto a la función interior multiplicada por la derivada de la función interior.

5 $f(x) = (x^4+x^2)^3$
$= x^{12}+3x^{10}+3x^8+x^6$
$f'(x)=12x^{11}+30x^9+24x^7+6x^5$
$f'(x)= 3(x^4+x^2)^2 \cdot (4x^3+2x)$
$= 3(x^8+2x^6+x^4)(4x^3+2x)$
$= 3(4x^{11}+10x^9+8x^7+2x^5)$
$= 12x^{11}+30x^9+24x^7+6x^5$

Ejercitación 7K

1 x^5; $3x^4 + 2x$;
$5(3x^4 + 2x)^4 (12x^3 + 2)$

2 $4x^3$; $2x^2 + 3x + 1$;
$12(2x^2 + 3x + 1)^2 (4x + 3)$

3 $\ln x$; $3x^5$; $\dfrac{5}{x}$

4 $\sqrt[3]{x}$; $2x+3$; $\dfrac{2}{3(2x+3)^{\frac{2}{3}}}$

5 e^x; $4x$; $4e^{4x}$

6 x^3; $\ln x$; $\dfrac{3(\ln x)^2}{x}$

7 $x^{\frac{2}{3}}$; $9x+2$; $\dfrac{6}{(9x+2)^{\frac{1}{3}}}$

8 $\sqrt[4]{x}$; $2x^2+3$; $\dfrac{x}{\left(2x^2+3\right)^{\frac{3}{4}}}$

9 $5x^4$; $x^3 + 3x$;
$20(x^3 + 3x)^3 (3x^2 + 3)$

10 e^x; $4x^3$; $12x^2e^{4x^3}$

Ejercitación 7L

1 $8x^2 (2x - 3)^3 + 2x(2x - 3)^4$
o $6x(2x - 1)(2x - 3)^3$

2 $\dfrac{-x^2+2x}{e^x}$

3 $\dfrac{-8x}{(x^2+3)^2}$

4 $\dfrac{-x}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ o $\dfrac{x+1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$

5 $\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)^{\frac{1}{2}}}$

6 $\dfrac{6x^2}{2x^3-1}$

7 $\dfrac{1}{x\ln x}$

8 $\dfrac{-2(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$ o $\dfrac{-2e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$

9 $\dfrac{-2x+3}{(x^2-3x-2)^2}$

10 $x^5(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}+4x^3(x^2+3)^{\frac{1}{2}}$
o $\dfrac{5x^5+12x^3}{(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}}$

11 a $(2x-2)e^{x^2-2x}$

b 2

c $y - 1 = 2(x - 2)$

12 $e^{-\frac{1}{3}}$ o 0

13 $h'(x)=\dfrac{6}{(1-2x)^4}$. Dado que $6 > 0$ y $(1 - 2x)^4 > 0$ para todo x donde h está definida, la pendiente de h es siempre positiva.

14 a 6

b 8

Ejercitación 7M

1 $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

2 $180x^2 + 24x$

3 $3e^{-3n}(6n + 5)$

4 $\dfrac{8}{x^3}$

5 $\dfrac{-3}{x^2}$

6 1

7 Es igual a 0.

8 $\dfrac{dy}{dx}=e^x-e^{-x}$
$\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^x+e^{-x}$
$\dfrac{d^3y}{dx^3}=e^x-e^{-x}$
$\dfrac{d^4y}{dx^4}=e^x+e^{-x}$

Cuando n es impar, $\dfrac{d^ny}{dx^n}=e^x-e^{-x}$ y cuando n es par, $\dfrac{d^ny}{dx^n}=e^x+e^{-x}$.

9 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{x^2}$
$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2}{x^3}$
$\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{-6}{x^4}$
$\dfrac{d^4y}{dx^4}=\dfrac{24}{x^5}$
$\dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

10 $\dfrac{-18}{25x^{\frac{8}{5}}}$

Ejercitación 7N

1 a 1,4 m; 21 m

b $9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

c $9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $-9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; La pelota se mueve hacia arriba en un 1 s, en reposo en 2 s y hacia abajo en 3 s.

2 a 4000 litros; 1778 litros

b −111 litros/min; durante el intervalo de 0 a 20 minutos, el agua está siendo drenada del tanque a una razón promedio de 111 litros por minuto.

c −89 litros/min; en 20 minutos, el agua está siendo drenada del tanque a una razón promedio de 89 litros por minuto.

d $V'(t)$ es negativa para $0 \le t < 40$ minutos, lo que significa que el agua fluye hacia afuera del tanque durante este intervalo de tiempo. Por lo tanto, la capacidad de agua en el tanque nunca aumentará entre $t = 0$ minutos y $t = 40$ minutos.

3 a 112 bacterias/día.

b $P'(t) = 25e^{0{,}25t}$

c 305 baterias/día; al final del día 10, el número de bacterias aumenta a razón de 305 bacterias/día.

4 a 20,25 dólares/unidad; 20,05 dólares/unidad

b $C'(n) = 0{,}1n + 10$

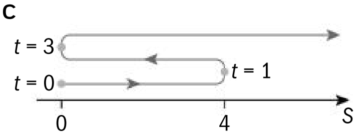
c 20 dólares/unidad. Cuesta 20 dólares por unidad producir unidades después de la unidad 100.

Ejercitación 7O

1 a 0 cm; $9\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$

b 1 s y 3 s

c



2 a 4 pies

b $s(2) = -16(2)^2 + 40(2) + 4$
$= -64 + 80 + 4 = 20$ pies

c i $-16t^2 + 40t + 4 = 20$

ii $t = \dfrac{1}{2}, 2\,\mathrm{s}$

d i $\dfrac{ds}{dt} = -32t + 40$

ii $40\,\text{pies}\,\mathrm{s^{-1}}$

iii $\dfrac{5}{4}\,\mathrm{s}$ iv 29 pies

3 a $v(t) = s'(t)$

$$= \frac{e^t(1) - t(e^t)}{(e^t)^2}$$

$$= \frac{e^t(1-t)}{e^{2t}}$$

$$v(t) = \frac{1-t}{e^t}$$

b 1 segundo

Investigación: velocidad, aceleración y celeridad

1 a Sea una aceleración de $2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Tiempo (s)	Velocidad ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)	Celeridad ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
0	10	10
1	12	12
2	14	14
3	16	16
4	18	18

b Sea una aceleración de $-2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Tiempo (s)	Velocidad ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)	Celeridad ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
0	10	10
1	8	8
2	6	6
3	4	4
4	2	2

c Sea una aceleración de $-2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Tiempo (s)	Velocidad ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)	Celeridad ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
0	−10	10
1	−12	12
2	−14	14
3	−16	16
4	−18	18

d Sea una aceleración de $2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Tiempo (s)	Velocidad ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)	Celeridad ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
0	−10	10
1	−8	8
2	−6	6
3	−4	4
4	−2	2

2 a Acelera la marcha.

b Aminora la marcha.

c Acelera la marcha.

d Aminora la marcha.

3 a Acelerando la marcha.

b Aminorando la marcha.

Ejercitación 7P

1 a $v(t) = 8t^3 - 12t,\ t \ge 0$

$a(t) = 24t^2 - 12,\ t \ge 0$

b $84\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$; la velocidad está aumentando $84\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ en el instante 2 segundos.

c $v(t) = 0$ cuando $t = 0$ y 1,22 s; $a(t) = 0$ cuando $t = 0{,}707$ s; acelera la marcha en $0 < t < 0{,}707$ s y $t > 1{,}22$; aminora la marcha en $0{,}707 < t < 1{,}22$.

2 a $v(t) = -3t^2 + 24t - 36,\ 0 \le t \le 8$

$a(t) = -6t + 24,\ 0 \le t \le 8$

b $s(0) = 20$ m; $v(0) = -36\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $a(0) = 24\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

c $t = 2, 6$ s; se mueve hacia la izquierda en $0 \le t \le 2$ y $6 \le t \le 8$, se mueve hacia la derecha en $2 \le t \le 6$.

d $t = 4$ s; acelera la marcha en $2 \le t \le 4$ y $6 \le t \le 8$, aminora la marcha en $0 \le t \le 2$ y $4 \le t \le 6$

3 a $v(t) = -9{,}8t + 4{,}9$

$a(t) = -9{,}8$

b 2,01 s

c 0,5 s; 11,2 m

d $v(0{,}3) = 1{,}96 > 0$ y $a(0{,}3) = -9{,}8 < 0$. Dado que los signos de $v(0{,}3)$ y $a(0{,}3)$ son diferentes, la partícula aminora la marcha en el instante 0,3 segundos.

4 a i $v(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{t+1}$

ii 1 segundo

b i $a(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(t+1)^2}$

ii Dado que $\frac{1}{2} > 0$ y

$\frac{1}{(t+1)^2} > 0,$

$a(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(t+1)^2} > 0$

para $t \geq 0$ y por lo tanto su velocidad nunca decrece.

Ejercitación 7Q

1 Decreciente $(-\infty, \infty)$

2 Creciente $(-\infty, 2)$; decreciente $(2, \infty)$

3 Creciente $(-1, 1)$; decreciente $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$

4 Decreciente $(-\infty, 0)$; creciente $(0, \infty)$

5 Creciente $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$; decreciente $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$

6 Decreciente $(-\infty, 3)$ y $(3, \infty)$

7 Decreciente $(0, \infty)$

8 Creciente $(-3, \infty)$; decreciente $(-\infty, -3)$

9 Creciente $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$; decreciente $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \sqrt{3})$

10 Creciente $(-\infty, -2)$ y $(4, \infty)$; decreciente $(-2, 4)$

Ejercitación 7R

1 Mínimo relativo $(1, -5)$

2 Mínimo relativo $(2, -21)$; máximo relativo $(-2, 11)$

3 No hay extremos relativos.

4 Mínimo relativo $(-1, -1)$, y $(1, -1)$; máximo relativo $(0, 0)$

5 Mínimo relativo $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{2187}{256}\right)$

6 Mínimo relativo $(0, 0)$; máximo relativo $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$

7 No hay extremos relativos.

8 Mínimo relativo $(1, 0)$; máximo relativo $(-3, -8)$

Ejercitación 7S

1 Cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$

2 Cóncava hacia arriba $(0, 2)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$; puntos de inflexión $(0, 0)$ y $(2, 16)$

3 Cóncava hacia arriba $(2, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 2)$; puntos de inflexión $(2, 8)$

4 Cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$

5 Cóncavo hacia arriba $(-2, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -2)$; puntos de inflexión $\left(-2, -\frac{4}{e^2}\right)$

6 Cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$, cóncava hacia abajo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, puntos de inflexión $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$

7 a $f'(x) = \frac{-48x}{(x^2+12)^2}$

$f''(x)$

$= \frac{(x^2+12)^2(-48) - (-48x)[2(x^2+12)(2x)]}{(x^2+12)^4}$

$= \frac{(x^2+12)^2(-48) + 192x^2(x^2+12)}{(x^2+12)^4}$

$= \frac{48(x^2+12)[-(x^2+12)+4x^2]}{(x^2+12)^4}$

$= \frac{48(x^2+12)(3x^2-12)}{(x^2+12)^4}$

$= \frac{144(x^2+12)(x^2-4)}{(x^2+12)^4}$

$= \frac{144(x^2-4)}{(x^2+12)^3}$

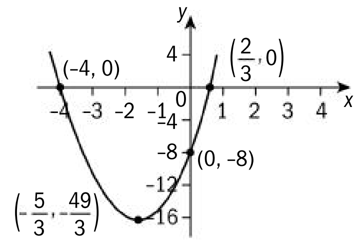
b i Máximo relativo $(0, 2)$

ii Puntos de inflexión $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

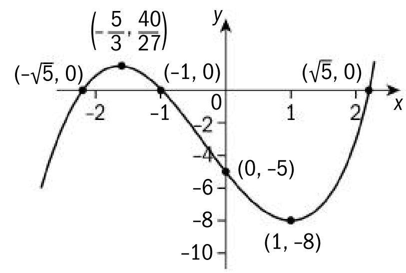
8 Cóncava hacia arriba $(-\infty, -2)$ y $(4, \infty)$, cóncava hacia abajo $(-2, 4)$, puntos de inflexión en $x = -2, 4$

Ejercitación 7T

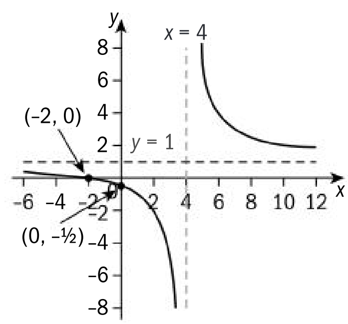
1



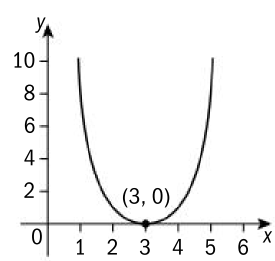
2



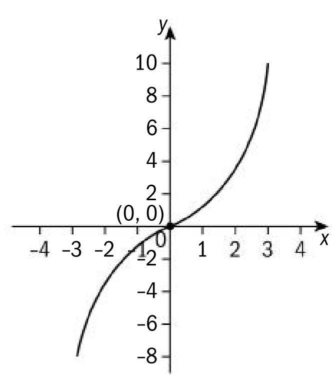
3



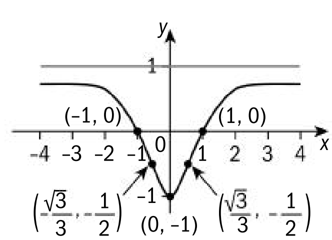
4



5

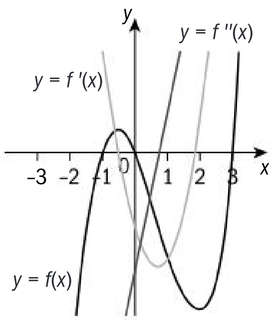


6

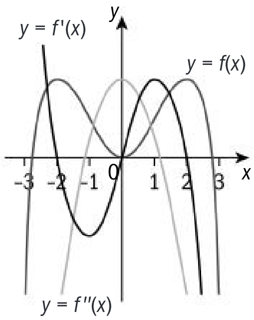


Ejercitación 7U

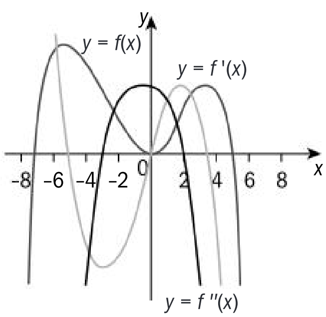
1



2



3



Ejercitación 7V

1 Mínimo relativo (3, –75)

2 Mínimo relativo (1, 0) y (–1, 0); máximo relativo (0, 1)

3 Mínimo relativo (3, –27)

4 Mínimo relativo $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$

5 Mínimo relativo (1, 0)

6 Máximo relativo (0, 1)

Ejercicion 7W

1 A: ninguno; B: mínimo absoluto y relativo; C: máximo absoluto

2 A: ninguno; B: mínimo relativo; C: máximo absoluto y relativo; D: mínimo absoluto

3 Máximo absoluto 8; mínimo absoluto −8

4 Máximo absoluto 16; mínimo absoluto −9

5 Máximo absoluto 2; mínimo absoluto $-\frac{5}{2}$

Ejercitación 7X

1 $\frac{79}{4}$ y $\frac{1}{4}$

2 100 y 50

3 $x = 50$ pies; $y = \frac{200}{3}$ pies

Ejercitación 7Y

1 40 cm por 40 cm por 20 cm

2 3 artículos

3 22

4 a $r = \frac{30-3a}{5}$

b $V(a) = \pi\left(\frac{30-3a}{5}\right)^2(a)$ o

$V(a) = \frac{9\pi}{25}(100a - 20a^2 + a^3)$

c $\frac{dV}{da} = \frac{9\pi}{25}(100 - 40a + 3a^2)$;

$\frac{d^2V}{da^2} = \frac{9\pi}{25}(-40 + 6a)$

d $r = 4$ cm; $a = \frac{10}{3}$ cm

5 a $p(x) = 4\sqrt{x} - 2x^2$

b $\frac{dp}{dx} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - 4x$; $\frac{d^2p}{dx^2} = -\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - 4$

c 0,630 mil unidades o 630 unidades

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a $12x^2 + 6x - 2$

b $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

c $-\frac{12}{x^5}$

d $10x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

e $\frac{11}{(x+7)^2}$

f $4e^{4x}$

g $12x^2(x^3+1)^3$

h $\frac{2}{2x+3}$

i $\frac{1-2\ln x}{x^3}$

j $\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

k $e^x(3x^2 + 6x + 1)$

l $-\frac{6e^x}{(e^x-3)^2}$

m $\frac{3}{\sqrt{2x-5}}$

n $2xe^{2x}(x+1)$

o $-\frac{1}{x}$

2 a $x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

b

$f'(x)$

$= \lim_{h\to 0}\frac{[2(x+h)^3 - 6(x+h)] - (2x^3 - 6x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 6x - 6h - 2x^3 + 6x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 6h)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h(6x^2 + 6xh - 2h^2 - 6)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}(6x^2 + 6xh - 2h^2 - 6)$

$= 6x^2 - 6$

c $p = -1$; $q = 1$

d $f''(x) = 12x$

e $(0, \infty)$

3 $y - 4 = -\frac{1}{12}(x-1)$

4 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{9-2\sqrt{3}}{9}\right), \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{9+2\sqrt{3}}{9}\right)$

5 a $f''(2) > f(2) > f'(2)$;

b $f''(2) > 0$, dado que el gráfico de f es cóncavo hacia arriba; $f(2) = 0$; y $f'(2) < 0$, dado que el gráfico de f es decreciente

6 a i $4x^3 - 12x^2$

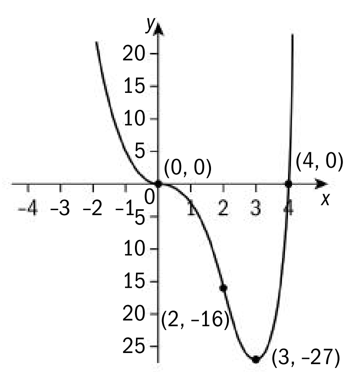
ii $12x^2 - 24x$

b i $(0, 0)$, $(4, 0)$

ii $(3, -27)$

iii $(0, 0)$, $(2, -16)$

c



7 a $v(t) = 20 - \frac{100}{t}$

b $t < 5$

c $v'(t) = a(t) = \frac{100}{t^2}$ y, dado que $100 > 0$ y $t^2 > 0$, $v'(t) > 0$. Por lo tanto, la velocidad es siempre creciente.

Ejercicio de revisión con CPG

1 a No existe.

b 1

c 8

d No existe.

2 a i $y = \sqrt{x^2 + 100}$

ii $z = \sqrt{(30 - x)^2 + 625}$ o $\sqrt{x^2 - 60x + 1525}$

iii $L(x) = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 60x + 1525}$

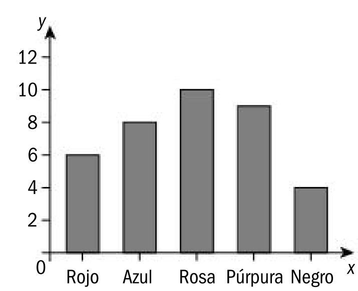
b i $\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 100}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1525}}$

ii 8,57 pies

Capítulo 8

Comprobemos nuestras habilidades

1



2 a 6,4 b 8

c i 6 ii 10 iii 11

Ejercitación 8A

1 a Discreta b Continua

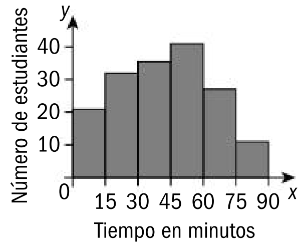
c Continua d Discreta

2 Discreta

Ejercitación 8B

1 a Continua

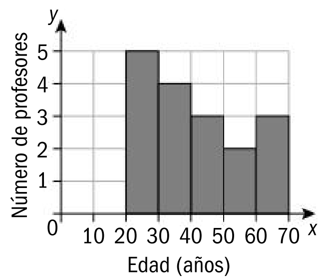
b



2 a Continua

b 17

c



3 a Continua

b c 96

Masa (kg)	$1 \le w < 2$	$2 \le w < 3$	$3 \le w < 4$	$4 \le w < 5$
Número de pollos	8	24	50	14

4 a Continua

b c 5 min

Tiempo	$5 \le t < 10$	$10 \le t < 15$	$15 \le t < 20$	$20 \le t < 25$	$25 \le t < 30$	$30 \le t < 35$	$35 \le t < 40$	$40 \le t < 45$
f	1	2	4	4	2	2	1	1

Ejercitación 8A

1 a 18 b 9

c 18 y 24 d 0

e $\frac{1}{2}$ y 2

2 a 1 b $170 \le h < 180$

Ejercitación 8D

1 $62{,}5\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$

2 \$1,86

3 a Discreta

b $5{,}7\overline{6}$ llamadas por día

4 a Continua

b $90 \le m < 120$

c 83,4 minutos por día

5 79

6 91,1 kg

7 255 km

8 568

9 103 puntos

10 \$315,20

Ejercitación 8E

1 a 4 b 5 c 3,5

d 4 e 6

2 11

3 Moda 7, media 5,25, mediana 5,5

Investigación: medidas de posición central

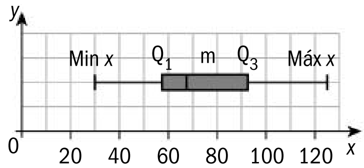
	Valores	**Media**	**Moda**	**Mediana**
Conjunto de datos	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16, 20	12,2	14	13
Sumar 4 a cada valor del conjunto	10, 11, 12, 14, 16, 18, 18, 19, 20, 24	16,2	18	17
Multiplicar cada valor del conjunto original por 2	12, 14, 16, 20, 24, 28, 28, 30, 32, 40	24,4	28	26

a Si suma 4 a cada valor, sumará 4 a la media, la moda y la mediana.

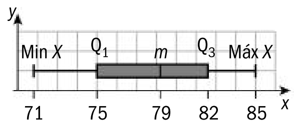
b Si multiplica cada valor por 2, multiplicará la media, la moda y la mediana por 2.

Ejercitación 8F

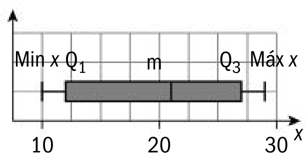
1 a 95 cm b 67,5 c 57,5
d 92,5 e 35



2 a 14 b 79 c 75
d 82 e 7



3 a 19 b 21 c 12
d 27 e 15



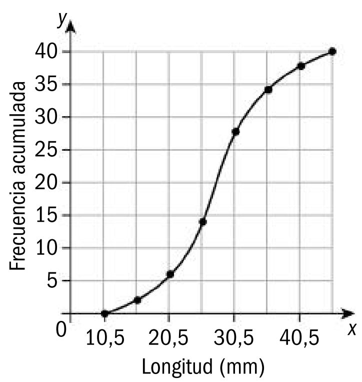
4 a 5 b 8 c 7
d 10 e 3

5 a iii b ii c i

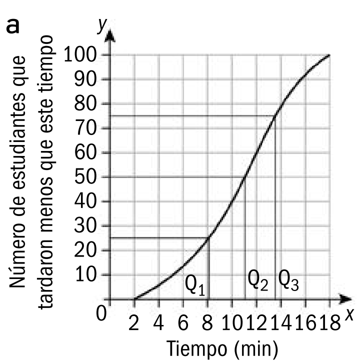
Ejercitación 8G

1 a 75 cm
b (77,5 − 72) cm = 5,5 cm
c El 50% de los datos tiene una dispersión de 5,5 cm.

2



3 a



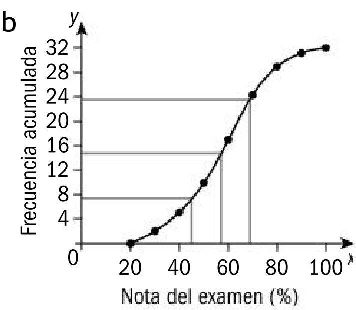
i 11 min
ii (13,6 − 8,2)min
= 5,4 min

b $p = 32$, $q = 8$

4 a

Notas	f	fa
$20 \le m < 30$	2	2
$30 \le m < 40$	3	5
$40 \le m < 50$	5	10
$50 \le m < 60$	7	17
$60 \le m < 70$	6	23
$70 \le m < 80$	4	27
$80 \le m < 90$	2	29
$90 \le m < 100$	1	30

b

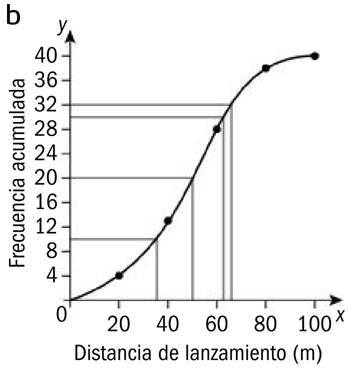


c i Mediana ≈ 57%
ii Cuartil inferior ≈ 45%
Cuartil superior ≈ 69%
iii Rango intercuartil ≈ 24%

5 a

Distancia (*d*)	f	fa
$0 \le d < 20$	4	4
$20 \le d < 40$	9	13
$40 \le d < 60$	15	28
$60 \le d < 80$	10	38
$80 \le d < 100$	2	40

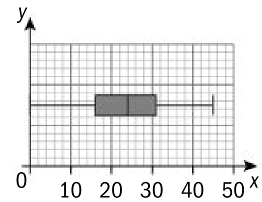
b



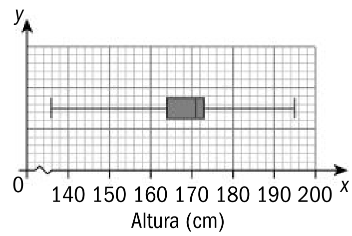
c Distancia de clasificación ≈ 66 m
d Rango intercuartil ≈ 28 m
e Mediana ≈ 50 m

6 a i 23 min ii 16 min
iii 37 min

b



7 a 170 cm
b 55 flores entre 135 cm y 164 cm
c 22 flores, 180 cm d 110
e



Ejercitación 8H

1 a Media = 18
Varianza = 129,6
Desviación típica = 11,4
b Media = 40
Varianza = 200
Desviación típica = 14,1

2 a Varianza = 78,5
Desviación típica = 8,86
b Varianza = 80,18
Desviación típica = 8,95
c Varianza = 449
Desviación típica = 21,2

3 1,32

4 Media = 2,5
Desviación típica = 1,24

5 Desviación típica = 14,9

6 a Discreta b 2,73
c 1,34 d 23

7 Media = 42,4
Desviación típica = 21,6

8 a 51 b 69,5
c i 21,8 ii Ninguno

Investigación: el efecto de sumar o multiplicar el conjunto de datos en la desviación típica

a 2,47
b La media aumenta de 100 a 103,9.

c 2,47

d La desviación típica permanece igual. Esto es porque la desviación típica solo mide la dispersión de los números, y esta permanece constante si se le suma el mismo número a cada valor de la lista.

e La media se duplica.

f 4,94

g La varianza quedará multiplicada por 4 porque la varianza es la desviación típica al cuadrado.

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a 3 b 5 c 5
d 9

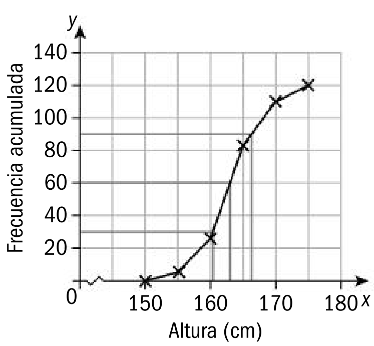
2 a 4,2 b 4 c 4

3 Media = 27,5 años
Desviación típica = 0,4 años

4 Tipo A
a 52 b 14 c 8
Tipo B
a 52 b 8 c 3

5 a 426 b 72 c 62

6 a



b Mediana ≈ 163

c Rango intercuartil ≈ 6

7 a $k = 100 - 96 = 4$

b i Mediana = 3
ii Rango intercuartil = 5 – 1 = 4

8 Mediana = 65 ºF, rango intercuartil = 45 ºF

Ejercicio de revisión con CPG

1 Mediana = 20 Rango intercuartil = 14

2 a 6,48 b 1,31

3 a 6 b 6 c 5,92

4 a Media = 2,57
Mediana = 2 Moda = 1,
Desviación típica = 1,68
Varianza = 2,82

b Rango = 6 Cuartil inferior = 1, RIC = 3

5 a $160 \le Estatura < 170$

b

Estatura	*f*
$140 \le Estatura < 150$	15
$150 \le Estatura < 160$	55
$160 \le Estatura < 170$	90
$170 \le Estatura < 180$	45
$180 \le Estatura < 190$	5

Media = 164 cm

6 a i $p = 65$ ii $q = 34$

b Mediana = 18

c Media = 17,7

Capítulo 9

Comprobemos nuestras habilidades

1 a $2 + 8 + 18 + 32 + 50$

b $4 + 7 + 10 + 13 + 16$

c $g(x_1) + 4g(x_2) + 9g(x_3) + 16g(x_4) + 25g(x_5)$

d $f(x_1)(\Delta x_1) + f(x_2)(\Delta x_2) + f(x_3)(\Delta x_3)$

2 a 18 mm² b 8π cm²

3 a 160π cm³ b 42π ft³

Investigación: antiderivada de x^n

1

$f(x)$	Antiderivada de f
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$
x^3	$\frac{1}{4}x^4 + C$
x^4	$\frac{1}{5}x^5 + C$

2 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

3 $\frac{1}{-3+1}x^{-3+1} = -\frac{1}{2}x^{-2}$ o $-\frac{1}{2x^2}$;

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) = x^{-3}$

$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)$

$= x^{\frac{1}{2}}$

4 $n = -1$

Ejercitación 9A

1 $\frac{1}{8}x^8 + C$ 2 $\frac{1}{5}x^5 + C$

3 $-\frac{1}{x} + C$

4 $2x^{\frac{1}{2}} + C$

5 $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

6 $\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C$

7 $-\frac{1}{3x^3} + C$

8 $-\frac{1}{11x^{11}} + C$

9 $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

10 $\frac{7}{10}x^{\frac{10}{7}} + C$

11 $\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} + C$

12 $3x^{\frac{1}{3}} + \mathrm{C}$

Ejercitación 9B

1 $\frac{1}{4}x^4 + C$

2 $-\frac{1}{t} + C$

3 $\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + C$

4 $2u + C$

5 $x^3 + x^2 + x + C$

6 $-\frac{2}{x^2} + C$

7 $\frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + C$

8 $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + x + C$

9 $x^5 + 3x^4 + 3x^2 - 2x + C$

10 $t + C$

11 a $3x^2 - \frac{8}{x^3}$

b $\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{x} + C$

12 a $\frac{6}{x^{\frac{4}{5}}}$ b $25x^{\frac{6}{5}} + C$

Ejercitación 9C

1 $f(x) = \frac{2}{3}x^6 + 4x^2 + 8$

2 $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + 9$

3 $s(t) = t^3 - t^2 - 6$

4 $115\pi\ \text{cm}^3$

5 a $-5\ \text{m s}^{-2}$

b $s(t) = 5 + 20t - \frac{5}{2}t^2$

Ejercitación 9D

1 $2\ln x + C, x > 0$

2 $3e^x + C$

3 $\frac{1}{4}\ln t + C, t > 0$

4 $\frac{1}{2}x^2 + C$

5 $\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x + C$

6 $\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 5\ln x + C, x > 0$

7 $\frac{1}{3}u^3 + C$

8 $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C$

9 $\frac{1}{2}(e^x + x) + C$

10 $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

Ejercitación 9E

1 $\frac{1}{6}(2x + 5)^3 + C$

2 $-\frac{1}{12}(-3x + 5)^4 + C$

3 $2e^{\frac{1}{2}x-3} + C$

4 $\frac{1}{5}\ln(5x + 4) + C, x > -\frac{4}{5}$

5 $-\frac{3}{2}\ln(7 - 2x) + C, x < \frac{7}{2}$

6 $2e^{2x+1} + C$

7 $\frac{3}{16}(4x - 3)^8 + C$

8 $\frac{2}{21}(7x + 2)^{\frac{3}{2}} + C$

9 $\frac{1}{4}e^{4x} + \frac{4}{3}\ln(3x - 5) + C,$

$x > \frac{5}{3}$

10 $-\frac{1}{12(4x-5)^2} + C$

11 a $12(4x + 5)^2$

b $\frac{1}{16}(4x + 5)^4 + C$

12 $s = -\frac{1}{3}e^{-3t} + 3t^2 + \frac{13}{3}$

Ejercitación 9F

1 $\frac{1}{3}(2x^2 + 5)^3 + C$

2 $\ln(x^3 + 2x) + C, x^3 + 2x > 0$

3 $\frac{2}{3}(3x^2 + 5x)^{\frac{3}{2}} + C$

4 $e^{x^4} + C$

5 $-\frac{1}{x^2 + 3x + 1} + C$

6 $e^{\sqrt{x}} + C$

7 $\frac{1}{30}(2x^3 + 5)^5 + C$

8 $\frac{4}{3}(x^2 + x)^{\frac{3}{4}} + C$

9 $\frac{1}{2}(x^4 - x^2)^4 + C$

10 $-\ln(x^3 - 4x) + C, x^3 - 4x > 0$

11 $f(x) = \ln(4x^2 + 1) + 4$

12 $f(x) = e^{x^3} + 4e$

Investigación: área y la integral definida

1 a i 0,5 ii 1; 1,25; 2; 3,25

iii 3,75

b i 0,5 ii 1,25; 2; 3,25; 5

iii 5,75

c 4,67; $3{,}75 < 4{,}67 < 5{,}75$; el área de la región sombreada

2 $\frac{1}{2}(3)(6) = 9$; $\int_{-1}^{2}(2x + 2)\mathrm{d}x = 9$; son iguales.

3 $\int_{b}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

4 a $\frac{1}{2}(2{,}5 + 1)(3) = 5{,}25$;

$\int_{1}^{5}\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)\mathrm{d}x = 5{,}25$

b $\frac{1}{2}\pi(4^2) \approx 25{,}1$;

$\int_{-4}^{4}\sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x \approx 25{,}1$

Ejercitación 9G

1 $\int_{-2}^{6}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\mathrm{d}x = 16$;

$\frac{1}{2}(8)(4) = 16$

2 $\int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)\mathrm{d}x = 4$; no hay fórmula para el área.

3 $\int_{-1}^{3} 3\,\mathrm{d}x = 12$; $(4)(3) = 12$

4 $\int_{0}^{3}\sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x \approx 7{,}07$;

$\frac{1}{4}\pi(3^2) \approx 7{,}07$

5 $\int_{1}^{3}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \approx 1{,}10$; no hay fórmula para el área.

6 $\int_{0}^{6}\left(\frac{1}{3}x + 2\right)\mathrm{d}x = 18$;

$\frac{1}{2}(2 + 4)(6) = 18$

Ejercitación 9H

1 12

2 14

3 −4

4 −8

5 12

6 0

7 11

8 −3

9 20

10 12

11 a 4 b 12

12 a 4

b i $a = 3$; $b = 7$ ii $k = 3$

Ejercitación 9I

1 1

2 $-\frac{10}{3}$

3 $\frac{1}{2}$

4 $-\frac{36}{5}$

5 $4(e^3 - 1)$

6 1

7 $\frac{16}{3}$

8 16

9 a 24 b $\frac{32}{3}$

10 12

Ejercitación 9J

1 $\ln 3$

2 $\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3}$

3 0

4 $2\left(e - \frac{1}{e}\right)$

5 $\frac{56}{9}$

6 320

7 $2\ln\frac{18}{7}$

8 $2(e^4 - e^3)$

9 a $\int_0^2 -2x^2(x-2)\,dx$ b $\frac{8}{3}$

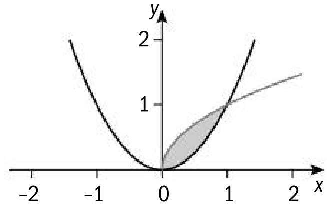
10 5

Investigación: área entre dos curvas

1

Intervalo	Ancho	Altura	Área
$-1{,}5 \le x \le -0{,}5$	1	$f(-1) - g(-1) = -2 - (-3) = 1$	1(1) = 1
$-0{,}5 \le x \le 0{,}5$	1	$f(0) - g(0) = 0 - (-2) = 2$	1(2) = 2
$0{,}5 \le x \le 1{,}5$	1	$f(1) - g(1) = 4 - (-1) = 5$	1(5) = 5
$1{,}5 \le x \le 2{,}5$	1	$f(2) - g(2) = 10 - 0 = 10$	1(10) = 10
$2{,}5 \le x \le 3{,}5$	1	$f(3) - g(3) = 18 - 1 = 17$	1(17) = 17

2



$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{1}{3}$$

5 a (0,0), (–1, 0), (1,0)

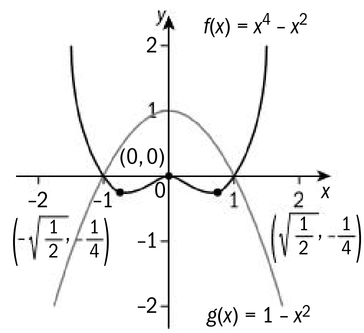
b i $f'(x) = 4x^3 - 2x$

ii Puntos mínimos relativos:

$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{4}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{4}\right)$

Punto máximo relativo: (0, 0)

c i e ii



d $\int_{-1}^{1} ((1 - x^2) - (x^4 - x^2))\,dx = \frac{8}{5}$

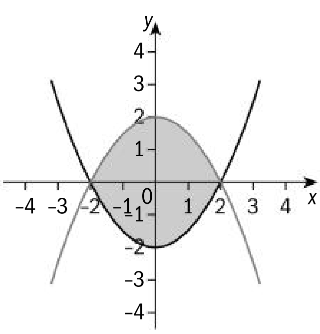
2 Área ≈ 35

3 $\int_{-1,5}^{3,5} [(x^2 + 3x) - (x - 2)]\,dx$

≈ 35,4; los valores están muy próximos.

Ejercitación 9K

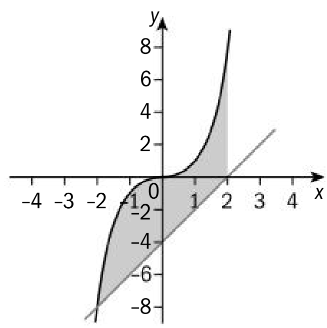
1



$$\int_{-2}^{2}\left(\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)\right)dx$$

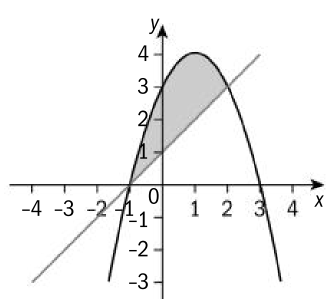
$= \frac{32}{3}$

3



$$\int_{-2}^{2}(x^3 - (2x - 4))\,dx = 16$$

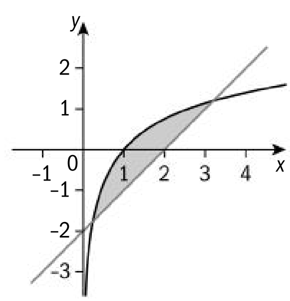
4



$$\int_{-1}^{2}((3 + 2x - x^2) - (x + 1))\,dx$$

$= \frac{9}{2}$

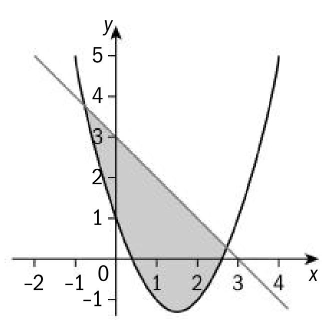
6



$$\int_{0,1586}^{3,146}(\ln(x) - (x - 2))\,dx$$

≈ 1,95

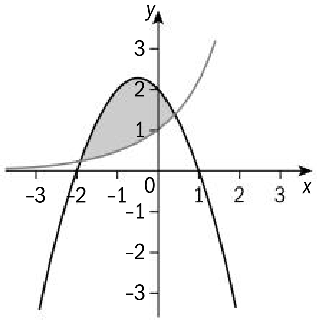
7



$$\int_{-0,7321}^{2,732}((-x + 3) - (x^2 - 3x + 1))\,dx$$

≈ 6,93

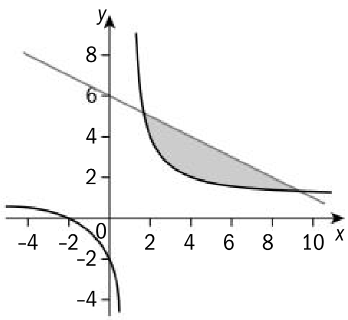
8



$$\int_{-1,952}^{0,3841} ((2-x-x^2)-e^x\,dx$$

$\approx 2,68$

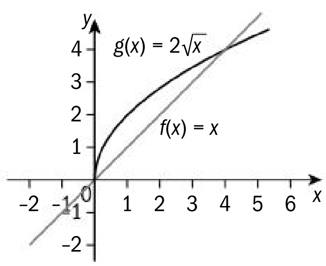
9



$$\int_{1,725}^{9,275}\left(\left(-\frac{1}{2}x+6\right)-\frac{x+2}{x-1}\right)dx$$

$\approx 9,68$

10 a



b i $\displaystyle\int_0^4 \left(2\sqrt{x}-x\right)dx$

ii $2,67$ u $\dfrac{8}{3}$

c i $\displaystyle\int^k \left(2\sqrt{x}-x\right)dx$ o

$\dfrac{4}{3}k^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}k^2$

ii $k \approx 1,51$

Ejercitación 9L

1 $\displaystyle\int_0^1 ((x^3-2x^2)-(2x^2-3x))dx +$

$\displaystyle\int_1^3 ((2x^2-3x)-(x^3-2x^2))dx$

$\approx 3,08$

2 $\displaystyle\int_0^1 ((x-1)^3-(x-1))dx +$

$\displaystyle\int_1^2 ((x-1)-(x-1)^3)dx = 0,5$

3 $\displaystyle\int_{-1,131}^{0} \left(\left(x^3-x\right)-\left(xe^{-x^2}\right)\right)dx +$

$\displaystyle\int_0^{1,131} \left(\left(xe^{-x^2}\right)-\left(x^3-x\right)\right)dx$

$\approx 1,18$

4 $\displaystyle\int_{-3}^{-0,7071} ((-x^4+10x^2-9)-$

$\displaystyle(x^4-9x^2))dx + \int_{-0,7071}^{0,7071} ((x^4-9x^2)$

$-(-x^4+10x^2-9))dx +$

$\displaystyle\int_{0,7071}^{3} ((-x^4+10x^2-9)-$

$(x^4-9x^2))dx \approx 110$

5 a i $(4, 4)$

ii $f'(x) = \dfrac{1}{2}x$

$m = f'(4) = 2$

$y-4 = 2(x-4)$

$y = 2x-4$

b i $(1,236; -1,528)$

ii $\displaystyle\int_0^{1,236}\left(\frac{1}{4}x^2-(-x^2)\right)dx +$

$\displaystyle\int_{1,236}^{4}\left(\frac{1}{4}x^2-(2x-4)\right)dx$

$\approx 2,55$

Investigación: volumen de revolución

1

Intervalo	Radio	Altura	Volumen
$0 \le x \le 1$	$f(1) = 0,5$	$1-0=1$	$\pi(0,5)^2\,(1) \approx 0,7854$
$1 \le x \le 2$	$f(2) = 1$	$2-1=1$	$\pi(1)^2\,(1) \approx 3,142$
$2 \le x \le 3$	$f(3) = 1,5$	$3-2=1$	$\pi(1,5)^2\,(1) \approx 7,069$
$3 \le x \le 4$	$f(4) = 2$	$4-3=1$	$\pi(2)^2\,(1) \approx 12,57$
$4 \le x \le 5$	$f(5) = 2,5$	$5-4=1$	$\pi(2,5)^2\,(1) \approx 19,63$
$5 \le x \le 6$	$f(6) = 3$	$6-5=1$	$\pi(3)^2\,(1) \approx 28,27$

2 71,5; mayor

3 $\displaystyle\int_0^6 \pi(0,5x)^2dx \approx 56,5$

4 Volumen $= \dfrac{1}{3}\pi(3)^2\,(6) \approx 56,5$

Ejercitación 9M

1 $\displaystyle\int_0^5 \pi(4^2)dx \approx 251;$

$V = \pi(4^2)(5) \approx 251$

2 $\displaystyle\int_0^3 \pi(6-2x)^2dx \approx 113;$

$V = \dfrac{1}{3}\pi(6^2)(3) \approx 113$

3 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \pi(\sqrt{4-x^2})^2dx \approx 33,5;$

$V = \dfrac{4}{3}\pi(2^3) \approx 33,5$

4 $\displaystyle\int_0^4 \pi(\sqrt{16-x^2})^2dx \approx 134;$

$V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\pi(4^3)\right) \approx 134$

5 $\displaystyle\int_2^4 \pi(x^2)dx \approx 58,6;\ V = \frac{1}{3}\pi(4^2)(4)$

$-\dfrac{1}{3}\pi(2^2)(2) \approx 58,6$

Ejercitación 9N

1 $\displaystyle\int_1^2 \pi(x^3)^2\,dx = \frac{127\pi}{7}$

2 $\displaystyle\int_0^1 \pi(x^2+1)^2\,dx = \frac{28\pi}{15}$

3 $\displaystyle\int_0^3 \pi(3x-x^2)^2\,dx = \frac{81\pi}{10}$

4 $\displaystyle\int_1^4 \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2dx = \frac{3\pi}{4}$

5 a $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \pi\left(e^{\left(\frac{1}{4}x\right)}\right)^2dx$

b 2

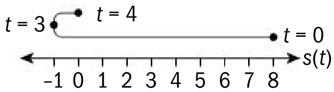
6 a $\displaystyle\int_1^a \pi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

b e^3

Ejercitación 9O

1 a $v(t) = 2t - 6$

b

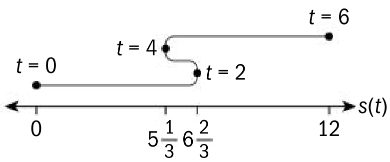


c $\int_0^4 (2t-6)\mathrm{d}t = -8$ m;

$\int_0^4 |2t-6|\,\mathrm{d}t = 10$ m

2 a $v(t) = t^2 - 6t + 8$

b

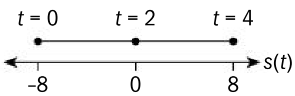


c $\int_0^6 (t^2-6t+8)\mathrm{d}t \approx 12$ m;

$\int_0^6 |t^2-6t+8|\,\mathrm{d}t \approx 14{,}7$ m

3 a $v(t) = 3(t-2)^2$

b



c $\int_0^4 3(t-2)^2\mathrm{d}t = 16$ m;

$\int_0^4 |3(t-2)^2|\,\mathrm{d}t = 16$ m

4 a $\int_2^{12} v(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(6)(6)$
$-\frac{1}{2}(4+2)(2) = 12$ m

$\int_2^{12} |v(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(6)(6)$
$+\frac{1}{2}(4+2)(2) = 24$ m

b $\int_0^5 v(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(2)(2)$
$+\frac{1}{2}(3)(6) = 11$ m

$\int_0^5 |v(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(2)(2)$
$+\frac{1}{2}(3)(6) = 11$ m

c $\int_0^{12} v(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(2)(2) + \frac{1}{2}(6)(6)$
$-\frac{1}{2}(4+2)(2) = 14$ m

$\int_0^{12} |v(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(2)(2) + \frac{1}{2}(6)(6)$
$+\frac{1}{2}(4+2)(2) = 26$ m

5 a $2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

b $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 9t + 12$

c $\int_2^8 |t^2-9|\,\mathrm{d}t \approx 119$ m

6 a $2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

b $2 < t < 10$

c 28

Ejercitación 9P

1 $\int_0^{10} 18{,}4e^{\frac{t}{20}}\,\mathrm{d}t \approx 239$ mil millones de barriles

2 $\int_0^{1,5} (1375t^2 - t^3)\mathrm{d}t \approx 1546$ espectadores

3 $36{,}5 + \int_0^8 5te^{(-0,01t^4+0,13t^3-0,38t^2-0,3t+0,9)}\,\mathrm{d}t \approx 240\ \mathrm{cm}^3$

4 $4000 + \int_0^{20} -133\left(1-\frac{t}{60}\right)\mathrm{d}t \approx$ 1780 galones

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a $x^4 - 4x^2 + 6x + C$

b $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C$

c $-\frac{1}{x^3} + C$

d $\frac{5}{18}x^3 - \frac{1}{2}\ln x + C,\ x > 0$

e $\frac{1}{4}e^{4x} + C$

f $\frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$

g $\frac{1}{2}\ln(2x+3) + C,\ x > -\frac{3}{2}$

h $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C,\ x > 0$

i $\frac{1}{2}(3x^2+1)^2 + C$

j $2\ln(e^x + 3) + C$

k $(2x-5)^{\frac{3}{2}} + C$

l $\frac{1}{2}e^{(2x^2)} + C$

2 a -4

b 16

c 8

d $e^6 - e^3$

e -20

f $\frac{\ln 5}{2}$

3 a $\int_1^2 (x^2-1)\mathrm{d}x$

b $\frac{4}{3}$

c $\int_1^2 (x^2-1)\mathrm{d}x - \int_{-1}^1 (x^2-1)\mathrm{d}x$

d $\pi\int_1^2 (x^2-1)^2\mathrm{d}x$

4 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 4$

5 a 5

b 28

6 $s(t) = 2e^{2t} + 2t + 6$

7 13

Ejercicio de revisión con CPG

1 107

2 a $a(t) = 4t - 11$

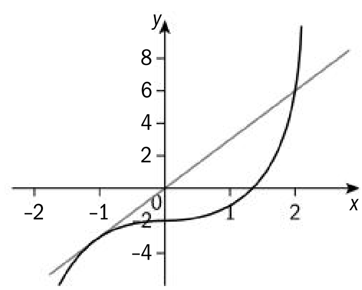
b $a = 1{,}5,\ b = 4$

c 7,83 m

3 a $y = 3x$

b (2, 6)

c



d $\int_{-1}^2 (3x - (x^3-2))\mathrm{d}x = 6{,}75$

Capítulo 10

Comprobemos nuestras habilidades

1 a 32 b 27 c 343

d $\frac{1}{128}$ e $\frac{81}{256}$

f 0,000000001 o 1×10^{-9}

2 a $n = 4$ b $n = 5$ c $n = 3$

d $n = 4$ e $n = 3$ f $n = 3$

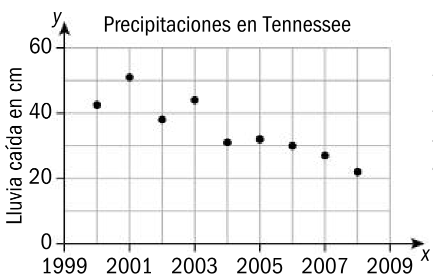
Ejercitación 10A

1 a Positiva, fuerte
 b Negativa, débil
 c Negativa, fuerte
 d Positiva, débil
 e No hay correlación.

2 a i Positiva ii Lineal
 iii Fuerte
 b i Negativa ii Lineal
 iii Fuerte
 c i Positivo ii Lineal
 iii Moderada
 d i No hay asociación.
 ii No lineal
 iii Cero
 e i Positiva ii Lineal
 iii Débil
 f i Negativa
 ii No lineal
 iii Fuerte

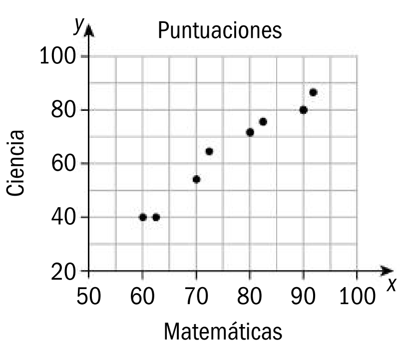
3 a Crece b Decrece

4 a



 b Fuerte, negativa
 c A medida que aumentan los años, disminuyen las precipitaciones.

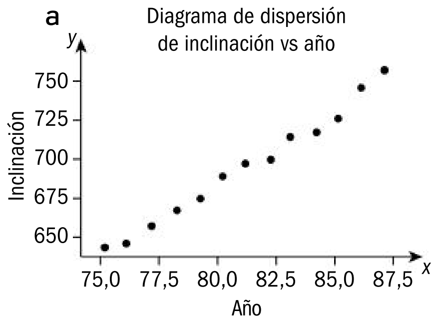
5 a



 b Fuerte, positiva, lineal

Investigación: la torre inclinada de Pisa (continuación)

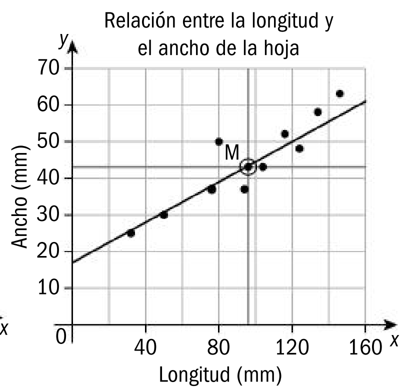
 a



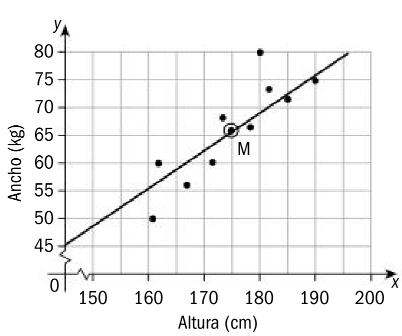
 b Fuerte, positiva
 c La inclinación va en aumento. El peligro de extrapolar es que presupone que continuará la actual tendencia, pero esto no siempre sucede.

Ejercitación 10B

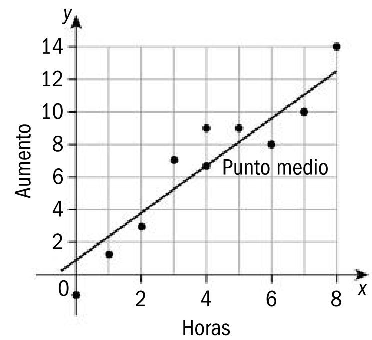
1 a (96,7; 44,1)
 b



2 a i 175 cm
 ii 66 kg
 b



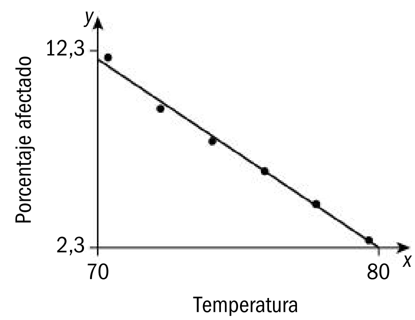
3 a (4; 6,67)
 b



 c Fuerte, positiva
 d Un aumento en el número de horas dedicado al estudio de matemáticas produce un aumento en la calificación.

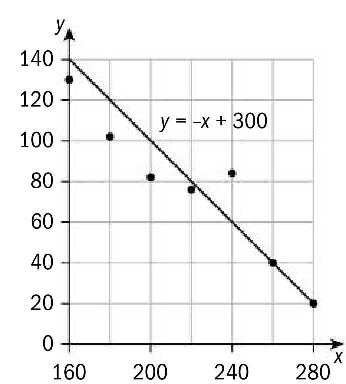
Ejercitación 10C

1 a $(\bar{x}, \bar{y}) = (75; 7{,}03)$



 b $y = -0{,}96x + 79$
 c 7

2 a £220000
 b 75,4
 c y d Nótese que los valores de m y b en la ecuación $y = mx + b$ son aproximados.



 e Aproximadamente 70 casas

Ejercitación 10D

1 La pendiente es –0,3. A medida que el estudiante practica un día más de deporte, realiza 18 minutos menos de tarea.
La intersección con el eje y es 40, lo que significa que el estudiante promedio que no practica deportes hace 40 horas de tarea.

2 La pendiente es 6. Por cada criminal que una persona conoce, habrá sido declarada culpable por 6 delitos.

La intersección con el eje y es 0,5, lo cual significa que la gente que no conoce criminales, habrá sido culpada 0,5 veces.

3 La pendiente es 2,4. Por cada paquete de cigarrillos fumado por semana, una persona tendrá, en promedio, 2,4 días más de enfermedad por año.

La intersección con el eje y es 7, lo que significa que una persona que no fuma tiene 7 días de enfermedad por año.

4 La pendiente es 100. Vendrán 100 clientes más al local cada año.

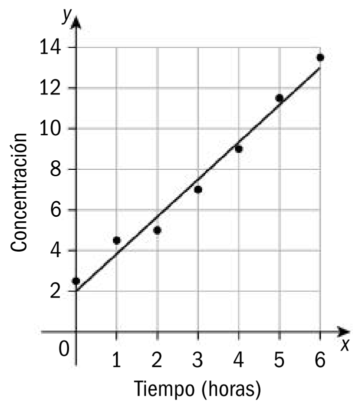
La intersección con el eje y es –5, lo que significa que –5 personas visitaron el local en el año 0; la intersección con el eje y no se presta a la interpretación.

5 La pendiente es 0,8. Por cada 1 punto que se aumenta en matemáticas, se produce un aumento de 0,8 en ciencias.

La intersección con el eje y es –10, lo cual no se presta a la interpretación, ya que un 0 en matemáticas significaría un –10 en ciencia.

Ejercitación 10E

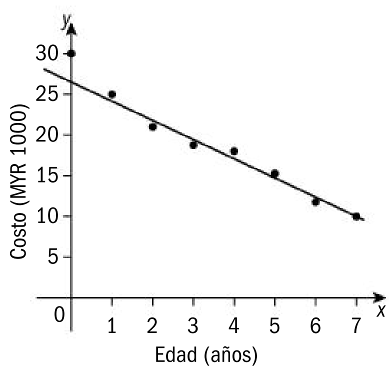
1 a



b $y = 1{,}84x + 1{,}99$

c 8,43 (3 cs)

2 a

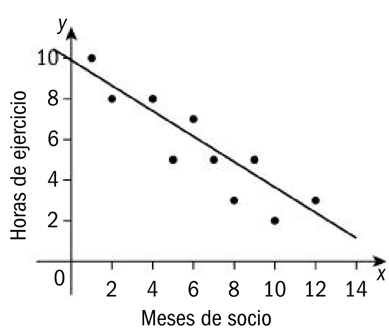


b $y = -2{,}67x + 28{,}1$

c MYR16 085

d La relación puede no ser lineal. Los autos antiguos resultan generalmente más caros que los nuevos luego de 50 años.

3 a



b $y = -0{,}665x + 9{,}86$

c 7,865 horas

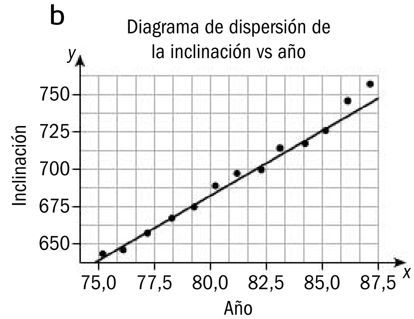
d No. ¡La ecuación da –6,1 horas de ejercicio!

4 50 años = 600 meses, y la recta haría una predicción para la estatura de Sara de 302 cm = 3,02 metros a los 50 años.

Claramente existe un problema con la extrapolación. En realidad, la mayoría de las mujeres llegan a sus estaturas máximas en la mitad o hacia el final de la adolescencia, y de ahí en adelante, la estatura es casi constante, en consecuencia la extrapolación con una función lineal resulta inadecuada.

5 a (1981, 694)

b



c $y = 9{,}32x - 17767$

d 780 m

Ejercitación 10F

1 $r = 0{,}863$. Hay una correlación fuerte y positiva.

2 a 0,789

b Correlación fuerte y positiva

c El ingreso aumenta a medida que el número de años de educación aumenta.

3 a 0,907

b La distancia de frenado aumenta a medida que el auto envejece.

c Correlación fuerte y positiva

4 a –0,887

b Correlación fuerte y negativa

c Sí, las calificaciones de Catalina aumentarían si disminuyera sus horas de chat.

5 a 0,0262

b Correlación débil y positiva

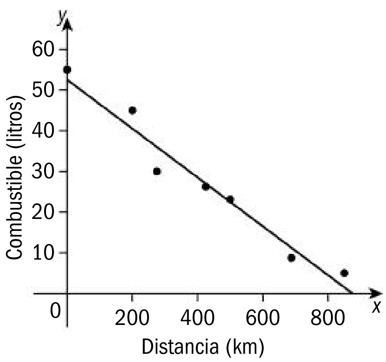
c No. Las calificaciones de Mauro no aumentarían si el tiempo de juego decreciera.

6 0,994. Correlación fuerte y positiva

Ejercicio de revisión sin CPG

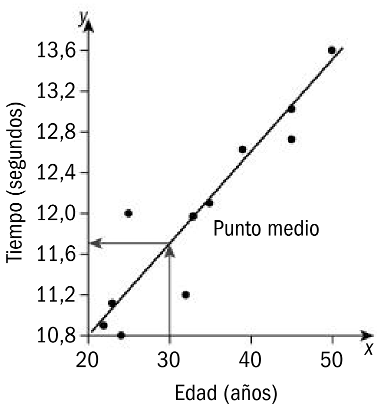
1 a ii b v
 c iii d i

2 a y b



 c 32 litros

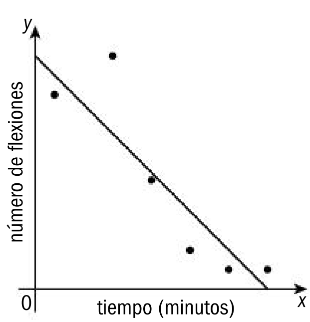
3 a y c



 b Edad media = 34 años, Media del tiempo = 12 segundos
 c Aproximadamente 11,6 s

Ejercicio de revisión con CPG

1 a



 b A medida que el tiempo aumenta, decrece el número de flexiones.

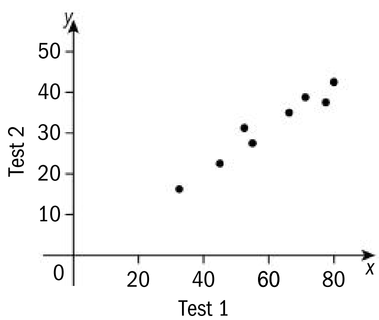
 c $y = -1{,}29x + 9$
 d $r = -0{,}929$. Hay una correlación fuerte y negativa.

2 a $w = -22{,}4 + 55{,}5h$
 b 66,4 kg

3 a $r = 0{,}785$
 b $y = 30{,}6 + 0{,}688x$
 c 99,4

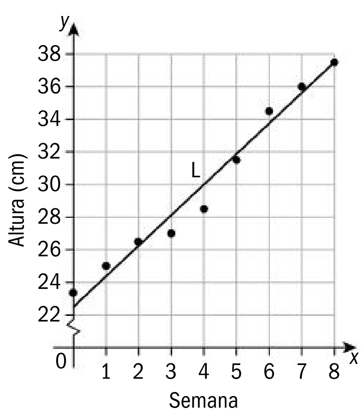
Esto sería razonablemente exacto dado que el coeficiente de correlación momento-producto muestra una correlación bastante fuerte.

4 a



 b Fuerte, positiva
 c Alta
 d $y = 0{,}50x + 0{,}48$
 e 20,48

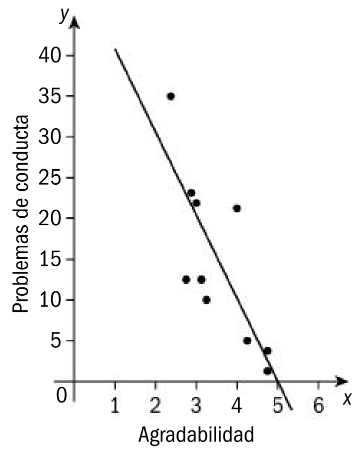
5 a, c y f



 b (4, 30) d i $r = 0{,}986$
   ii Correlación (muy) fuerte y positiva
 e $y = 1{,}83x + 22{,}7$
 g 30,9 cm

 h No es posible hallar una respuesta dado que el valor yace muy afuera del conjunto de datos considerado.

6 a



 b Los problemas de conducta decrecen.
 c $-0{,}797$
 d Correlación fuerte y negativa
 e Menos
 f $y = -10{,}2x + 51{,}0$
 g 5,1

7 a $y = 10{,}7x + 121$
 b i Producir cada abrigo cuesta \$10,66.
   ii Cuando la fábrica no produce ningún abrigo debe pagar costos por \$121.
 c \$870
 d 14

Capítulo 11

Comprobemos nuestras habilidades

1 a $x = 90°$
 b $x = 50°$
 c $x = 68°$
 d $x = 23{,}3°$
 e $x = 6{,}09$ (3 cs)
 f $x = 14{,}7$ (3 cs)

Ejercitación 11A

1 $b = 16$; $\hat{A} = 36{,}9°$; $\hat{B} = 53{,}1°$

2 $\hat{B} = 50°$; $a = 31{,}0$; $c = 48{,}3$

3 $\hat{A} = 35°$; $a = 2{,}58$; $b = 3{,}69$

4 $a = 36$; $\hat{A} = 36{,}9°$; $\hat{B} = 53{,}1°$

5 $\hat{B} = 55°$; $b = 15{,}7$; $c = 19{,}2$

6 $c = 12{,}9$ cm; $\hat{A} = 41{,}2°$; $\hat{B} = 48{,}8°$

7 $x = 5$; $\hat{A} = 22{,}6°$; $\hat{B} = 67{,}4°$

Ejercitación 11B

1 a $b = 12\sqrt{3}$ cm, $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 60°$

b $\hat{B} = 45°$, $a = 9$ cm, $c = 9\sqrt{2}$ cm

c $\hat{A} = 30°$; $a = 2{,}25$ cm, $b = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm

d $a = 2\sqrt{3}$ cm, $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 60°$

e $b = 5\sqrt{2}$ cm, $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 45°$

2 $x = 8\sqrt{2}$ cm, $y = 8\sqrt{3} - 8$ cm, $z = 16$ cm

3 $x = \dfrac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$, $AC = \dfrac{4\sqrt{3}+2}{3}$

4 $x = 1$, $AB = 3\sqrt{2}$ cm o $x = 3$, $AB = 11\sqrt{2}$ cm

5 $w = 9{,}8$ cm; $x = 13{,}9$ cm; $y = 6{,}5$ cm; $z = 15{,}4$ cm

Ejercitación 11C

1 a $10\sqrt{2}$ cm

b $B\hat{A}C = 70{,}5°$ $A\hat{B}C = 38{,}9°$

2 a $AE = 29{,}1$, $BE = 34{,}4$

b $A\hat{E}D = 74{,}1°$, $E\hat{B}A = 54{,}5°$, $A\hat{E}B = 51{,}5°$

3 758 m

4 71,5° y 108,5°

5 4,78 km; N21,1°O

6 70,7 m

7 44,8 km; 243,5°

8 135,7 m; 202,2 cm

9 91,2 m

10 40,7 m

11 4,01 s

12 a 20,6° b 26,6° c 35,1° d 50,0°

Ejercitación 11D

1 a (0,940; 0,342)

b (0,956; 0,292)

c (0,5; 0,866)

d (0,276; 0,961)

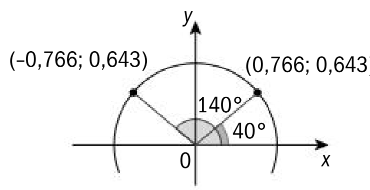
e (0, 1)

2 a 66° b 81° c 45° d 14°

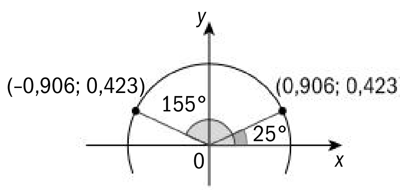
3 a 0,161 b 0,243 c 0,186 d 0,217

Investigación: ángulos obtusos

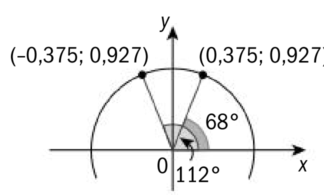
1



2



3



Ejercitación 11E

1 a $B\,(0{,}866; 0{,}5)$, $C\,(-0{,}866; 0{,}5)$

b $B\,(0{,}545; 0{,}839)$, $C\,(-0{,}545; 0{,}839)$

c $B\,(0{,}707; 0{,}707)$, $C\,(-0{,}707; 0{,}707)$

d $B\,(0{,}974; 0{,}225)$, $C\,(-0{,}974; 0{,}225)$

e $B\,(0{,}087; 0{,}996)$, $C\,(-0{,}087; 0{,}996)$

2 a 70,6°

b 17,3°

c 25,4°

d 39,7°

3 a 0,2588; 165°

b 0,5878; 144°

c 0,9877; 99°

d 0,8988; 116°

4 a 60,6°; 119,4°

b 25,8°; 154,2°

c 30,3°; 149,7°

d 30°, 150°

Ejercitación 11F

1 a 1,50 b –1,92 c –0,910 d 1

2 a $y = 1{,}09x$; $\theta = 48°$

b $y = 1{,}87x$; $\theta = 62°$

c $y = -2{,}80x$, $\theta = 110°$

d $y = -1{,}21x$; $\theta = 129°$

e $y = -0{,}75x$; $\theta = 143°$

f $y = 2{,}36x$; $\theta = 113°$

Ejercitación 11G

1 a $\hat{C} = 50°$, $a = 17{,}7$ cm, $c = 18{,}5$ cm

b $\hat{B} = 68°$, $a = 1{,}69$ cm, $b = 2{,}44$ cm

c $\hat{B} = 40{,}9°$, $\hat{C} = 84{,}1°$, $c = 5{,}46$ cm

d $\hat{A} = 40°$, $a = 149$, $c = 190$

e $\hat{C} = 110°$, $a = 2{,}80$, $b = 4{,}21$

2 26,9 cm

3 3,37 km, 2,24 km

4 15,8 m

Investigación: triángulos ambiguos

1 $\hat{C}_1 = 62°$, $\hat{C}_2 = 118°$. Los ángulos son suplementarios.

2 $\hat{B}_1 = 86°$; $\hat{B}_2 = 30°$, $b_1 = 5{,}65$ cm; $b_2 = 2{,}83$ cm

Ejercitación 11H

1 a $\hat{C}_1 = 61{,}0°$; $\hat{B}_1 = 89{,}0°$; $b_1 = 8{,}0$ cm

$\hat{C}_2 = 119{,}0°$; $\hat{B}_2 = 31{,}0°$; $b_2 = 4{,}1$ cm

b $\hat{C}_1 = 71{,}1°$; $\hat{A}_1 = 58{,}9°$; $a_1 = 19{,}0\,\text{cm}$
$\hat{C}_2 = 108{,}9°$; $\hat{A}_2 = 21{,}1°$; $a_2 = 8{,}0\,\text{cm}$

c $\hat{B}_1 = 68{,}5°$; $\hat{A}_1 = 91{,}5°$; $a_1 = 7{,}3\,\text{cm}$
$\hat{B}_2 = 111{,}5°$; $\hat{A}_2 = 48{,}5°$; $a_2 = 5{,}5\,\text{cm}$

d $\hat{C} = 30{,}5°$; $\hat{B} = 107{,}5°$; $b = 47{,}0\,\text{cm}$

e El triángulo no existe.

f $\hat{B}_1 = 77{,}8°$; $\hat{C}_1 = 32{,}2°$; $c_1 = 14{,}2\,\text{cm}$
$\hat{B}_2 = 102{,}2°$; $\hat{C}_2 = 7{,}8°$; $c_2 = 3{,}6\,\text{cm}$

g $\hat{B} = 26{,}7°$; $\hat{C} = 108{,}3°$; $c = 29{,}5\,\text{cm}$

h $\hat{C}_1 = 67{,}1°$; $\hat{A}_1 = 56{,}9°$; $a_1 = 45{,}5\,\text{cm}$
$\hat{C}_1 = 112{,}9°$; $\hat{A}_2 = 11{,}1°$; $a_2 = 10{,}4\,\text{cm}$

2 a $BE = 8\,\text{m}$, $CE = 6\,\text{m}$, $DE = 15\,\text{m}$

b $EAB = 53{,}1°$; $B\hat{C}E = 53{,}1°$; $B\hat{C}D = 126{,}9°$; $A\hat{B}D = 98{,}8°$; $C\hat{B}D = 25{,}1°$
$B\hat{D}C = 28{,}1°$

c Dado que el lado BD = 17 m en $\triangle ABD$ y el ángulo $\hat{D} = 28{,}1°$, y el lado $AB = 10$, hay 2 triángulos posibles que se ajustan a estos datos, a saber, DBA y DBC.

3 b 5,80 km c 19,1 km
d 143,5°

Ejercitación 11I

1 a $a = 65{,}7\,\text{m}$; $\hat{B} = 36{,}0°$; $\hat{C} = 80{,}0°$

b $\hat{A} = 28{,}9°$; $\hat{B} = 52{,}8°$; $\hat{C} = 98{,}4°$

c $\hat{A} = 44{,}4°$; $\hat{B} = 107{,}8°$; $\hat{C} = 27{,}8°$

d $b = 7{,}48\,\text{m}$; $\hat{A} = 43{,}5°$; $\hat{C} = 105{,}5°$

e $c = 92{,}8\,\text{m}$; $\hat{A} = 49{,}4°$; $\hat{B} = 60{,}6°$

f $\hat{A} = 48{,}6°$; $\hat{B} = 56{,}4°$; $C = 75{,}0°$

2 12,1 km
3 4,07 cm; 6,48 cm
4 18,8 km
5 043,5° o 136,5°
6 a 45°
b 71,8°
c 63,8°

Ejercitación 11J

1 a $26{,}7\,\text{cm}^2$
b $40{,}8\,\text{cm}^2$
c $152\,\text{cm}^2$
d $34{,}1\,\text{cm}^2$
e $901\,\text{cm}^2$
f $435\,\text{cm}^2$
2 47,8°
3 22,7 cm
4 a 76,7°
b $81{,}4\,\text{cm}^2$
5 $x = 2{,}5\,\text{cm}$
6 5,31 mm; 18,5 mm

Ejercitación 11K

1 9,52 cm
2 39 cm
3 5 radianes
4 $3000\,\text{cm}^2$, 220 cm
5 $22{,}95\,\text{cm}^2$; 21,3 cm
6 $\theta = 1{,}7$; radianes $r = 16$
7 $7{,}96\,\text{cm}^2$

Ejercitación 11L

1 a $\frac{5\pi}{12}$
b $\frac{4\pi}{3}$
c $\frac{4\pi}{9}$
d $\frac{11\pi}{6}$
2 a 0,977 rad
b 1,87 rad
c 5,65 rad
d 4,01 rad
3 a 150°
b 300°
c 270°
d 225°
4 a 85,9°
b 20,6°
c 136°
d 206°

Ejercitación 11M

1 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b $-\frac{1}{2}$
c $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2 a 0,892
b 0,949
c –1,12
d 0,667
3 a $9{,}76\,\text{cm}^2$
b 5,45 cm
c $50{,}5\,\text{cm}^2$
4 $10{,}9\,\text{m}^2$
5 a $17{,}1\,\text{cm}^2$ b $12{,}1\,\text{cm}^2$
c 2,63 rad d 15,8 cm

Ejercicio de revisión sin CPG

1 $7\sqrt{2}\,\text{cm}$
2 a 30° b $8\sqrt{3}\,\text{cm}$
3 $\frac{2}{5}$
4 $10\,\text{cm}^2$
5 a 25 cm b $125\,\text{cm}^2$

Ejercicio de revisión con CPG

1 72,7 m

2 a (0,848; 0,530)
  b 72,9°
  c (−0,600; 0,800)

3 a 54,7° b 10,9 cm

4 a 18,0 m b 34,3°

5 a 121° b 8,60 cm

6 54,1 km

7 a 31,9 b 13,9 cm
  c 119 d 27,6 cm²

8 a 21,6 cm b 14,5 cm
  c 11,16 cm d 47,3 cm

Capítulo 12

Comprobemos nuestras habilidades

1 a (3, 0, 0)
  b (3, 4, 0)
  c (3, 0, 2)
  d (3, 4, 2)
  e (1,5; 4, 2)

2 6,71

3 a 20 cm
  b 101°

Ejercitación 12A

1 a $\mathbf{x} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
  b $\mathbf{y} = 7\mathbf{j}$
  c $\mathbf{z} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

2 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
  b $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$
  c $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\mathbf{j}$
  $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

4 a 5
  b $\sqrt{10} = 3{,}16$
  c $\sqrt{29} = 5{,}39$
  d 5,3
  e $\sqrt{29} = 5{,}39$

5 a $\sqrt{38} = 6{,}16$
  b $\sqrt{26} = 5{,}10$
  c 3
  d 7
  e $\sqrt{2} = 1{,}41$

Ejercitación 12B

1 a $\mathbf{c} = 3\mathbf{b}$
  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$
  $\mathbf{e} = -5\mathbf{b}$
  $\mathbf{f} = -2\mathbf{a}$
  b Son perpendiculares.

2 **a**, **b**, **e**

3 a $\frac{-24}{7}$ b $\frac{28}{5}$

4 $t = -25$, $s = -\frac{8}{5}$

5 a $\overrightarrow{OG} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
  b $\overrightarrow{BD} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
  c $\overrightarrow{AD} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$
  d $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

6 a $\overrightarrow{OG} = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
  b $\overrightarrow{BD} = -5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
  c $\overrightarrow{AD} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
  d $\overrightarrow{OM} = \frac{5}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

Ejercitación 12C

1 $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$
  b $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
  c $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$
  d $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

3 a $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
  b $-\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
  c $-\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
  d $\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

4 $\overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

5 $\overrightarrow{US} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

6 $x = 0$, $y = 7$, $z = 9$

Ejercitación 12D

1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$,
  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}$. Cualquier par de entre estos vectores son múltiplos escalares uno del otro y tienen un punto en común.

2 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$
  b $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$; por lo tanto,
  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ o
  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$; por lo tanto, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}$
  También tienen un punto en común.

3 $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
  $\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_4\left(2, \frac{7}{3}, 4\right)$

4 $x = \frac{5}{3}$; $AB : BC = 2 : 1$

Ejercitación 12E

1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\sqrt{29} = 5,39$

2 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{129}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{242}$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{129}$. Dos lados son iguales; por lo tanto, es isósceles. Ángulo $CAB = 46,8°$

3 $t = \pm 6$

4 $x = \pm\sqrt{5}$

5 $a = \pm 2$

6 a 15
b 10
c 13

Ejercitación 12F

1 $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

2 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

3 $\frac{1}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$

4 $\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

5 $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$

6 $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

7 $\frac{5}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$

8 $\frac{7}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{14}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

9 a $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$
b $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$

Ejercitación 12G

1 a $5\mathbf{i} + \mathbf{j}$
b $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
c $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
d $8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
e $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
f $2\mathbf{i}$

2 a $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
b $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
c $\begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \end{pmatrix}$
d $\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$
e $\begin{pmatrix} 3 \\ -34 \end{pmatrix}$

3 a $8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
b $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
c $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
d $8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

4 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5,5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} \\ -16 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$

5 $x = -4,5$; $y = 10,5$

6 $s = 4,5$; $t = 9$; $u = 9$

Ejercitación 12H

4 a i $\mathbf{b} - \mathbf{a}$
ii $\mathbf{b} - \mathbf{a}$
iii $2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$
iv $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$
v $2\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$
b *AB* es paralelo a *FC*; la longitud de *AB* es la mitad de la de *FC*.
c *FD* y *AC* son paralelos

5 d $\overrightarrow{MX} = 3\overrightarrow{MP}$ y comparten un punto.

Ejercitación 12I

1 a –18 b 5
c 20 d –13
e –13

2 a –9 b 20
c 20 d –58
e 13

3 a Perpendiculares
b Ninguna de las dos
c Paralelos
d Ninguna de las dos
e Perpendiculares
f Paralelos
g Paralelos

4 –15

5 $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

6 45°

7 a 94,8°
b 161,6°
c 136,4°

8 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
b –11
c $\frac{-11}{\sqrt{26}\sqrt{5}} = \frac{-11}{\sqrt{130}}$

9 a 79,0°
b 90°
c 118,1°

10 a $AB = \sqrt{17}$; $AC = \sqrt{26}$
b $\cos BAC = \frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{26}}$
c 10,5

11 54,7°

12 a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$; en consecuencia, son perpendiculares.
b $\sqrt{62} \approx 7,87$

13 $\lambda = 2,5$

14 $\lambda = \pm 9$

15 $p = \pm 3$

Ejercitación 12J

1 a $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
b $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
c $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$
d $\mathbf{r} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k} + t(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$

2 a P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$
b P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
c P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$
d P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3 a P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

b P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

c P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

d P.ej. $\mathbf{r} = 5\mathbf{k} + t(4\mathbf{i} - \mathbf{k})$

4 a Sí b No

c Sí d No

5 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\3\\8\end{pmatrix}$

$p = -2,\ q = 21$

6 P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

7 a Coincidentes

b Perpendiculares

c Paralelas

d Ninguna

e Ninguna

8 a 53,6° b 115,2°

10 a i $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

ii $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

b i $|\overrightarrow{OF}| = \sqrt{38}$

ii $|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{38}$

iii $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AG} = 30$

c 37,9°

11 a $\overrightarrow{AB} = 7\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

b $\cos O\hat{A}B = \dfrac{49}{\sqrt{30}\sqrt{117}}$

d $\mu = \dfrac{49}{177}$

e $\dfrac{520}{177}, \dfrac{493}{177}, \dfrac{38}{177}$

Ejercitación 12K

1 (4, 2)

2 $\begin{pmatrix}\frac{48}{5}\\ \frac{-3}{5}\end{pmatrix}$ 3 $\left(\frac{23}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

4 $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

6 a $\begin{pmatrix}5\\-8\\15\end{pmatrix}$

b Producto escalar = 0

7 a $a = 5;\ b = 8$

b (4, 5, 7)

c $3\sqrt{10}$

8 a P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$

b (3, –2, –1)

c $\sqrt{11}$

d 120°

Ejercitación 12L

1 a $\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$ o 10 km al norte y 15 km este

b $5\sqrt{13}$ km

2 a $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ m s^{-1} b $\begin{pmatrix}50\\-20\end{pmatrix}$

c 13 m s^{-1}

d $8\sqrt{29}$ m

e Colisionarán.

3 a 4 p.m. b $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

4 a $3\sqrt{2}$ m s^{-1} y $\sqrt{86}$ m s^{-1}

c 5,2 m

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}9\\-3\\-6\end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = -3\,\overrightarrow{AB}$ y

$\overrightarrow{BC} = -2\,\overrightarrow{AB}$

B es un punto en común.

3 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$

4 (7, 9, 0)

5 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -9$

6 a $\begin{pmatrix}-2\\10\\1\end{pmatrix}$

b $t = 2$

7 a $r = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

b (4, 8, 8)

d $\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$

e $2\sqrt{14}$

8 a 12,30 p.m.; $\begin{pmatrix}-2\\11{,}5\end{pmatrix}$

b 3 km

Ejercicio de revisión con CPG

1 122°

2 a $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}, \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

b 46,1°

c 2,60

3 a i $4\mathbf{j}$ ii $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{k}$

iii $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

b $\overrightarrow{BC} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{3}k$

$\overrightarrow{BD} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{3}k$

c i $\sqrt{20}$ ii $\sqrt{20}$

iii 18

d 25,8°

4 a 0, 4, –2

b 82,9°

5 a $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}$

b P.ej. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

d 22°

6 a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}$

c (36, 18, 0) d 5,10 m s^{-1}

e 6 segundos f (18, –6, 6)

Capítulo 13

Comprobemos nuestras habilidades

1 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b $\sqrt{3}$

c $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b -1

c -1 d $-0{,}5$

3 a $-1{,}48$ b ± 2

4 a $-0{,}182$; $2{,}40$ b $\pm 1{,}14$

Investigación: seno, coseno y tangente en el círculo de radio unidad

1 $\text{sen}90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\tan 90°$ no existe

2 $\text{sen}180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\tan 180° = 0$

3 $\text{sen}270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\tan 270°$ no existe

4 $\text{sen}360° = 0$, $\cos 360° = 1$, $\tan 360° = 0$

5 $\text{sen}(-90°) = -1$, $\cos(-90°) = 0$, $\tan(-90°)$ no existe

6 $\text{sen}(-180°) = 0$, $\cos(-180°) = -1$, $\tan(-180°) = 0$

7 $\text{sen}0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\tan 0 = 0$

8 $\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\tan\frac{\pi}{2}$ no existe

9 $\text{sen}\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\tan\pi = 0$

10 $\text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\tan\frac{3\pi}{2}$ no existe

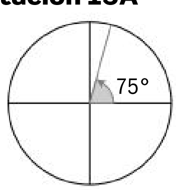
11 $\text{sen}-\frac{3\pi}{2} = 1$, $\cos-\frac{3\pi}{2} = 0$,

$\tan-\frac{3\pi}{2}$ no existe.

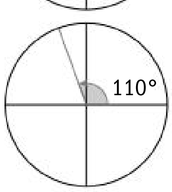
12 $\text{sen}4\pi = 0$, $\cos 4\pi = 1$, $\tan 4\pi = 0$

Ejercitación 13A

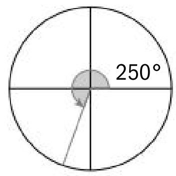
1 a



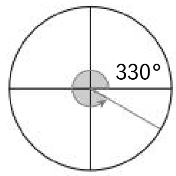
b



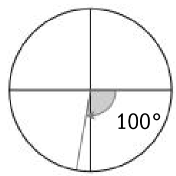
c



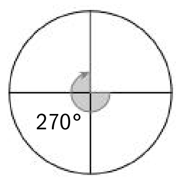
d



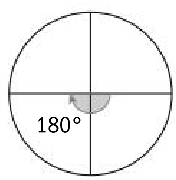
e



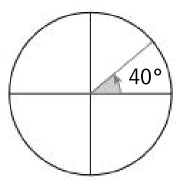
f



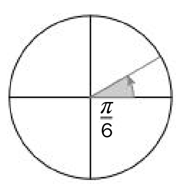
g



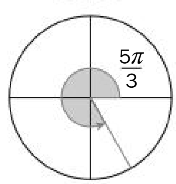
h



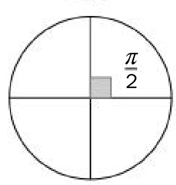
2 a



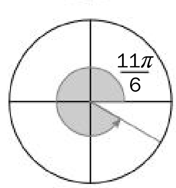
b



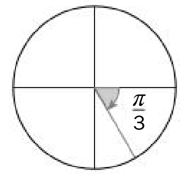
c



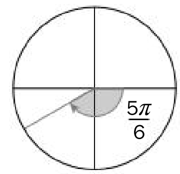
d



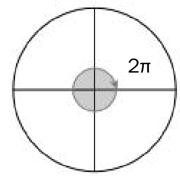
e



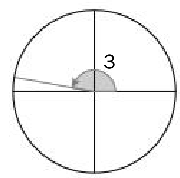
f



g



h



Las preguntas 3 a 8 tienen muchas otras respuestas correctas posibles.

3 a $120°$, $-240°$, $-300°$

b $340°$, $-20°$, $-160°$

c $255°$, $285°$, $-105°$

d $65°$, $-245°$, $-295°$

4 a $-35°$, $\pm 325°$

b $-130°$, $\pm 230°$

c $-295°$, $\pm 65°$

d $240°$, $\pm 120°$

5 a $230°$, $-130°$, $-310°$

b $280°$, $-80°$, $-260°$

c $40°$, $-140°$, $-320°$

d $155°$, $335°$, $-205°$

6 a $\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$

b $\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

c $3\pi - 4{,}1$; $4{,}1 - 2\pi$, $\pi - 4{,}1$

d $\pi + 3$, $2\pi - 3$, $3 - \pi$

7 a $-\frac{\pi}{6}, \pm\frac{11\pi}{6}$

b -1, $\pm(1 - 2\pi)$

c $-2{,}5$; $\pm(2{,}5 - 2\pi)$

d $\frac{3\pi}{5}, \pm\frac{7\pi}{5}$

8 a $\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$

b $1{,}3 + \pi,\ 1{,}3 - \pi,\ 1{,}3 - 2\pi$

c $\frac{12\pi}{7}, -\frac{2\pi}{7}, -\frac{9\pi}{7}$

d $2\pi - 5,\ \pi - 5,\ -5 - \pi$

Ejercitación 13B

1 a $0{,}940$ b $0{,}342$

c $-0{,}342$ d $-0{,}940$

2 a $-\frac{1}{2}$ b $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c $-\frac{1}{2}$ d $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 a $0{,}8$ b $0{,}6$ c $0{,}6$

d $-0{,}8$ e $\frac{4}{3}$ f $-\frac{4}{3}$

g $-0{,}8$ h $\frac{4}{3}$

4 a $\frac{a}{b}$ b a c $-b$

d $\frac{a}{b}$ e $-a$ f b

g $-a$ h $-b$

Ejercitación 13C

1 a $-300°, -240°, 60°, 120°$

b $\pm 120°, \pm 240°$

c $-315°, -135°, 45°, 225°$

d $-360°, -180°, 0°, 180°, 360°$

e $\pm 45°, \pm 135°, \pm 225°, \pm 315°$

f $\pm 30°, \pm 150°, \pm 210°, \pm 330°$

2 a $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

b $0, \pm\pi, \pm 2\pi$

c $\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{11\pi}{6}$

d $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

e $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{4\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$

f $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

3 a $0°, 360°, 720°$

b $-135°, -45°, 225°, 315°, 585°, 675°$

c $-45°, 135°, 315°, 495°, 675°, -225°$

d $\pm 60°, \pm 120°, 240°, 300°, 420°, 480°, 600°, 660°$

4 a $\frac{\pi}{2}$ b $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$

c $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$ d $\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{5\pi}{6}$

Ejercitación 13D

1 a $\pm 15°, \pm 165°$

b $-165°, -105°, 15°, 75°$

c $90°$

d $\pm 180°$

2 a $-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$

b $-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$

c $\pm\frac{\pi}{2}$ d $\pm\frac{3\pi}{4}$

3 a $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ b $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

c $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ d $\frac{\pi}{2}$

Ejercitación 13E

1 a $\frac{5\sqrt{11}}{18}$ b $-\frac{7}{18}$ c $-\frac{5\sqrt{11}}{7}$

2 a $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ b $-\frac{1}{9}$ c $4\sqrt{5}$

3 a $\frac{\sqrt{11}}{5}$ b $\frac{5\sqrt{11}}{18}$

c $\frac{7}{18}$ d $\frac{5\sqrt{11}}{7}$

4 a $\frac{\sqrt{63}}{32}$ b $\frac{31}{32}$

c $\frac{\sqrt{63}}{31}$ d $\frac{31\sqrt{63}}{512}$

5 a $\frac{3}{5}$ b $\frac{4}{5}$

c $\frac{24}{25}$ d $\frac{7}{25}$

6 a $-\frac{7}{25}$ b $-\frac{24}{7}$

c $-\frac{336}{625}$ d $-\frac{527}{625}$

7 a $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ b $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

c $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ d $\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$

Ejercitación 13F

1 a $30°, 90°, 150°$

b $22{,}5°; 112{,}5°$

c $135°$

d $45°, 135°$

2 a $-150°, -120°, 30°, 60°$

b $90°$

c $\pm 150°, \pm 30°$

d $-90°, 30°, 150°$

3 a $0, \pi$

b $\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$

c $0, \frac{2\pi}{3}$

d $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi$

4 a $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$ b $\frac{\pi}{2}$

c $0, \pi$ d $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

5

6 $k = 6$

7 $b = 8$

Ejercitación 13G

1 $-346°, -194, 14°, 166°$

2 $\pm 27°, 333°$

3 $244°, 296°$

4 $55°, 235°, 415°$

5 $-5{,}33; -4{,}10; 0{,}955; 2{,}19$

6 $\pm 1{,}71; 4{,}58$

7 $-0{,}739$

8 $-0{,}637; 1{,}41$

Investigación: representación gráfica de tan *x*

1

Amplitud del ángulo (*x*) (grados)	Valor de la tangente (tan x)
0	0
–30, +30	$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$
–45, +45	–1, 1
–60, +60	$-\sqrt{3}, \sqrt{3}$
120	$-\sqrt{3}$
135	–1
150	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
180	0
210	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
225	1
240	$\sqrt{3}$
300	$-\sqrt{3}$
315	–1
330	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
360	0

3 $\tan \pm 90°$ y $\tan \pm 270°$ están indefinidas. El límite de la tangente a medida que el ángulo se aproxima a $\pm 90°$ o $\pm 270°$ es infinito. A menudo, en los gráficos se muestran asíntotas para valores que no existen.

Ejercitación 13H

1 −297°, −117°, 63°, 243°

2 −107°, 73°, 253°

3 124°, 304°

4 38°, 142°, 398°, 502°

5 −5,88; −2,74; 0,405; 3,55

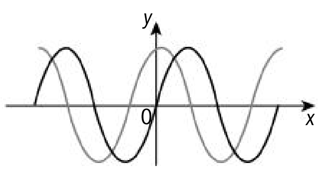
6 −1,88; 1,26

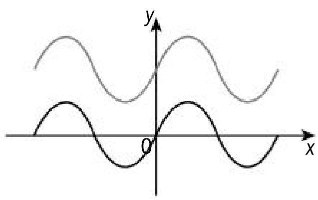
7 4,55

8 −4,66; 1,20; 2,28; 4,77

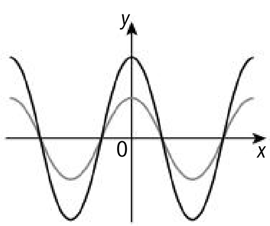
Investigación:
transformaciones de sen *x* y cos *x*

1

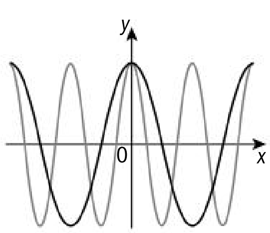




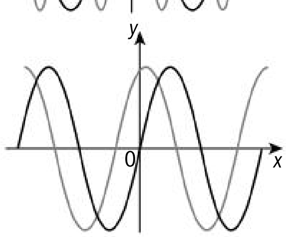
2



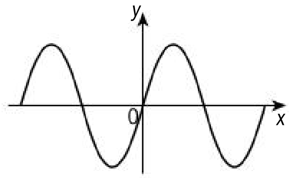
3



4

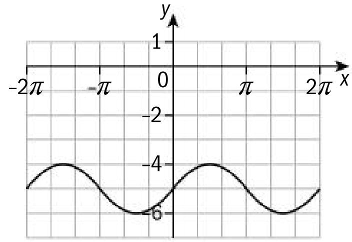


5

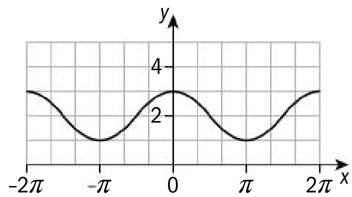


Ejercitación 13I

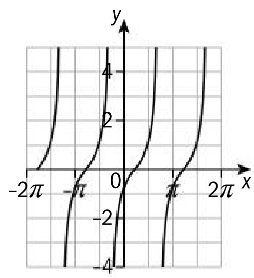
1



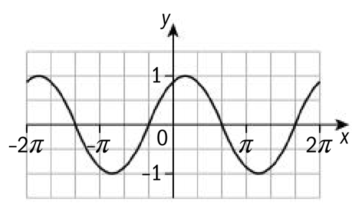
2



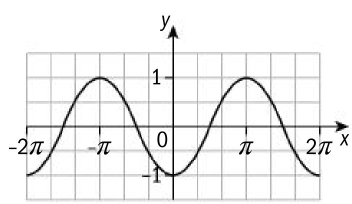
3



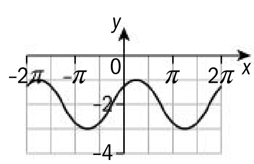
4



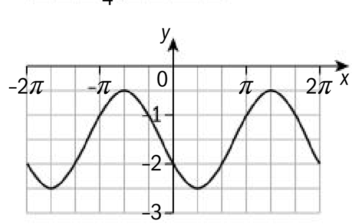
5



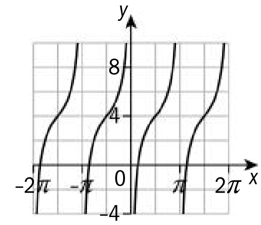
6



7



8



9 $y = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ o

$y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

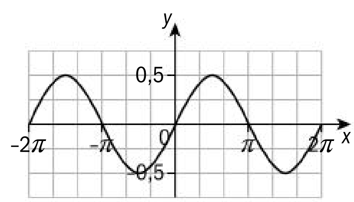
10 $y = \operatorname{sen} x + 1$

11 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

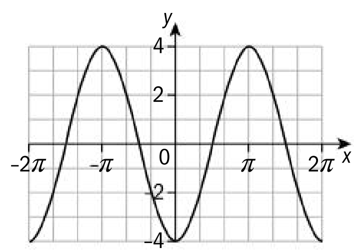
12 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1,5$

Ejercitación 13J

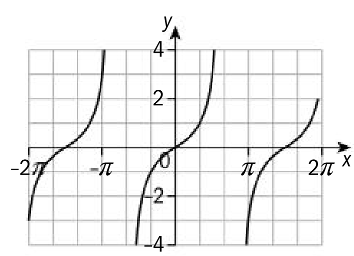
1



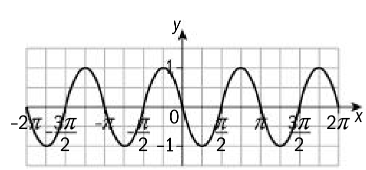
2



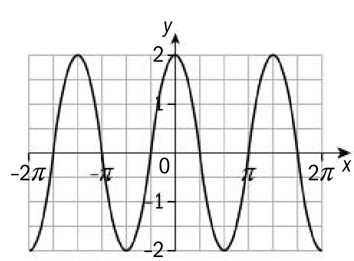
3



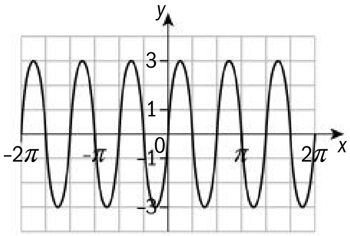
4



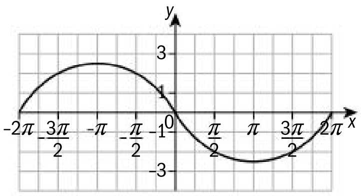
5



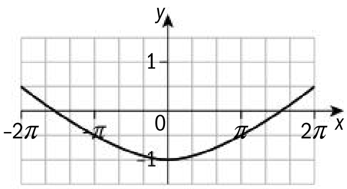
6



7



8



9 $y = 7{,}5\operatorname{sen} x$

10 $y = \cos(0{,}25x)$

11 $y = \tan(0{,}25x)$

12 $y = -3\cos(0{,}5x)$ o

$y = 3\operatorname{sen}\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$

Ejercitación 13K

Para las preguntas 1 a 4, las respuestas pueden variar.

1 $y = 3{,}5\operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - 1{,}5;$

$y = 3{,}5\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - 1{,}5$

2 $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\right) - 2;$

$y = \cos\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 2$

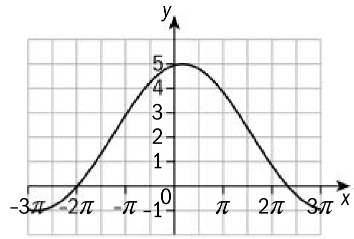
3 $y = 2\operatorname{sen}(2x) + 1;$

$y = 2\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$

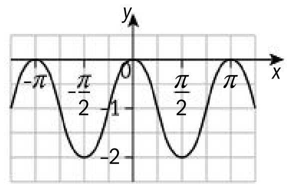
4 $y = 5\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right);$

$y = -5\cos\left(\frac{2}{3}\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$

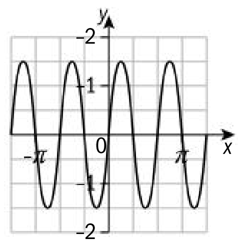
5



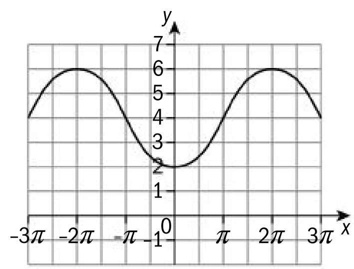
6



7

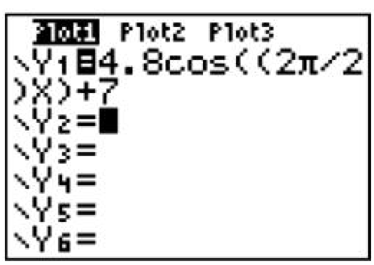


8

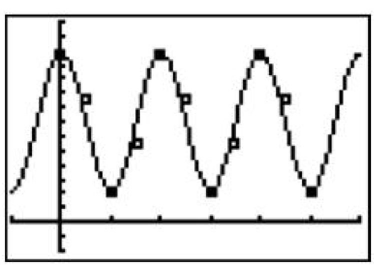


Ejercitación 13L

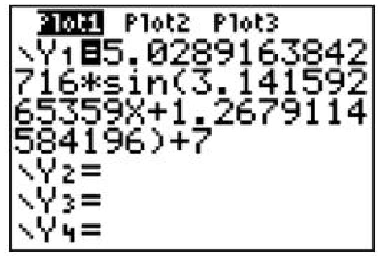
1 a, b $y = 4{,}8\cos\left(\frac{2\pi}{2}x\right) + 7$

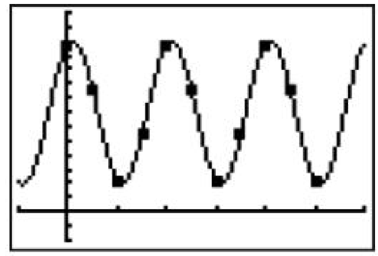


c

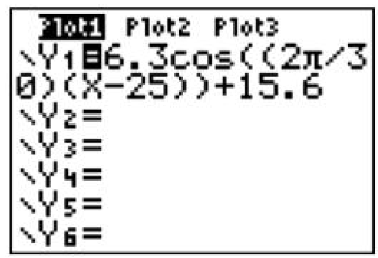


d

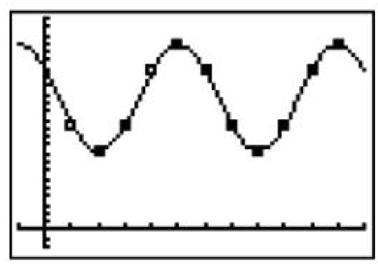




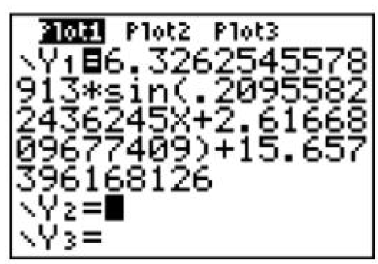
2 a, b
$y = 6{,}3\cos\left(\left(\frac{2\pi}{30}\right)(x - 25)\right) + 15{,}6$

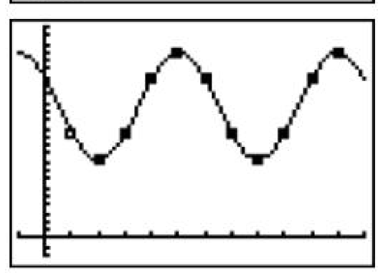


c

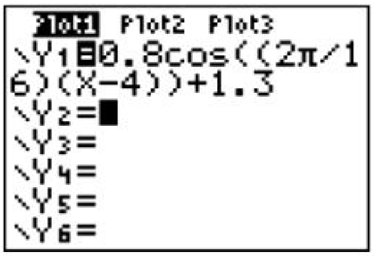


d

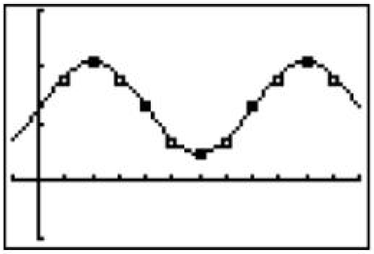




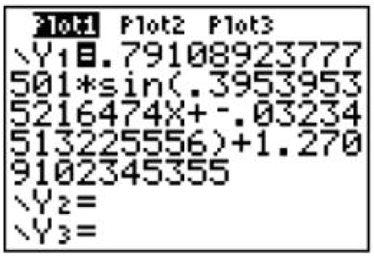
3 a, b

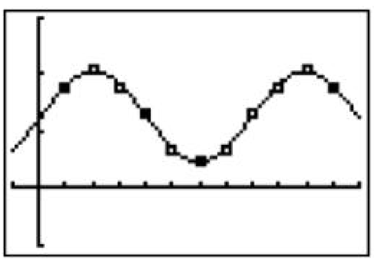


c



d





Ejercitación 13M

1 a Aproximadamente 12 horas
b 9,49 m
c 13,5 m
d 05.30

2 a −3,06 °C
b 30 °C, día 187 (aproximadamente el 6 de julio)
c Aproximadamente 90 días: los días 1−49 inclusive y los días 325−365 inclusive

3 a 46 m
b $h(t) = 22{,}5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{20}(t-5)\right) + 23{,}5$

c 10,3 m
d 4,75 minutos

4 a $g(x) = -16\cos\left(\frac{2\pi}{12}(x-1)\right) + 21$
b 21 galones
c A principios de mayo y fines de agosto

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a −0,342
b −0,342
c 0,342

2 a 0,643
b −0,643
c −0,643

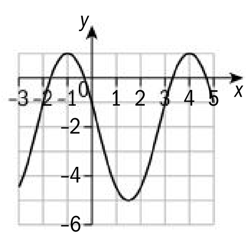
3 a ±120°, ±240
b −330°, −150°, 30°, 210°
c −270°, −150°, −30°, 90°, 210°, 330°

4 $0, \frac{2\pi}{3}, \pi$

5 a i $a = 5, c = 4, d = 6$
ii $b = \frac{2\pi}{\text{período}}$, y el período es 8, $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$
b $4 < x < 8$

6 a $\frac{\sqrt{21}}{5}$ b $\frac{\sqrt{21}}{2}$ c $\frac{4\sqrt{21}}{25}$

7



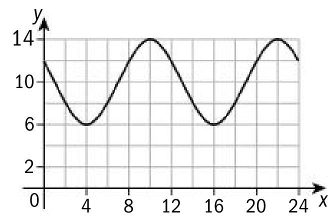
Ejercicio de revisión con CPG

1 a 48,6°; 131,4°
b ±129°, 231°
c −70,3°; 109,7°; 289,7°

2 a −3,36; 0,515; 2,85; 6,06
b 0,607
c ±1,89; 0

3 a $a = -4,\ \log_3 \frac{24}{25},\ c = 3$
b 0,667; 3,33; 4,67

4 a $P = 4, Q = 7$
b



c $t = 2$, a las 2.00
d 8 horas

5 a $A = 2{,}825$; $B = 12{,}175$
b 9,91 horas

Capítulo 14

Comprobemos nuestras habilidades

1 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b -1
c $\frac{1}{\sqrt{3}}$ o $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
d $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 a $x = 0, \pi, 2\pi$
b $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
c $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

3 a $6x^2 e^x + 2x^3 e^x$
b $\ln(x^2) + 2$
c $\frac{-x^2+10x+4}{(x^2+4)^2}$
d $\frac{1-\ln x}{x^2}$

Ejercitación 14A

1 $3\cos x + 2\operatorname{sen} x$

2 $\frac{3}{\cos^2 3x}$

3 $-\frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

4 $-2\cos t \operatorname{sen} t$ o $-\operatorname{sen}(2t)$

5 $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

6 $\frac{2\tan x}{\cos^2 x}$

7 $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 4\cos(4x)$

8 $\dfrac{2\,\text{sen}\,(2x)}{\cos^2(2x)}$

9 $\dfrac{-8\pi\cos(\pi x)}{\text{sen}^3(\pi x)}$

10 $[\cos(\text{sen}\,x)]\cos x$

11 a $\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3)}$

b $-4\cos^3 x\,\text{sen}\,x$

12 a $3\cos(3x-4)$

b $-9\text{sen}\,(3x-4)$

Ejercitación 14B

1 $y-1=1\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right);\ y-1=-1\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

2 $y-2=4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right);\ y-2=-\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

3 -2

4 a $-\dfrac{1}{2}$ b $-2\text{sen}\,(2x)$

c $y+\dfrac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

5 $\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}$

Ejercitación 14C

1 $-12\,\text{sen}\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+3$

2 $\dfrac{1}{(1+\cos x)}$

3 xe^x

4 $e^{\text{sen}2t}\cos 2t$

5 $2e^x\,\text{sen}\,x$

6 $\dfrac{t}{\cos^2 t}+\tan t$

7 $3e^{3x}\cos 4x-4e^{3x}\,\text{sen}\,4x$

8 $\dfrac{1}{\cos^2 2x\sqrt{\tan 2x}}$

9 $\dfrac{\cos x}{x}-\ln x\,\text{sen}\,x$

10 $-\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ o $-\tan x$

11 a $\dfrac{2}{x}$ b $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

c $\dfrac{1}{2}\ln 3x^2\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\,\text{sen}\,\dfrac{x}{2}$

12 $a=1,\ b=2$

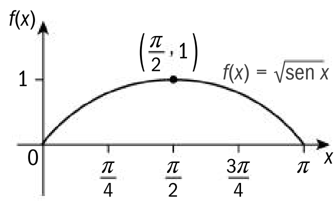
Ejercitación 14D

1 Mínimo relativo: $\left(\dfrac{4\pi}{3},-2\right)$;

máximo relativo: $\left(\dfrac{\pi}{3},2\right)$

2 Mínimos relativos: $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right),\left(\dfrac{3\pi}{2},-3\right)$; máximos relativos: $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{3}{2}\right)$

3 Decreciente: $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$; creciente $0<x<\dfrac{\pi}{2}$; cóncava hacia abajo: $0<x<\pi$; máximo relativo: $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$



4 Decreciente:

$0<x<\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{4}$;

creciente:

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{4}<x<\pi$;

cóncava hacia arriba:

$\dfrac{\pi}{8}<x<\dfrac{3\pi}{8},\ \dfrac{5\pi}{8}<x<\dfrac{7\pi}{8}$;

cóncava hacia abajo:

$0<x<\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{3\pi}{8}<x<\dfrac{5\pi}{8},\ \dfrac{7\pi}{8}<x<\pi$;

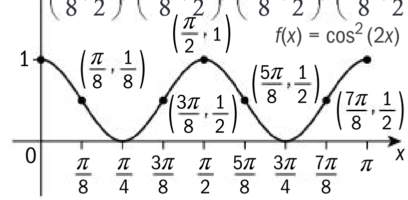
máximo relativo: $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$;

mínimos relativos:

$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right),\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$;

puntos de inflexión:

$\left(\dfrac{\pi}{8},\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{7\pi}{8},\dfrac{1}{2}\right)$



5 a $f'(x)=-2\text{sen}\,2x+2\cos x(-\text{sen}\,x)$

$=-2\text{sen}\,2x-2\text{sen}x\cos x$

$=-2\text{sen}\,2x-\text{sen}\,2x$

$=-3\text{sen}\,2x$

b $\left(\dfrac{\pi}{2},-1\right)$

c $f''(x)=-6\cos 2x$

d $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

6 a i $f'(x)=x\cos x+\text{sen}\,x$

ii $a=-1,\ b=2$

b i $x\approx 2{,}03;\ 4{,}91$

ii $f''(2{,}03)\approx-2{,}71<0$ $\Rightarrow$ máximo relativo en $x=2{,}03$

$f''(4{,}91)\approx 5{,}21>0$ $\Rightarrow$ mínimo relativo en $x=4{,}91$

7 a $f'(x)=-x^2\,\text{sen}\,x+2x\cos x$

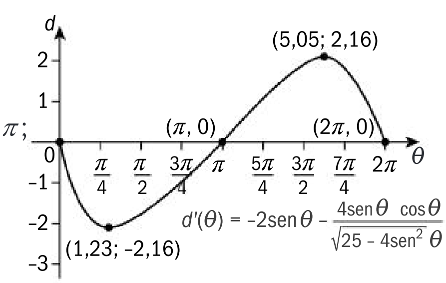
b Mínimo: $-11{,}6$; máximo: $7{,}09$

8 a

$d'(\theta)=-2\,\text{sen}\theta-\dfrac{4\,\text{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{25-4\,\text{sen}^2\theta}}$

o $-2\,\text{sen}\theta-\dfrac{2\,\text{sen}2}{\sqrt{25-4\,\text{sen}^2\theta}}$

b



c i La hoja de acero está más cerca del centro de la rueda cuando d(θ) tiene un mínimo relativo o en el punto extremo. Hay un mínimo relativo cuando d$'(\theta)$ cambia de negativa a positiva en $\theta=\pi$. Evaluando los puntos extremos y los valores críticos, hallamos que $d(0) = 7$, $d(2\pi) = 7$ y $d(\pi) = 3$. Por lo tanto, la menor distancia es 3 metros y ocurre cuando el ángulo de rotación es π.

ii La distancia varía más rápidamente cuando $d'(\theta)$ tiene un mínimo relativo o un máximo relativo. Esto sucede cuando θ es 1,23 radianes o 5,05 radianes.

Ejercitación 14E

1 $2\text{sen } x - 3\cos x + C$

2 $\frac{1}{3}x^3 + 3\text{sen}\left(\frac{1}{3}x\right) + C$

3 $-\cos(\pi x) + C$

4 $-\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$

5 $\text{sen}(5x^4) + C$

6 $\frac{1}{4}\text{sen}(4x^2 - 4x) + C$

7 $\frac{1}{3}e^{\tan 3x} + C$

8 $\text{sen}(\ln x) + C$

9 $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x + C$

10 $-\ln(\cos x) + C$, $\cos x > 0$

11 a $-e^{\text{sen } x}\text{sen } x + e^{\text{sen } x}\cos^2 x$

b $e^{\text{sen } x} + C$

12 a $f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\text{sen } x)$

$= -\frac{\text{sen } x}{\cos x}$

$= -\tan x$

b $-\frac{1}{2}[\ln(\cos x)]^2 + C$

Ejercitación 14F

1 $\sqrt{3}$; 1,73

2 4; 4

3 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; 1,30

4 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; 0,159

Ejercitación 14G

1 12,1

2 6,31

3 $\frac{\pi}{6}$

4 a 3,97

b 38,3

5 a $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$

b $\int_0^{2\pi} 2\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)dx = 8$

6 a i $c = 1$, $d = 2$

ii $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{7\pi}{6}$

b i 2

ii 4,25

c 9,12

Ejercitación 14H

1 a $v = e^t\cos t + e^t\text{sen } t$

b $a = 2e^t\cos t$

2 a -2 m s^{-1}

b $\frac{\pi}{2}$ s

c -1 m

3 a i $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ii $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$

b $a(t) = -e^{\text{sen } t}\text{sen } t + e^{\text{sen } t}\cos^2 t$

c $s(t) = e^{\text{sen } t} + 3$

4 a $\int_0^4 (4\text{sen } t + 3\cos t)\,dt$

b 4,34 m

5 a i $-2,52\text{ m s}^{-2}$

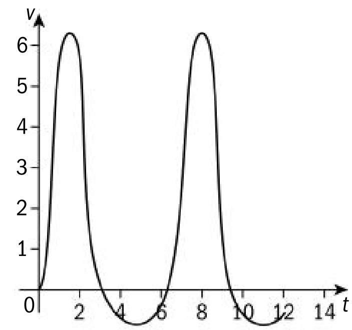
ii Acelerando

b 2,51 s y 3,54 s

c 7,37 m

6 a $5,82\text{ m s}^{-2}$

b i



ii 1,11 s; 2,03 s; 7,39 s; 8,31 s

iii No, la partícula no regresa al origen. En la región entre la curva y el eje t, hay más espacio arriba del eje que debajo, indicando que la partícula se mueve a la derecha a una distancia mayor que a la izquierda; entonces nunca regresa al origen.

c 24,1 m

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a $2\text{sen}(1 - 2x)$

b $3\text{sen}^2 x\cos x$

c $\frac{e^{\tan t}}{\cos^2 t}$

d $\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\text{sen } x^2}}$

e $-x^2\text{sen } x + 2x\cos x$

f $\frac{1}{\tan x\cos^2 x}$ o $\frac{1}{\text{sen } x\cos x}$

g $(\ln x)(\cos x) + \frac{\text{sen } x}{x}$

h $-2\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x$ o $2\cos 2x$

2 a $x^4 + \cos x + C$

b $\frac{1}{3}\text{sen}(3x) + C$

c $-\frac{1}{4}\cos(4x + 1) + C$

d $\frac{1}{4}\text{sen}(2x^2) + C$

e $\dfrac{1}{2\cos(2t+1)}+C$

f $-\cos(\ln x)+C$

g $\dfrac{1}{2}e^{\text{sen } x^2}+C$

h $-\dfrac{6}{2+\text{sen } x}+C$

3 a 0 b $2+\pi$

c 2 d 2

4 $x = 2$

5 $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x+1$

7 a $p = 2, q = 2$

b $3\pi + 2$

Ejercicio de revisión con CPG

1 a 4,53

b 1,36

2 a 4,93

b 45,0

3 1,23

4 a i $s'(t) = -10 \text{ sen } (5t)\, e^{\cos(5t)}$

ii $s''(t) = -10 \text{ sen } (5t)$

$\times [e^{\cos(5t)}) (-\text{sen } (5t))(5)]$
$+ e^{\cos(5t)} [-10(\cos(5t))(5)]$

$= 50 \text{ sen}^2 (5t)[e^{\cos(5t)}$
$- 50 \cos(5t)(e^{\cos(5t)})]$

$= 50\, e^{\cos(5t)} (\text{sen}^2 (5t)$
$- \cos(5t))$

iii $s'\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=0$ y $s''\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\approx 18,4>0$

En consecuencia, por la comprobación de la segunda derivada, s tiene un mínimo relativo en $t=\dfrac{\pi}{5}$.

b 14,2 m

Capítulo 15

Comprobemos nuestras habilidades

1 a 5,5

b $\dfrac{568}{39} = 14,6$ (3cs)

2 a 15

b 56

c 0,267

3 a 1,71875

b 2,98

c 8,68

Ejercitación 15A

1 a Discreta

b Continua

c Discreta

d Continua

2 a

s	P(*S* = *s*)
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$

b

n	P(*N* = *n*)
0	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$

c

n	P(*N* = *n*)
1	$\frac{11}{36}$
2	$\frac{9}{36}$
3	$\frac{7}{36}$
4	$\frac{5}{36}$
5	$\frac{3}{36}$
6	$\frac{1}{36}$

d

p	P(*p*)
1	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{2}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{4}{36}$
8	$\frac{2}{36}$
9	$\frac{1}{36}$
10	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{4}{36}$
15	$\frac{2}{36}$
16	$\frac{1}{36}$
18	$\frac{2}{36}$
20	$\frac{2}{36}$
24	$\frac{2}{36}$
25	$\frac{1}{36}$
30	$\frac{2}{36}$
36	$\frac{1}{36}$

3 a

T	2	3	4	5	6
P(*T* = *t*)	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$

b $P(T>4)=\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$

4 a

s	1	2	3	6	10
P($S = s$)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b $\frac{1}{2}$

5 a $\frac{1}{6}$ b $\frac{1}{2}$

6 $\frac{1}{36}$

7 0,2

8 $\frac{27}{40}$

9 a $a = \frac{1}{8}, b = \frac{5}{24}$

b $\frac{125}{96}$

10 b

c	2	3	4	5	6
P($C = c$)	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$

Investigación: resultados de los dados

1

d	0	1	2	3	4	5
P($D = d$)	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

2

d	0	1	2	3	4	5
Frecuencia esperada	6	10	8	6	4	2

3 Media = $\frac{35}{18}$

4

d	Frecuencia esperada
0	$\frac{150}{9}$
1	$\frac{250}{9}$
2	$\frac{200}{9}$
3	$\frac{150}{9}$
4	$\frac{100}{9}$
5	$\frac{50}{9}$

Media = $\frac{35}{18}$

5 La misma media

6 $\frac{35}{18}$

Ejercitación 15B

1 $\frac{91}{6} = 15,2$ (3cs)

2 $x = \frac{3}{8}, y = \frac{1}{8}$

3 $5\frac{1}{3}$

4 $5\frac{2}{3}$

5 a $k = \frac{1}{25}$

b E(X) = 5

6 a

X	1	2	3
P($X = x$)	0,2	$1 - k$	$k - 0,2$

b $0,2 \leq k \leq 1,$

c $k + 1,6$

7 0,2

8 a

r	P($R = r$)
1	$\frac{18}{90}$
2	$\frac{16}{90}$
3	$\frac{14}{90}$
4	$\frac{12}{90}$
5	$\frac{10}{90}$
6	$\frac{8}{90}$
7	$\frac{6}{90}$
8	$\frac{4}{90}$
9	$\frac{2}{90}$

b $3\frac{2}{3}$

c 1

9 b $\frac{16}{125}$, c $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ d 1

10 a P(Z = 0) = 0,7489

b E(Z) = 1,7 = \$1,70; la suma que se espera ganar con un billete

c Pierde \$0,30.

Investigación: el test binomial

1 V 2 V 3 F 4 F 5 F

Esperaría haber obtenido 2,5 preguntas correctas.

La probabilidad de obtener exactamente 3 preguntas correctas de 5 es 0,3125.

Ejercitación 15C

1 a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{16}$

c $\frac{5}{16}$ d $\frac{15}{16}$

2 a 0,329

b 0,351

c 0,680

d 0,649

3 a 0,0389

b 0,952

c 0,00870

d 0,932

Ejercitación 15D

1 1; 0,422

2 a 0,257

b 0,260

3 a 0,851

b 0,000491

c 0,0109

4 a 0,0584

b 0,9996

5 0,913

6 a 0,224

b 0,399

7 a i 0,0307

ii 0,463

iii 0,171

b i 0,215

ii 0,0292

iii 0,158

Ejercitación 15E

1 $n = 4$
2 68
3 $n = 7$
4 9 intentos
5 7 veces

Ejercitación 15F

1 a 20
b $6\frac{2}{3}$
c 10
2 $n = 25$
3 a $X \sim B(15; 0,25)$
b 3,75
c 0,000795
4 a 0,51
b 38,2

Ejercitación 15G

1 Media = 0
Varianza = 0
2 Media = 7,2
Desviación típica = 1,70 (3 cs)
3 Media = 20
Desviación típica = 3,16 (3 cs)
3 a $E(X) = \frac{5}{3}$
b $Var(X) = \frac{25}{18}$
c $P(X < \mu) = 0,485$ (3 cs)
5 a $E(X) = \frac{22}{5}$
b $Var(X) = \frac{88}{25}$
c $P(X < 4) = 0,332$ (3 cs)
6 $P(X \geq 3) = 0,873$ (3 cs)
7 a $n = 26$
b $Var(X) = 5,46$
8 $n = 12, p = 0,8$,
$P(X = 6) = 0,0155$

Ejercitación 15H

1 a $P(-1 < Z < 1) = 0,683$
b $P(-2 < Z < 2) = 0,954$
c $P(-3 < Z < 3) = 0,997$
2 a 0,272 b 0,483
3 a 0,159
b 0,00820
4 a 0,159
b 0,0401
5 a 0,742
b 0,236
c 0,0359
d 0,977
e 0,390
6 a 0,306
b 0,595
c 0,285
7 a 0,311
b 0,215

Ejercitación 15I

1 a 0,655 b 0,841
c 0,186 d 0,5
2 a 0,672 b 0,748
c 0,345
3 a 0,994 b 0,977
c 0,494

Ejercitación 15J

1 a 0,933 b 0,691
c 0,736
2 477
3 a 0,0668 b 15,9%
4 53,5%
5 a 0,106 b 0,00118

Ejercitación 15K

1 a 1,42 b 0,407
c 2,58
2 a 1,77 b −1,00
c −0,841
3 a 0,385 b 1,60
4 a 1,64 b 0,842

Ejercitación 15L

1 5,64
2 a 413
b 433
3 a 0,106 b 0,864
c 499 y 505
4 a 0,673 b 582 g
5 a 79,7 puntos
b 35,8 puntos

Ejercitación 15M

1 8,33
2 15,4
3 $\mu = 49,9$ y $\sigma = 4,23$
4 $\mu = 71,4$ y $\sigma = 13,8$
5 7,66 cm
6 546,5 g
7 a 0,389 kg b 35,0%
8 54,3 cm
9 0,260 m
10 a 126; 33,7
b Sí (60,5%)
11 $\mu = 507,1$ y $\sigma = 7,34$

Ejercicio de revisión sin CPG

1 a 6 b $-\frac{7}{15}$
2 a $\frac{1}{35}$ b 3
3 $x = \frac{3}{8}, P = \frac{13}{64}$
4 a 2, 4, 6, 8, 12, 16
b $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$
c 7,5 d £62,50
5 $\frac{40}{243}$
6 0,2
7 a 85 b 0,023

Ejercicio de revisión con CPG

1 a $\frac{19}{27}$
b

x	−5	1
$P(X = x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{19}{27}$

c i Pierde −\$0,78.
ii Pierde −\$7,00.
2 a 0,254 b 0,448
3 0,0243
4 a i 0,0881
ii 0,00637
b 2 c 14
5 1,44
6 a 8,68
b 0,755
7 38,9 horas; 8,63 horas
8 a 33,3 b 0,328
c 0,263

Capítulo 18

Ejercitación 1A

1 a 11 b 10 c 8
d 4 e 5 f 3
g 16 f 3

2 a 5 b $1\frac{1}{2}$
c $\frac{5}{4}$ d 24

3 a 12 b 540
c 16 d 5

4 a 5 b 8 c 8 d 2

5 a 2 b 4 c 34

Ejercitación 1B

1 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b $2\sqrt{3}$ c $\sqrt{5}$
d $2\sqrt{10}$ e $\frac{\sqrt{10}}{5}$

2 a $2\sqrt{3}$ b $5\sqrt{3}$ c $6\sqrt{2}$
d $6\sqrt{2}$ e $15\sqrt{3}$

3 a 6 b 9 c $16\sqrt{3}$
d $6\sqrt{6}$ e $75\sqrt{15}$

4 a $5\sqrt{5}$ b $2\sqrt{2}$ c $4\sqrt{3}$
d $-\sqrt{2}$ e 0

5 a $11 + 6\sqrt{2}$ b $5 + 2\sqrt{6}$
c $1 - 2\sqrt{2}$
d $4+\sqrt{3}-4\sqrt{2}-\sqrt{6}$
e 2

6 a $\frac{(\sqrt{21}+\sqrt{7})}{7}$
b $-\frac{(1+2\sqrt{3})}{11}$
c $\frac{(5-\sqrt{5})}{4}$
d $16 + 11\sqrt{2}$

7 a $\frac{11\sqrt{3}}{3}$ b $\frac{13\sqrt{3}}{6}$
c $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

Ejercitación 1C

1 a 1, 2, 3, 6, 9, 18
b 1, 3, 9, 27
c 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
d 1, 2, 4, 7, 14, 28
e 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78

2 a $2^2\times3^2$ b $2^2\times3\times5$
c 2×3^3 d 2^5 e $2^4\times7$

3 a 40 b 240

4 a 8 b 18

Ejercitación 1D

1 a $\frac{11}{12}$ b $\frac{16}{15}$ c 1
d $\frac{211}{81}$ o $2\frac{49}{81}$

2 a $\frac{4}{9}$ b $\frac{7}{20}$
c $\frac{2}{3}$ d $\frac{5}{8}$

3 a $\frac{18}{5}$ b $\frac{22}{7}$
c $\frac{93}{4}$ d $\frac{167}{72}$

4 a $4\frac{4}{7}$ b $33\frac{1}{3}$
c $4\frac{1}{4}$ d $14\frac{8}{11}$

5 a 0,32 b 0,714
c 3,8 d 2,65

Ejercitación 1E

1 a 52% b 70%

2 a CHF2,24 b GBP0,54
c EUR187,57 d JPY10400

Ejercitación 1F

1 GBP576

2 JPY14875

3 7%

4 26,5%

5 26 500 000

6 32 USD

7 De 3,40 a 4,00 USD; por lo tanto, 0,60 USD

8 No, la nueva suma es AUD49,50; una reducción de 1%.

Ejercitación 1G

1 5:4

2 95,1:100

3 21:160

4 $15{,}6 \times 72 = 1123{,}2$ cm o 11,232 m

5 3 km = 3000 m = 300 000 cm por lo tanto la escala es 1:300 000. Camino = 0,04 cm en el mapa

6 72 USD = 5 + 3 = 8 partes, por lo que 1 parte = 9 USD. Se donan 45 USD: 27 USD.

7 5:3:2; 5 + 3 + 2 = 10 partes; 1 parte = 15 unidades. Por lo tanto 75:45:30 unidades, es decir, 75 *brownies*, 45 galletas de chocolate y 30 flapjacks

Ejercitación 1H

1 5000:7000:4000 se simplifica a 5:7:4. 5 + 7 + 4 = 16 partes = 24 000, por lo que 1 parte es 1500 USD. Josh recibe 1500 × 5 = 7500 USD, Jarrod 1500 × 7 = 10500 USD, Se Jung 1500 × 4 = 6000 USD.

2 12 + 18 + 20 = 50 puntos = 75 minutos; por lo tanto, 1 punto = 1,5 minutos; por lo tanto, 12 × 1,5 = 18 minutos, 18 × 1,5 = 27 minutos, 20 × 1,5 = 30 minutos

Ejercitación 1I

1 a, b, d, e, g, i son racionales; el resto son irracionales.

2 a a y g b a

3 a $\frac{83}{1}$ b $\frac{4}{9}$
c Irracional d $\frac{-24}{25}$
e $\frac{-5}{11}$ f Irracional
g $-\frac{36}{1}$ h Irracional
I $\frac{1123}{900}$ j Irracional

Ejercitación 1J

1 a 2180 b 400 c 4000
d 21 e 13

2 a 0,69 b 28,8 c 1,00
d 77,985 e 0,06

3 a 2200 b 440 c 3500
d 21 e 13

4 a 0,694 b 28,8 c 1,00
d 78,0 e 0,0588

5 a 0,667 b 0,0652

c 0,385

6 a $50 \div 10 = 5$ b $\frac{(3\times4)}{2} = 6$

c $\frac{(7-1)}{9^2} = 0{,}07$

7 a 5,46 b 5,77

c 0,0841

Ejercitación 1K

1 a $1{,}475\times10^3$ b $2{,}31\times10^5$

c $2{,}8\times10^9$ d $3{,}5\times10^5$

e $7{,}35\times10^6$

2 a 62500 b 420 000 000

c 355,4

3 a $1{,}232\times10^{-4}$

b $4{,}515\times10^{-5}$

c $6{,}17\times10^{-1}$

d $7{,}5\times10^{-6}$

e $3{,}49\times10^{-4}$

4 a 0,00000035

b 0,000000089

c 0,01253

5 En 1 s, 3×10^5 m

Por lo tanto, en $\frac{1}{3}$ s, 10^5 m

Por lo tanto,
1 m en $0{,}33\times10^{-5} = 3{,}3\times10^{-6}$ s

Ejercitación 1L

1 a A = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36, 72}

b B = {2, 3}

c C = {2}

d D = {14, 28, 42, 56, 70,… }

e E = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}

f F = {20, 21, 22, 23, 24,…}

g G = {}

2 a 11

b 2

c 1

d Infinito

e 7

f Infinito

g 0

Ejercitación 1M

1 a Sí, todos los elementos de B están incluidos en A.

b No, tienen elementos en común.

c {4, 5}

d {1, 2, 3, 4, 5, 6}

2 a A = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} y

B = {1, 3, 5, 15}

b No, B tiene elementos que no son elementos de A.

c No, tienen algunos elementos en común.

d {1, 3}

e {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 36}

3 a A = {17, 18, 19, …} y

B = {20, 40, 60, 80…}

b Sí.

c No, tienen algunos elementos en común.

d {20, 40, 60, 80…} = B

e {17, 18, 19, 20, …} = A

4 {x | x es un número entero positivo que no es múltiplo de 3}

5 {40, 50, 60, 70,… }

6 (*Hay diferentes respuestas posibles.*)

a A = {1, 3, 5, 7,…} y
B = {2, 4, 6, 8,…}

b A = {4, 7, 10} y

B = {4, 7, 10, 13, 16,…}

c A = {1, 2, 3} y
B = {4, 5}

d A = {1, 2, 3, 4, 5} y
B = {2, 4, 6, 8}

e A = {1, 3, 5, 7} y
B = {2, 4, 6, 8}

f A = {1, 2, 3, 4} y
B = {1, 2, 4, 6, 7, 8}

g A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y
B = {2, 4, 6}

Ejercitación 1N

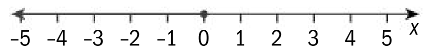
1 a $x < 2$

b $-1 \le x < 5$

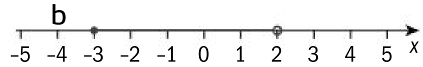
c $x > 2$

d $-4 \le x \le 3$

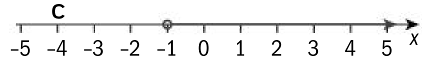
2 a



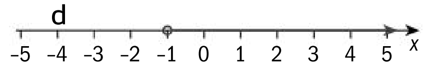
b



c

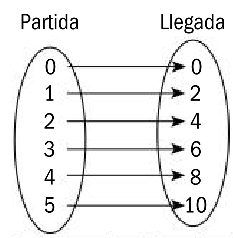


d



Ejercitación 1O

1 a

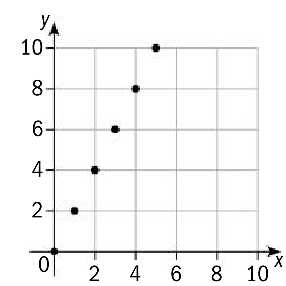


b

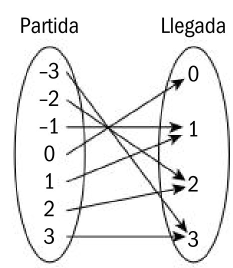
x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

c (0,0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)

d



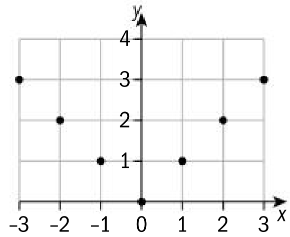
2 a



b

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

c (–3, 3), (–2, 2), (–1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) d



Ejercitación 2A

1 a $3x^2 - 6x$ b $x^3 - xy + \frac{x^2}{y}$

c $3ab - 2ac + b^2$

2 a $3pq(1 - 2pq^2r)$

b $3c(4ac + 5b - c)$

c $abc(2a + 3b - 5c)$

Ejercitación 2B

1 $x^2 + 3x - 28$

2 $x^2 - 5x + 6$

3 $3x^2 + 2x - 8$

4 $6x^2 - 11x - 10$

5 $9x^2 + 9x + 2$

Ejercitación 2C

1 $x^2 + 10x + 25$

2 $x^2 - 8x - 16$

3 $x^2 - 4$

4 $9x^2 - 24x + 16$

5 $4x^2 + 20x + 25$

6 $4x^2 - 49$

Ejercitación 2D

1 a $(x + 4)(x + 7)$

b $(x - 1)(x - 13)$

c $(x + 4)(x - 5)$

d $(x + 4)(x - 2)$

e $(x + 4)(x + 9)$

f $(x + 2)(x - 9)$

2 a $(2x - 3)(x - 3)$

b $(3x + 1)(x + 2)$

c $(5x - 2)(x - 3)$

d $(4x + 3)(x - 1)$

e $(3x + 2)(x - 3)$

f $(7x - 5)(2x - 1)$

3 a $(x - 3)(x + 3)$

b $(x - 10)(x + 10)$

c $(2x - 9)(2x + 9)$

d $(5x + 1)(5x - 1)$

e $(m + n)(m - n)$

f $(4x - 7y)(4x + 7y)$

Ejercitación 2E

1 $t = \frac{(u - v)}{g}$

2 $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$

3 $r = \frac{c}{2\pi}$

4 $b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$

5 $\cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$

6 $F = \frac{9}{5}C + 32$

7 existencias = activos corrientes – razón de liquidez × pasivos corrientes

Ejercitación 2F

1 2,487

2 3,728

3 40,073

Ejercitación 2G

1 $x = 4$

2 $x = 4$

3 $x = -3$

4 $x = 3$

5 $x = 5$

6 $x = 9$

7 $x = 2$

8 $x = -2$

9 $x = 3$

10 $x = 1{,}5$

11 $x = 1$

12 $x = 2$

Ejercitación 2H

1 a $x = 1, y = 1$

b $x = 1, y = -2$

c $x = -3, y = 4$

2 a $x = 6, y = -1$

b $x = 2, y = -1$

c $x = -2, y = 2$

d $x = 2, y = 1$

e $x = 3, y = -1$

Ejercitación 2I

1 a 17 b 144 c 64

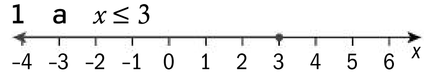
2 a 1 b $\frac{1}{9}$ c $\frac{1}{16}$

3 a 525,219 b 4,081

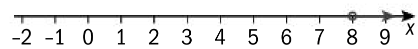
c 1,667

Ejercitación 2J

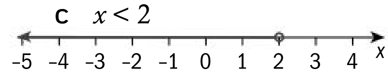
1 a $x \leq 3$



b $x > 8$



c $x < 2$



2 a $x \leq 5$

b $x > -\frac{2}{3}$

c $x \geq -1$

Ejercitación 2K

1 a 3,25 b 6,18 c 0

2 Cuando $x = 3$, $|5 - x|$ es 2; cuando $x = 8$, $|5 - x|$ es 3.

3 a 2 b 2 c 2

Ejercitación 2L

1 $\frac{3x + 1}{x + 7}$

2 $\frac{x + 1}{2x + 2}$ o $\frac{1}{2}$

3 $\frac{6x + 8}{3x + 4}$ o 2

4 $\frac{5x^2 + 4x + 5}{(x + 5)(2x - 1)}$

5 $\frac{2x^2 + 5x + 8}{x(x + 2)}$

6 $\frac{5x^2 + 8x - 3}{(x - 2)(4x + 3)}$

7 $\frac{12x^2 - x - 5}{(5x + 1)(2x - 5)}$

8 $\frac{13x + 2}{(x - 4)(x + 2)}$

Ejercitación 2M

1 $x = 1$

2 $k = 5$

3 $x = 1{,}5$

4 $x = 1{,}1$

5 $x = -\frac{19}{23}$

Ejercitación 3A

1 27,6 cm

2 2,24 cm

3 5,03 cm

Ejercitación 3B

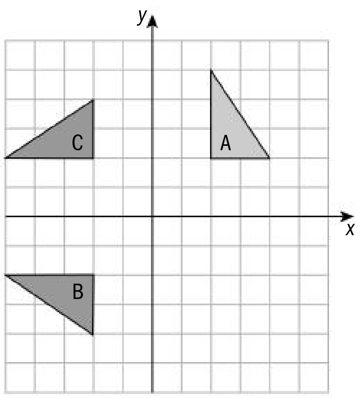
1 a Simetría en $x = 0$ (eje y)

b Traslación de $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

c Rotación con centro (0, 0) de 90 grados en sentido horario

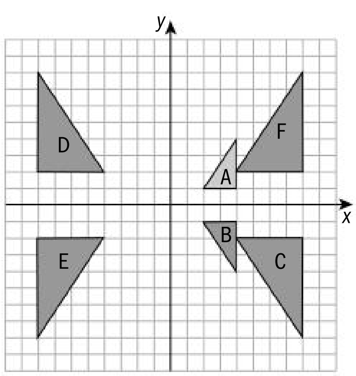
d Simetría en $y = x$

2 a,b



c Rotación de 90º en sentido antihorario con centro (0,0)

3



g Simetría en el eje x

h Homotecia de razón 2 centro (0, 0)

i Homotecia de razón $-\frac{1}{2}$ centro (0, 0)

j Simetría en el eje y

Ejercitación 3C

1 Ángulo DFE = Ángulo ACB

Ángulo DEF = Ángulo ABC

EF = BC

Dos ángulos y lado incluido, por lo tanto, ALA, son congruentes.

Por lo tanto $x = 6$ cm y $y = 4$ cm y $z = 9$ cm

2 QP = AB

PR = BC

QR = AC

Tres lados son iguales (LLL) por lo tanto, congruentes.

$x = 89°$, $y = 58°$, $z = 33°$

3 Ángulo FDE = Ángulo ABC = 90°

DE = BC

FE = AC = Hipotenusa

Un cateto y la hipotenusa coinciden en un triángulo rectángulo (RHC), por lo tanto, son congruentes $x = 50°$, $y = 40°$.

Ejercitación 3D

1 Rectángulos con lados 5; 11 y 4; 8,8

Rectángulos con lados 5; 6,25 y 4; 5

Rectángulos con lados 5; 8 y 8; 12,8

2 a La razón es $10{,}08 \div 7{,}2 = \frac{7}{5}$.

$y = 9{,}1 \times \frac{5}{7} = 6{,}5$ cm

$x = 13 \times \frac{7}{5} = 18{,}2$ cm

b La razón es $4{,}5 \div 3 = 1{,}5$.

$y = 1 \times 1{,}5 = 1{,}5$ cm

$x = 2 \times 1{,}5 = 3$ cm

3 a A y B

b A y C

c A y B

d Ninguno

e Ninguno

4 Ángulo PAQ = Ángulo BAC

Ángulo ABC = APQ (rectas paralelas y ángulos correspondientes)

Ángulo ACB = AQP (rectas paralelas y ángulos correspondientes)

Por lo tanto, son semejantes. La razón es $\frac{6}{4}$ o 1,5

Por lo tanto, AB = 2 × 1,5 = 3 cm y BP = AB – AP = 3 – 2 = 1 cm

Por lo tanto, AC = 3 × 1,5 = 4,5 cm

5 a Ángulo AXB = Ángulo CXD (ángulos opuestos por el vértice)

Ángulo BAX = XDC (rectas paralelas y ángulos alternos)

Ángulo ABX = XCD (rectas paralelas y ángulos alternados)

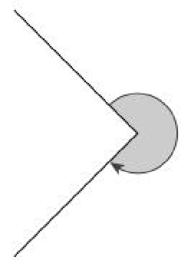
Por lo tanto, son semejantes.

b XD

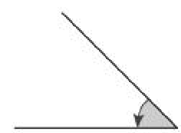
c 3,9 cm

Ejercitación 3E

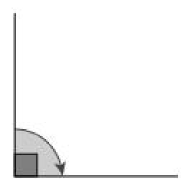
1 a



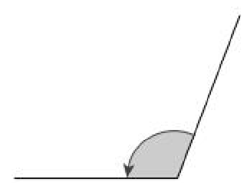
b



c



d



2 a Cóncavo b Obtuso

c Agudo

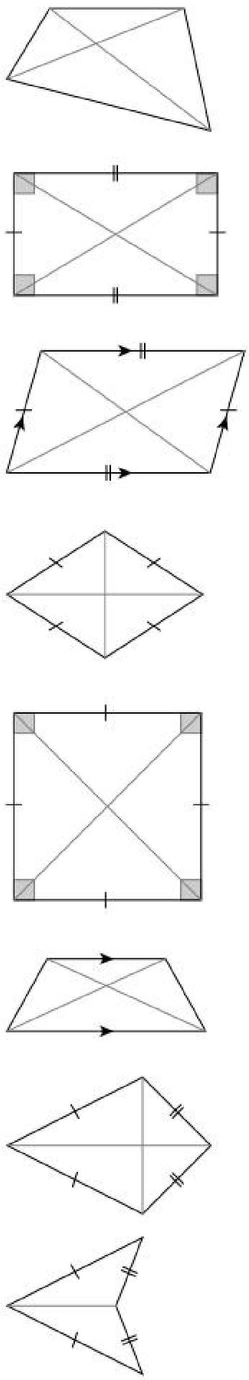
3 a Obtuso b Agudo

c Cóncavo d Agudo

e Cóncavo f Cóncavo

Ejercitación 3F

1



2 a Triángulo isósceles, paralelogramo, triángulo rectángulo, triángulo escaleno, rombo, punta de flecha, cometa

b Triángulo equilátero, cuadrado, paralelogramo, triángulo rectángulo, trapecio

Ejercitación 3G

1 a $3,2 + 3,2 + 4,3 = 10,7$ cm

b $5,5 + 2,7 + 5,5 + 2,7$
$= 16,4$ cm

c $7,2 + 4,2 + 4,8 + 4,2$
$= 20,4$ cm

d $20\pi = 62,8$ cm

e $3,2 + 3,2 + 3,2 + 1,6\pi$
$= 14,6$ cm

f $3(5,2\pi)/4 + 2,6 + 2,6$
$= 17,5$ cm

Ejercitación 3H

1 $4,5^2\pi = 63,6$ cm²

2 $\frac{(6,2+4,5)}{2}\times 4,3 = 23,0$ cm²

3 $6,5 \times 5,8 = 37,7$ cm²

4 $\frac{1}{2} \times 5,7 \times 3,6 = 10,3$ cm²

5 $6,48$ m²

6 $\frac{2,9(2,7+4,1)}{2} + (6,3\times 4,1)$
$+ \frac{(2,05^2\pi)}{2} = 42,3$ cm²

Ejercitación 3I

1 Pirámide: $(7\times 7) + \frac{4(7\times 8)}{2}$
$= 161$ cm²

Cilindro: $2(2,2^2\pi) + (4,4\pi \times 5,6) = 107,8$ cm²

Cono: $(\pi \times 4 \times 10) + (4^2\pi)$
$= 175,9$ cm²

2 Pirámide: 96 cm³
Cilindro: $2,2^2\pi \times 5,6$
$= 85,15$ cm³

Cono: $\frac{(4,5^2\pi \times 12)}{3}$
$= 254,47$ cm³

3 Volumen $= \pi r^2 \frac{h}{3}$

$23 = \frac{4\pi h}{3}$

$69 = 4\pi h$

$h = 5,49$ cm

4 Volumen $= \pi r^2 h$

$h = \frac{2120,6}{25\pi} = 27,000$ cm

Nuevo volumen $= \pi \times 2,5^2 \times 27$
$= 176,7$

5 a Área de la superficie $= 4\pi r^2$
$= 4\pi \times 3,5^2$
$= 153,938$ cm²

Volumen $= 4\frac{\pi r^3}{3} = 4\frac{\pi\times 7,5^3}{3}$
$= 179,594$ cm³

b Área de la superficie $= 4\pi r^2 = 4\pi \times 7,5^2$
$= 706,858$ cm²

Volumen $= 4\frac{\pi r^3}{3} = 4\frac{\pi\times 7.5^3}{3}$
$= 17,146$ cm³

6 Área de la superficie $= 2\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh$
$= 2\pi \times 6^2 + \pi \times 6^2 + 2\pi \times 6 \times 5 = 527,788$ cm²

Volumen $= 2\frac{\pi r^3}{3} + \pi r^2 h$
$= 2\frac{\pi \times 6^3}{3} + \pi \times 6^2 \times 5$
$=1017,876$ cm³

7 Volumen del contenedor
$= \frac{(40^2\times 70)}{3} = 37\,333,33$ cm³

Diagonales	Irregular	Rectángulo	Paralelogramo	Rombo	Cuadrado	Trapecio	Cometa
Perpendiculares	×	×	×	✓	✓	×	✓
Iguales	×	✓	×	×	✓	×	×
Se cortan en su punto medio.	×	✓	✓	✓	✓	×	✓
Dividen ángulos en dos partes iguales.	×	×	✓	✓	✓	×	✓

El volumen de una pelota es $\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi 10^3}{3} = 4188{,}79$ cm^3.

El volumen de las ocho pelotas es 33 510,32 cm^3.

El espacio que queda en el contenedor es 37 333,33 – 33 510,32 = 3823,012 cm^3.

8 Área de la superficie $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$
$= 2\pi \times 4{,}5^2 + 2\pi \times 4{,}5 \times 14$
$= 523{,}1$ cm^2

Volumen $= \pi r^2 h = \pi \times 4{,}5^2 \times 14 = 890{,}6$ cm^3

9 Volumen $= \pi \times 5{,}5^2 h = 250$

$\frac{250}{\pi \times 5{,}5^2} = h$

$h = 2{,}63$ cm

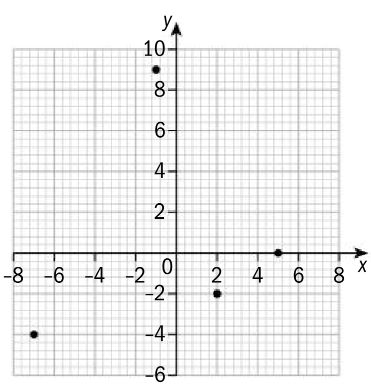
10 Área de la superficie $= 2\pi rh = 950$

$\frac{950}{2\pi \times 60} = r$

$r = 2{,}5$ cm

Ejercitación 3J

1



A(4, 9), B(–4, 2), C(–8, –6), D(8, –8)

Ejercitación 3K

1 (5, 5)

2 (–1, 1)

3 (1,5; 2,5)

Ejercitación 3L

1 5

2 9,43

3 14,8

Ejercitación 3M

1 $\frac{-4}{5} = -0{,}8$

2 $\frac{-1}{4} = -0{,}25$

3 $\frac{2}{5} = 0{,}4$

4 $\frac{-6}{4} = -1{,}5$

5 $\frac{-5}{1} = -5$

6 Indefinido

7 $\frac{3}{1} = 3$

8 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

9 0

Ejercitación 3N

1 $\frac{(-15--16)}{(-7-19)} = \frac{1}{(-26)} = -0{,}039$

2 $\frac{(-7--19)}{(-2-1)} = \frac{12}{-3} = -4$

3 $\frac{(-4-7)}{(-6\ -\ -7)} = 5{,}5$

4 $\frac{(16-8)}{(9-20)} = \frac{8}{-11} = -0{,}73$

5 $\frac{(7--13)}{(17-17)} = \frac{20}{0}$; indefinido

6 $\frac{(3-3)}{(1-14)} = \frac{0}{-13} = 0$

7 $\frac{(-15-0)}{(-11-3)} = \frac{-15}{-14} = 1{,}071$

8 $\frac{(10--2)}{(-11-19)} = \frac{12}{-30} = -0{,}4$

9 $\frac{(15--10)}{(-15-6)} = \frac{(25)}{(-21)} = -1{,}19$

10 $\frac{(-18--18)}{(18-12)} = \frac{0}{6} = 0$

Ejercitación 3O

1 a 3 y $\frac{6}{2}$; 4,5 y $\frac{9}{2}$

b –3 y $\frac{1}{3}$; 4,5 y $\frac{-2}{9}$, $\frac{2}{3}$ y –1,5

2 a Paralelas (ambas tienen pendiente 2)

b Perpendiculares (una tiene pendiente 4 y la otra $-\frac{1}{4}$)

c Ninguna (una tiene pendiente $\frac{5}{4}$ y la otra tiene pendiente 0)

d Perpendiculares (pendientes 1 y −1)

e Paralelas (pendientes de 1,5)

Ejercitación 3P

1 $y - 5 = 3(x - 1)$
$y - 5 = 3x - 3$
$y = 3x + 2$

2 $y - 11 = 4(x - 5)$
$y - 11 = 4x - 20$
$y = 4x - 9$

3 $y - 12 = 2{,}5(x - 4)$
$2y - 24 = 5(x - 4)$
$2y - 24 = 5x - 20$
$2y = 5x + 4$
$y = 2{,}5x + 2$

4 $y - 20 = 0{,}5(x - 12)$
$y - 20 = 0{,}5x - 6$
$y = 0{,}5x + 14$

5 $y - -13 = 5(x - -2)$
$y + 13 = 5(x + 2)$
$y + 13 = 5x + 10$
$y = 5x - 3$

6 $y - 1 = -3(x - 1)$
$y - 1 = -3x + 3$
$y = -3x + 4$

7 $y - -1 = -2(x - 3)$
$y + 1 = -2x + 6$
$y = 2x - 7$

8 $y - -3 = -\frac{1}{2}(x - -4)$
$y + 3 = -\frac{1}{2}(x + 4)$
$y + 3 = -\frac{1}{2}x - 2$
$y = -\frac{1}{2}x - 5$

9 La pendiente es $\frac{19-7}{5-3} = 6$.
$y - 7 = 4(x - 2)$
$y - 7 = 4x - 8$
$y = 4x - 1$

10 La pendiente es $\frac{-11--3}{-5--1} = \frac{-8}{-4} = 2$

$y--3 = 2(x--1)$

$y+3 = 2(x+1)$

$y+3 = 2x+2$

$y = 2x-1$

Ejercitación 4A

1 Gráfico de barras para representar los colores de los automóviles

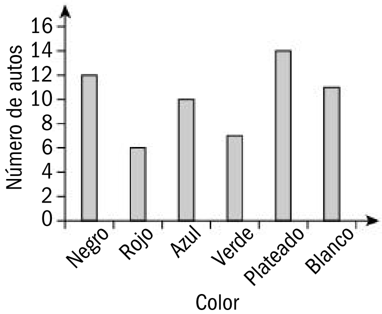
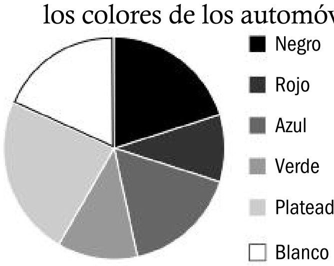


Gráfico de sectores para mostrar los colores de los automóviles



Pictograma para mostrar los colores de los automóviles

	Número de autos
Negro	△ △ △ △ △ △
Rojo	△ △ △
Azul	△ △ △ △ △
Verde	△ △ △ △
Plateado	△ △ △ △ △ △ △
Blanco	△ △ △ △ △ △

Clave △ es 2 automóviles

2 Gráfico de barras para representar el número de veces que los compañeros de Isabel fueron al cine

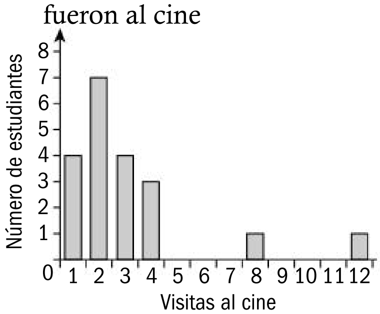
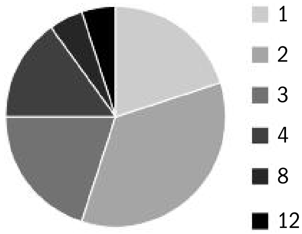


Diagrama de sectores para representar el número de veces que los compañeros de Isabel fueron al cine



Pictograma para representar el número de veces que los compañeros de Isabel fueron al cine

Visitas por mes	Número de estudiantes
1	△ △
2	△ △ △ △
3	△ △
4	△ △
8	△
12	△

Clave △ es 2 estudiantes

Ejercitación 4B

1

2	1 3 5 6 8
3	0 0 0 3 6 7 9 9
4	0 1 2 2 2 2 6 9
5	0 4

Clave 2|1 significa 21

2

12	1 3
14	5 8 9
15	1 2 7
16	3 4
17	6 6 7
18	5

Clave 16|4 significa 164

3

1	9
2	2 5 6 7 8 9
3	0 4 6 7
4	2 3 4 6 8 8 9
5	2 3 5 7 8
6	2

Clave 4|2 significa 42

4

1	1 4 4 6 8 9
2	3 4 6 6 7 8 9
3	0 4 5 6 8
4	
5	1 6

Clave 2|4 significa 24

5

2	2 3 5 5 9
3	1 2 2 3
4	2 3 3 6 7 8
5	2 2 2 4
6	0 3 4
7	3 4

Clave 6|3 significa 6,3

Ejercitación 4C

1 Discretos
2 Discretos
3 Continuos
4 Continuos
5 Continuos
6 Discretos
7 Discretos
8 Continuos
9 Continuos

Ejercitación 4D

1 **a** Moda = 1
Mediana = 4
Media = 4

b Moda = 5
Mediana = 5
Media = 4

c Moda = 2 y 8
Mediana = 5
Media = 5

d Moda = 25
Mediana = 25
Media = 25

e Moda = 10,2
Mediana = 10,2
Media = 9,42

2 **a** 1
b 1
c 1,67

3 **a** 8
b 8
c 9

4 **a** 4,82
b 5,06
c 5,02

5 a 497
  b 497
  c 400

Ejercitación 4E

1 a $38 - 26 = 12$
  b $34 - 28 = 6$

2 a $8 - 0 = 8$
  b $4 - 1 = 3$

3 a $8 - -7 = 15$
  b $4 - -4 = 8$

4 a $20 - 12 = 8$
  b $18 - 14 = 4$

5 a $23{,}5 - 2{,}45 = 21{,}05$
  b $12{,}4 - 3{,}5 = 8{,}9$

Esquema de corrección

Práctica de la prueba 1

Sección A

1 a $p = -1$, $q = 3$ (o viceversa)	A1 A1	N2
b i $x = 1$ (debe ser una ecuación)	A1	N1
ii Sustitución correcta de los valores para x, p y q		
$f(1) = 2(1 + 1)(1 - 3)$	M1	
vértice $(1, -8)$	A1 A1	N2
2 a $f'(x) = -2e^{-2x}$	A1	
$f''(x) = 4e^{-2x}$	A1	
$f'''(x) = -8e^{-2x}$	A1	
$f^{(4)}(x) = 16e^{-2x}$	A1	N4
b Generalización de los signos alternados	(A1)	
$f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^n e^{-2x}$ o $f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$	A1 A1	N3
3 a 6	A1	N1
b Evidencia de uso del desarrollo binomial	(M1)	
Evidencia del cálculo de factores $\binom{5}{2}(x^4)^2(-2x)^3$	A1 A1 A1	
$-80x^{11}$	A1	N2
4 a i $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$	(A1) (A1)	
Sustitución correcta	A1	
p.ej. $\operatorname{sen} 2\theta = 2\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$		
$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{12}{13}$	A1	N3
ii Sustitución correcta	A1	
p.ej. $\cos 2\theta = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2$		
$\cos 2\theta = -\frac{5}{13}$	A1	N1
b $\tan 2\theta = -\frac{12}{5}$	A1	N1
5 a i $p = 6$	A1	N1
ii $q = 5$	A1	N1
iii $r = 9$	A1	N1
iv $s = 20$	A1	N1
b $P(V \mid D') = \dfrac{\frac{9}{40}}{\frac{29}{40}}$	(M1)	
$P(V \mid D') = \frac{9}{29}$	A1	N2
c Razón válida	R1	
p.ej. $P(V \cap D) \neq 0$ o $P(V \cup D) \neq P(V) + P(D)$ o una expresión numérica equivalente; así, V y D no son incompatibles mutuamente excluyentes	AG	N0

6 a Expresión correcta	A1	N1
$\pi\int_0^4 \left(\frac{\sqrt{\operatorname{sen}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 dx,\ \pi\int_0^4 \frac{\operatorname{sen}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$		
b Usa una sustitución correcta		
p.ej. $\pi\int_0^4 \frac{\operatorname{sen}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}}dx = 2\pi\int_0^2 \operatorname{sen} u\,du$	(M1)	
Primitiva correcta		
$2\pi\int_0^2 \operatorname{sen} u\,du = -2\pi\left[\cos u\right]_0^2$ o $\left[\cos\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^4$	A1	
Evaluación correcta		
$2\pi(\cos 2 - \cos 0) = -2\pi(\cos 2 - 1)$	A1	
$p = -2,\ q = 2$	A1 A1	N0
7 a 0	A1	N1
b Intercambia x e y (evidente en cualquier lugar)	(M1)	
p.ej. $x = 4^{-y}$		
Evidencia de una operatoria correcta	A1	
p.ej. $-y = \log_4 x,\ y = \log_4 x^{-1}$		
$f^{-1}(x) = \log_4 \frac{1}{x}$	AG	N0
c Cálculo de $g(4)$ (evidente en cualquier lugar)	A1	
Intento de sustitución	M1	
$\left(f^{-1}\circ g\right)(4) = \log_4 \frac{1}{2^4}$		
$\left(f^{-1}\circ g\right)(4) = \log_4 \frac{1}{16}$	(A1)	
$\left(f^{-1}\circ g\right)(4) = -2$	A1	N1

Sección B

8 a i Halla la primitiva de f	A1 A1 A1	
$f'(x) = 6x^2 - 3x - 3$	(M1)	
Iguala a 0 la derivada		
p.ej. $6x^2 - 3x - 3 = 0,\ f'(x) = 0$	A1	
Resuelve la ecuación		
p.ej. $3\left(2x^2 - x - 1\right) = 0 \Rightarrow 2(2x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, 1$		
Elige el valor negativo		
$x = -\frac{1}{2}$	A1	N0
ii Halla la segunda derivada de f	A1 A1	
$f'(x) = 12x - 3$	(M1)	
Iguala la derivada segunda a 0		
p.ej. $12x - 3 = 0,\ f''(x) = 0$		
Resuelve la ecuación	A1	N0
$x = \frac{1}{4}$		

b **i** La simetría da $(1, -2)$. (A1)
La traslación da $(1, -5)$. A1 N2
ii La simetría da $y = -2x^3 + 1{,}5x^2 + 3x - 4{,}5$. (A1)
La traslación da $g(x) = -2x^3 + 1{,}5\,x^2 + 3x - 7{,}5$. A1 N2

9 **a** Muestra evidencia del uso de la regla del producto. M1
$f'(x) = (x)\,(-e^{-x}) + (e^{-x})\,(1)$ A1 A1
$= e^{-x}\,(-x + 1)$ A1
$= e^{-x}\,(1 - x)$ AG N0

b $f''(x) = (e^{-x})(-1) + (1 - x)\,(-e^{-x})$ A1 A1
$= -2e^{-x} + xe^{-x} (= e^{-x}(x - 2))$ A1 N3

c **i** $f'(1) = 0$ A1
$f''(1) = -\frac{1}{e}$ A1 N2
ii Aplica la comprobación de la segunda derivada. A1
Hay un mínimo relativo en $x = 1$ R2 N0
dado que $f'(1) = 0$ y $f'(1) = -\frac{1}{e} < 0$.

10 **a** Reconoce que el producto escalar debe ser cero (evidente en cualquier parte). R1
p.ej. $a \cdot b = 0$
Evidencia de elección de los vectores directores $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ l \end{pmatrix}$ (A1) (A1) (A1)
Cálculo correcto del producto escalar
p.ej. $8(2) + (-2)(2) + 12l$ A1
simplificación que claramente conduce a la solución AG N0
p.ej. $12 + 12l = 0$
$l = -1$

b **i** Evidencia de igualación de vectores M1
p.ej. $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
dos ecuaciones correctas A1 A1
p.ej. $8p = 4 + 2s$, $4 - 2p = -2 + 2s$, $1 + 12p = 15 - s$
Intento de resolver ecuaciones (M1)
Cálculo de **un** parámetro correcto ($p = 1$, $s = 2$) A1
$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$ A1 N3

c **i** Evidencia de una aproximación A1
p.ej. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ A1 N2
ii Elección correcta de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ (A1)
Cálculo de $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$ A1
$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 25$

Cálculo de $|\overrightarrow{BA}|$ y $|\overrightarrow{BC}|$ A1 A1

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{26}$ y $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{30}$

Evidencia del uso de la fórmula para calcular el coseno

$\cos\theta = \dfrac{25}{\sqrt{26}\sqrt{30}} = 26{,}5°$ A1 N4

Esquema de corrección

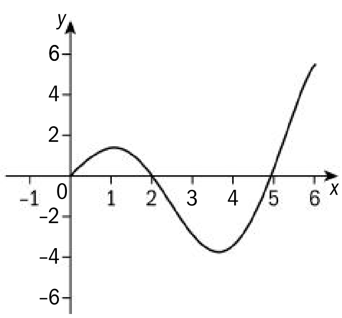
Práctica de la prueba 2

Sección A

1 a 0,969 (A1)
b Correlación fuerte, positiva. (A1)(A1)
c $y = 4{,}89x + 5{,}67$ (A1)
d $y = 4{,}89(20) + 5{,}67 = 103$ gramos (M1)(A1)

2 a 4 A1
b Evidencia de una aproximación correcta *p.ej.* $u_n = 329$ (M1)
Operatoria correcta *p.ej.* $329 = 5 + (n - 1)4$ A1
$n = 82$ A1
c Evidencia de una sustitución correcta (M1)
p.ej. $S_{82} = \dfrac{82}{2}(2(5) + (82 - 1)4)$
$S_{82} = 13\,694.$ (A1)

3 a Evidencia de elección de la regla del producto escalar
p.ej. $(x\cos x) + (1\operatorname{sen} x)$ (M1)
$f'(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x$ (A1) (A1)
b



A1 por el dominio correcto, con los puntos extremos en el lugar correcto
A1 por una aproximación correcta de la figura
A1 por los mínimos locales en el lugar correcto
A1 por el máximo local en el lugar correcto

4 a Evidencia de sustitución en la fórmula de la media $= \dfrac{\sum fx}{\sum f}$ (M1)
Sustitución correcta *p.ej.* $\dfrac{70 + 5x}{19 + x} = 4 \Rightarrow x = 6$ (A1)
b 1,33 (A1)
c 4,6 (A1)
d Sin cambio (A1)

5 a Uso de la regla del seno *p.ej.* $\dfrac{BD}{\operatorname{sen}100°} = \dfrac{8}{\operatorname{sen}30°}$ (M1)
BD = 15,8 (A1)(A1)
b Uso de la regla del coseno, *p.ej.* $\cos BCD = \dfrac{8^2 + 10^2 - BD^2}{2 \times 8 \times 10}$ (M1)
Ángulo BCD = 122° (A1)(A1)

c Uso de la fórmula del área *p.ej.* $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \text{sen BCD}$ (M1)

Area BCD = 34,0 (A1)

6 a Evidencia de integrar la función aceleración (M1)

p.ej. $\int \left(\frac{1}{t} + 3\text{sen } 2t\right)\text{d}t$

expresión correcta *p.ej.* $\ln t - \frac{3}{2}\cos 2t + c$

Evidencia de sustitución (1,0) *p.ej.* $0 = \ln 1 - \frac{3}{2}\cos 2 + c$ (A1)(A1)

$c = -0{,}624$ (M1)

$v = \ln t - \frac{3}{2}\cos 2t - 0{,}624$ (A1)

$v(5) = 2{,}24$ (A1)

7 a Evidencia de uso de la probabilidad binomial (M1)

Sustitución correcta *p.ej.* $\binom{10}{4}(0{,}25)^4(0{,}75)^6$ (A1)

P = 0,146 (A1)

b $\text{P}(X \geq 2) > 0{,}9 = \text{P}(X < 2) < 0{,}1$

$\text{P}(X < 2) = \text{P}(X = 0) + \text{P}(X = 1)$

$= \binom{n}{0}(0{,}25)^0(0{,}75)^n + \binom{n}{1}(0{,}25)^1(0{,}75)^{n-1}$ (M1)

$= (0{,}75)^n + 0{,}25n(0{,}75)^{n-1} < 0{,}1$ (A1)

Uso de un gráfico o una tabla de la función (M1)

El juego debe jugarse al menos 15 veces. (A1)

Sección B

8 a i 1 am

ii 10 am (A1)

b La profundidad del agua puede modelizarse mediante la función $y = A\cos(B(x - C)) + D$ (A1)

i Amplitud = $\frac{9-1}{2} = 4$ (M1) (A1)

ii 1 (A1)

iii 5 (A1)

iv $B = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ (M1) (A1)

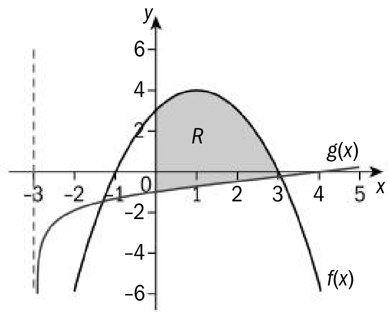
v $y = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-1)\right) + 5$ (A1) (A1)

c Evidencia del uso del modelo $4{,}5 = 4\cos\frac{\pi}{6}(x-1) + 5$ (M1)

Evidencia del uso de un método gráfico (M1)

El Halcón del Mar puede entrar después de las 9.46 am ($x = 9{,}76$). (A1)

9 a (A1) (A1)



A1 por mostrar la forma básica de la función $f(x)$

A1 por mostrar tanto la asíntota horizontal como la vertical

A1 por la forma básica de $g(x)$

A1 por las raíces correctas (A1) (A1)

A1 por las intersecciones con el eje y correctas (A1)

b i $x = -3$ es la asíntota vertical (A1)

ii raíz: $x = 4{,}39$ $(= e^2 - 3)$

iii Intersección con el eje y: $y = -0{,}901$ $(= \ln 3 - 2)$ (M1) (A1)

c $f(x) = g(x)$ (M1)

$x = -1{,}34$ o $x = 3{,}05$ (M1) (A1) (M1)

d i Ver el gráfico

ii Área de $R = \displaystyle\int_0^{3{,}05} (4 - (1 - x)^2) - (\ln(x + 3) - 2)\,\mathrm{d}x$ (A1)

iii Área de $R = 10{,}6$ (M1)

(M1)(A1)

10 a $\mathrm{P}(G > 170) = 1 - \mathrm{P}(G < 170)$

$\mathrm{P}(G > 170) = 1 - \mathrm{P}\left(Z < \dfrac{170 - 155}{10}\right)$

$\mathrm{P}(G > 170) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332$ (A1)

$= 0{,}0668$

b $z = -1{,}2816$ A1

Cálculo correcto

(*p.ej.* $x = 155 + -1{,}282 \times 10$) (A1)

$x = 142$

c Cálculo de una variable (M1)

p.ej. $\mathrm{P}(B < r) = 0{,}95$; $z = 1{,}6449$ (A1)

$r = 160 + 1{,}645(12) = 179{,}74$

$= 180$

Cualquier cálculo válido para la segunda variable, incluyendo el uso de la simetría (M1) (A1)

p.ej. $\mathrm{P}(B < q) = 0{,}05$; $z = -1{,}6449$

$q = 160 - 1{,}645(12) = 140{,}26$ (A1)(A1)

$= 140$ A1

d $\mathrm{P}(M \cap (B > 170)) = 0{,}4 \times 0{,}2020$; $\mathrm{P}(F \cap (G > 170)) = 0{,}6 \times 0{,}0668$ A1

$\mathrm{P}(H > 170) = 0{,}0808 + 0{,}04008$

$= 0{,}12088 = 0{,}121$ (3 cs) (M1) (M1) (A1)

e $(\mathrm{P}(F/H > 170) = \dfrac{P(F \cap (G > 170))}{P(H > 170)}$

$= \dfrac{0{,}04008}{0{,}12088} = 0{,}332$

Se emplean los símbolos siguientes para este esquema de corrección:
Estatura de las niñas
G ~ N(155, 10^2)
Estatura de los niños
B ~ N(160, 12^2)
Estatura H, Mujer F, Varón M

Índice temático

MATEMÁTICAS NIVEL MEDIO

La cobertura más **completa y correcta** del programa de estudios de 2012. Su enfoque claro y explicativo construye una comprensión segura. Este libro cubre, de forma acertada, el enfoque del IB y, con más de 600 páginas de **práctica**, fomenta el desempeño y los resultados. Se provee, además, una sección de ejercicios resueltos.

Los libros del alumno de Oxford son los únicos recursos del Programa del Diploma desarrollados con el IB. Esto significa que:

- Son los **más completos** y **acertados** con respecto a las especificaciones del IB
- Están escritos por profesores y responsables de taller con mucha experiencia y conocimiento del IB
- Brindan un apoyo preciso para la **evaluación, directamente del IB**
- Se corresponden verdaderamente con la filosofía del IB, desafiando a los alumnos con **material novedoso y actual de Teoría del Conocimiento**

Autores:

Laurie Buchanan

Jim Fensom

Ed Kemp

Paul La Rondie

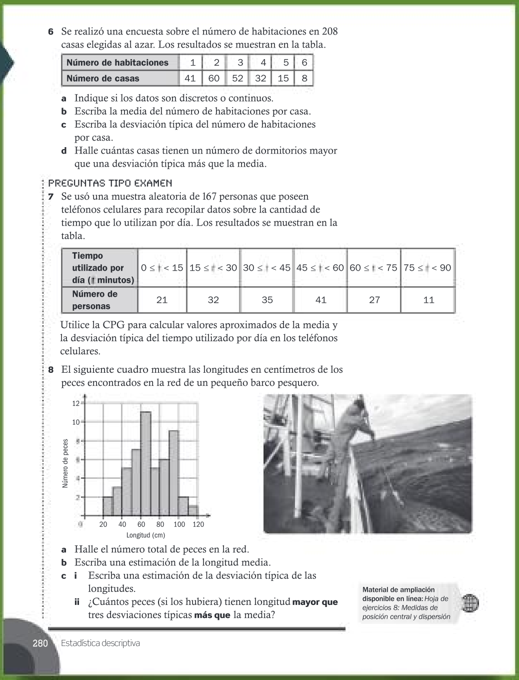
Jill Stevens

PARA PRIMERA EVALUACIÓN EN 2014

Material gratuito en línea en:

www.oxfordsecondary.com/ib-matematicas

Incluye **apoyo para la evaluación** proporcionado directamente por el IB, que ayuda a desarrollar la confianza de forma tangible



6 Se realizó una encuesta sobre el número de habitaciones en 208 casas elegidas al azar. Los resultados se muestran en la tabla.

Número de habitaciones	1	2	3	4	5	6
Número de casas	41	60	52	32	15	8

a Indique si los datos son discretos o continuos.
b Escriba la media del número de habitaciones por casa.
c Escriba la desviación típica del número de habitaciones por casa.
d Halle cuántas casas tienen un número de dormitorios mayor que una desviación típica más que la media.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

7 Se usó una muestra aleatoria de 167 personas que poseen teléfonos celulares para recopilar datos sobre la cantidad de tiempo que lo utilizan por día. Los resultados se muestran en la tabla.

Tiempo utilizado por día (t minutos)	$0 \le t < 15$	$15 \le t < 30$	$30 \le t < 45$	$45 \le t < 60$	$60 \le t < 75$	$75 \le t < 90$
Número de personas	21	32	35	41	27	11

Utilice la CPG para calcular valores aproximados de la media y la desviación típica del tiempo utilizado por día en los teléfonos celulares.

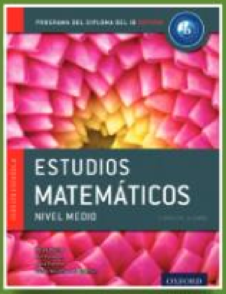
8 El siguiente cuadro muestra las longitudes en centímetros de los peces encontrados en la red de un pequeño barco pesquero.

a Halle el número total de peces en la red.
b Escriba una estimación de la longitud media.
c **i** Escriba una estimación de la desviación típica de las longitudes.
ii ¿Cuántos peces (si los hubiera) tienen longitud **mayor que** tres desviaciones típicas **más que** la media?

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 8: Medidas de posición central y dispersión*

280 Estadística descriptiva

También disponible
978 0 19 833875 8



OXFORD UNIVERSITY PRESS

Cómo ponerse en contacto:
web: www.oxfordsecondary.co.uk/ib
Correo electrónico: schools.enquiries.uk@oup.com
tel: +44 (0)1536 452620
fax: +44 (0)1865 313472

ISBN 978-0-19-833876-5